77307

פתרון תרגיל בית מס' 1 מכניקה סטטיסטית (א) 1

$$u = f + Ts = f - T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = -c_v \ln\frac{T}{T_0} - R\ln\left(\frac{v-b}{v_0-b}\right) - s_0$$

$$u = c_v(T-T_0) - a\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}\right) + \overbrace{(f_0 + s_0T_0)}^{u_0}$$

$$p = -\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = -\frac{a}{v^2} + \frac{RT}{(v-b)} \Rightarrow \left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$$ (ב)

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = \frac{nRT}{P} - nA \Rightarrow P(V+nA) = nRT$$ (א) 2

(ב)

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -nR\ln(P/P_0) + nA'P$$

(ג)

$$H = G + TS = nRT\cancel{\ln(P/P_0)} - nAP - nRT\cancel{\ln(P/P_0)} + nA'PT$$

$$H = n(A'T - A)P$$

(3)

$$U = H - PV = nA'PT - \cancel{nAP} - (nRT - \cancel{nAP}) = nT(A'P - R)$$ (ד)

$$F = G - PV = nRT\ln(P/P_0) - \cancel{nAP} - (nRT - \cancel{nAP}) = nRT\left[\ln(P/P_0) - 1\right]$$

(ה)

$$C_P = \frac{T}{n}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = A''PT \qquad C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

$$U = nT[A'P - R] = nRT\left[\frac{A'T}{v+A} - 1\right] \qquad v = V/n$$

$$\Rightarrow C_V = R\left[\frac{A'T}{v+A} - 1\right] + RT\left[\frac{(v+A)(A'+A''T) - A'^2T}{(v+A)^2}\right]$$

$$\Rightarrow C_V = A'P - R + P\left[\frac{(v+A)(A'+A''T) - A'^2T}{(v+A)}\right]$$

$$\Rightarrow C_V = 2A'P + A''PT - A'^2P^2/R - R$$

③ לשם פשטות נדון בגז אידיאלי חד-אטומי (ההכללה מיידית)

בתהליך אדיאבטי $dQ=0$ ולכן לפי חוק I: $dU = -PdV$

עבור גז חד אטומי $U=\frac{3}{2}\kappa TN$ ולכן העבודה המבוצעת

ע"י הגז נתונה ע"י:

$$W_{T_1\to T_2,\, dQ=0} = \int_{T_1}^{T_2} PdV = -\int_{T_1}^{T_2} dU = -\int_{T_1}^{T_2} N\frac{3}{2}\kappa\, dT = \frac{3}{2}N\kappa(T_1-T_2)$$

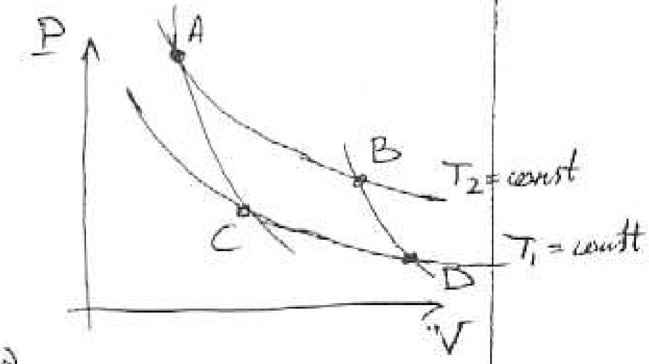
עבור תהליך איזותרמי המתבצע בטמפרטורה T_0 מתקיים מתוך

משוואת המצב:

$$P=\frac{N\kappa T_0}{V} \Rightarrow W_{T=T_0} = \int_{V_1}^{V_2}\frac{N\kappa T_0}{V}dV = N\kappa T_0 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

בציור הסמוך מתואר מחזור קרנו בדיאגרמה (P,V)

על סמך התוצאות שקבלנו:



$$W_{AB} = N\kappa T_2 \ln\frac{V_B}{V_A} = Q_2 \leftarrow$$ החום שקיבל הגז במשך התהליך

באופן דומה

החום שמוסר המערכת במעבר מ-D ל-C: $\rightarrow Q_1 = N\kappa T_1 \ln\frac{V_D}{V_C}$

מכיוון שהנקודות A ו-C נמצאות על אדיאבטה מתקיים:

$$T_1 V_C^{\frac{2}{3}} = T_2 V_A^{\frac{2}{3}}$$

וכן:

$$T_1 V_D^{\frac{2}{3}} = T_2 V_B^{\frac{2}{3}}$$

ע"י חלוקת משוואות

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_D}{V_C} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

ולכן סופית:

$$\eta = \frac{L}{Q_2} = \frac{Q_2-Q_1}{Q_2} = 1-\frac{Q_1}{Q_2} = 1-\frac{T_1}{T_2}$$

4 חוק I: $dU = TdS - PdV$

נחלק ב-dV עבור T קבוע:

$$(*)\quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P$$

בנוסף $dF = -SdT - PdV$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial T\,\partial V} = -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial T} = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

נציב ב-(*) ונקבל:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

וכמו כן ראינו עבור גיבס:

$$dG = -SdT + VdP$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T\,\partial P} = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \frac{\partial^2 G}{\partial P\,\partial T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

תוך שימוש באנתלפיה עבורה קיבלנו:

$$dH = TdS + VdP$$

נסיק:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial S\,\partial P} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \frac{\partial^2 H}{\partial P\,\partial S} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$$

(5) $F(x,p)=px-e^x \quad ; \quad p=e^x \Leftrightarrow x=\ln p \Leftarrow f_1(x)=e^x$

$$g(p)=p\ln p-p$$

$$\left\{F(p,x)=px-\frac{x^\alpha}{\alpha} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=p-x^{\alpha-1}=0 \Rightarrow x=p^{\frac{1}{\alpha-1}}\right\} \Leftarrow f_2(x)=\frac{x^\alpha}{\alpha}$$

$$g(p)=p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}-\frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha}=\frac{p^\beta}{\beta} \quad ; \quad \beta=\frac{\alpha}{\alpha-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=1$$

(6) על סמך עקרון החלוקה השווה לכל דרגת חופש מתאים $\frac{1}{2}$ בקיבול החום ולכן:

(א) $C_V=\frac{3}{2}$ (3 דרגות חופש)

(ב) $C_V=\underbrace{\frac{3}{2}+1}_{}+1=\frac{7}{2}$ (3 דרגות חופש לתנועת מרכז מסה 2 דרגות חופש לסיבובים + תנודה (על סמך משפט הויריאל) תרומה כאן 1)

(ג) $C_V=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+1=4$ כנ"ל רק הפעם מתווסף $\frac{1}{2}$ עבור דרגת חופש נוספת בסיבובים

(7) (א) כש- T ו-V קבועים F שואף למינימום ולכן

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{T,V}=0=\left(-\frac{2\alpha}{\lambda^3}+\frac{\gamma T}{\lambda^2}\right)V \Rightarrow \lambda=\frac{2\alpha}{\gamma T}$$

(ב) $$F(T,V)\overset{(א)}{=}V\left(\frac{\cancel{\alpha}(\gamma T)^2}{4\alpha^{\cancel{2}}}-\cancel{\frac{(\gamma T)^2}{2\alpha}}+\cancel{\frac{(\gamma T)^2}{2\alpha}}\right)=V\frac{(\gamma T)^2}{4\alpha}$$

$$\text{אנרגיית מצב היסוד}=\lim_{T\to 0}F(T,V)=0$$