מכניקה סטטיסטית
(77307)

פתרון תרגיל בית מס' 10

(1) (א) באופן כללי ($k_B=1$)

$$\Omega=-T\sum_k \ln\left(1+e^{\frac{\mu-\epsilon_k}{T}}\right)$$

מספר המצבים בעלי תנע בתחום $(p,p+dp)$ נתון ע"י

$$2\,\frac{4\pi p^2dp\,V}{(2\pi\hbar)^3}$$

וכן מתוך היחס $\varepsilon=cp$ נסיק שמספר המצבים בעלי אנרגיה בתחום $(\varepsilon,\varepsilon+d\varepsilon)$ נתון ע"י:

$$2\,\frac{4\pi\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2\frac{d\varepsilon}{c}V}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{V\varepsilon^2d\varepsilon}{\pi^2c^3\hbar^3}\Rightarrow g(\varepsilon)=\frac{V\varepsilon^2}{\pi^2(\hbar c)^3}$$

כך שעבור הפוטנציאל הגראנד-קנוני נקבל:

$$\Omega=-T\int_0^\infty\frac{V\varepsilon^2d\varepsilon}{\pi^2c^3\hbar^3}\ln\left(1+e^{\frac{\mu-\epsilon}{T}}\right)\underset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=}-\frac{TV}{\pi^2(\hbar c)^3}\left\{\underbrace{\left[\frac{\varepsilon^3}{3}\ln\left(1+e^{\frac{\mu-\epsilon}{T}}\right)\right]_0^\infty}_{0}+\int_0^\infty\frac{\varepsilon^3}{3}\frac{e^{\frac{\mu-\epsilon}{T}}}{1+e^{\frac{\mu-\epsilon}{T}}}\cdot\frac{d\varepsilon}{T}\right\}=-\frac{V}{3\pi^2(\hbar c)^3}\int_0^\infty\frac{\epsilon^3d\varepsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}+1}$$

(ב)

$$U=\int_0^\infty g(\epsilon)\frac{\epsilon\,d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}+1}=\frac{V}{\pi^2(\hbar c)^3}\int_0^\infty\frac{\epsilon^3d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}+1}$$

(ג) מתוך השוואה של U עם Ω, נקבל: $\Omega=-\frac{1}{3}U$

אם ניקח בחשבון, כי $\Omega=-PV$, נקבל סופית:

$$PV=\frac{U}{3}$$

בהמשך לדרוש!!!

2) א) בהצבת ביטוי עבור Ω נבצע החלפת משתנים $z=\frac{\varepsilon}{T}$ ונקבל:

$$\Omega=-\frac{VT^4}{3\pi^2(\hbar c)^3}\int_0^\infty \frac{z^3\,dz}{e^{z-\mu/T}+1}=VT^4 f\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

ב) כלומר $\frac{\Omega}{V}$ היא פונקציה הומוגנית של μ ו-T מסדר 4

ולכן פונקציות $\frac{S}{V}$ ו- $\frac{N}{V}$ הן פונקציות הומוגניות מסדר 3 של משתנים μ ו-T, כי:

$$\frac{S}{V}=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu}=-4T^3 f\left(\frac{\mu}{T}\right)+T^4 f'\left(\frac{\mu}{T}\right)\frac{\mu}{T^2}=T^3\left(-4f\left(\frac{\mu}{T}\right)+\frac{\mu}{T}f'\left(\frac{\mu}{T}\right)\right)$$

$$\frac{N}{V}=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{T,V}=-T^3 f'\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

ג) בתהליך אדיאבטי $\frac{S}{N}$ נשאר קבוע, ולכן:

$$\frac{S}{N}=\underbrace{\frac{S/V}{N/V}}_{\text{על סמך סעיף קודם}}=\varphi\left(\frac{\mu}{T}\right)\Rightarrow\underbrace{\frac{\mu}{T}=const}_{\text{בתהליך אדיאבטי}}$$

, φ – פונקציה מסויימת של μ ו-T, למעשה יחס $\frac{\mu}{T}$

אבל אז:

$$\frac{N}{VT^3}=\underbrace{-f'\left(\frac{\mu}{T}\right)=const}_{\text{בתהליך אדיאבטי}}$$

<= משוואת אדיאבטה $VT^3=const$.

שאלה 3

א

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T,N} = -K_B T \frac{\partial}{\partial V}\left[\ln Z\right] = -\cancel{K_B T}\,\frac{\sum_{N,i} e^{\beta[\mu N - E_i]}}{Z}\cdot\cancel{(-\beta)}\,\underbrace{\frac{\partial E_i}{\partial V}}_{-P_i}$$

$$= -\sum_{N,i} \frac{e^{\beta[\mu N - E_i]}}{Z} P_i = -\overline{P}$$

ב

$$\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\sum_i N_i \frac{e^{-\beta[E_i - \mu N_i]}}{Z}\right] = \sum_i \beta N_i^2 \frac{e^{\beta(\mu N_i - E_i)}}{Z}$$

$$-\beta\left(\sum_i N_i \frac{e^{\beta(\mu N_i - E_i)}}{Z}\right)\left(\sum_j N_j \frac{e^{\beta(\mu N_j - E_j)}}{Z}\right)$$

$$= \beta\left[\overline{N_i^2} - \overline{N_i}^2\right]$$

שאלה 4

$$Z = \sum_{i,N} e^{-\beta(E_i - \mu N)} = \sum_N e^{\beta\mu N} \underbrace{\sum_i e^{-\beta E_i}}_{\substack{\text{פונקצית חלוקה} \\ \text{של גז אידיאלי בעל} \\ \text{N חלקיקים}}} = \sum_N e^{\beta\mu N}\cdot\frac{z^N}{N!}$$

כאשר z - פונקצית חלוקה של חלקיק בודד ולכן:

$$Z = \sum_N \frac{\left(e^{\beta\mu}\cdot z\right)^N}{N!} = \exp\left[e^{\beta\mu}\cdot z\right] \Rightarrow \Omega = -\frac{e^{\beta\mu} z}{\beta} \quad \left(Z = e^{-\beta\Omega}\right)$$

$$\lambda = \overline{N} = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} = e^{\beta\mu} z \Rightarrow Z = e^{\lambda}$$

עתה על סמך הגדרת ההסתברות מתקיים:

$$P(N) = \sum_i \frac{e^{-\beta(E_i - \mu N)}}{Z} = \frac{e^{\beta\mu N}}{Z}\cdot\frac{z^N}{N!} = \frac{\left(z e^{\beta\mu}\right)^N}{Z\,N!} = \frac{\lambda^N}{N!\,e^{\lambda}}$$

מ.ש.ל.