מס' הקורס: 77307

פתרון תרגיל בית מס' 11

שאלה 3

(א) מציב נוסחא כללית $Z=\sum_n e^{-\beta E_n}$ <= נקבל מיד:

$$Z=\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)e^{-\beta\frac{j(j+1)\hbar^2}{2ma^2}}$$

(ב) בגבול של טמפרטורות גבוהות, נקבל:

$$Z=\int_0^{\infty}(2x+1)e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2ma^2}x(x+1)}dx=\left[-\frac{2ma^2}{\beta\hbar^2}e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2ma^2}x(x+1)}\right]_0^{\infty}=\frac{2ma^2}{\beta\hbar^2}$$

כידוע $-\beta F=\ln Z$ ו- $U=\frac{\partial\beta F}{\partial\beta}$, לכן נקבל:

$$U=-\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}=\frac{\partial\ln\beta}{\partial\beta}=\frac{1}{\beta}=K_BT\Rightarrow C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=K_B$$

(ג) בגבול של טמפרטורות נמוכות המערכת הופכת להיות מערכת של שני מצבים ומתקיים:

$$Z\simeq 1+3e^{-\frac{\beta\hbar^2}{ma^2}}$$

$$U=-\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}=+\frac{3\frac{\hbar^2}{ma^2}}{e^{\frac{\beta\hbar^2}{ma^2}}+3}\Rightarrow C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=K_B\frac{3\left(\frac{\hbar^2}{ma^2}\right)^2e^{\frac{\beta\hbar^2}{ma^2}}}{\left(e^{\frac{\beta\hbar^2}{ma^2}}+3\right)^2\beta^{-2}}$$

כלומר אם נסמן $\frac{\beta\hbar^2}{ma^2}=\alpha$ נקבל:

$$\frac{C_V}{K_B}=\frac{3\alpha^2e^{\alpha}}{(3+e^{\alpha})^2}$$

(ד) גבול של טמפרטורות גבוהות <=> (1) $K_BT\gg\frac{\hbar^2}{ma^2}$

גבול של טמפרטורות נמוכות <=> (2) $K_BT\ll\frac{\hbar^2}{ma^2}$

כמובן ככל שאנו יותר בגבול יותר ב-(2) נקבל תרומה הרבה יותר, ולכן במקרה של מולקולה קלה H_2 נקבל את התרומה הזו.

(2) (א) על הפתרון של משוואת שרדינגר $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=\hat H|\psi\rangle$ נוכל לגזור $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}=\hat H$ ולכן הפעלת הכפולה

נותנת:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\psi(t)\rangle=\hat H^2|\psi(t)\rangle$$

במקרה שלנו $\hat H=c\hat p$ ונוכל לרשום (בהצגת המקום):

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-c^2\hbar^2\Delta\psi \quad \left(\hat p^2=-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)=-\hbar^2\Delta\right)$$

$$c^2\Delta\psi-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \quad \text{או} \quad \Delta\psi-\frac{\partial^2\psi}{c^2\partial t^2}=0$$

קיבלנו משוואת גלים רגילה. למעשה, זאת משוואת מכסוול, כאשר ψ מזוהה עם 4-הפוטנציאל $(\varphi,\vec A)$. כגל עבור פונקציה עצמית של המילטוניאן ניתן לכתוב $\psi(t,\vec r)=e^{\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(\vec r)$

כך שנקבל:

$$\Delta\varphi(\vec r)+\frac{E^2}{(\hbar c)^2}\varphi=0$$

הבעיה שלנו היא דו-מימדית, נפתור אותה ע"י הפרדת משתנים:

$$\varphi(\vec r)=X(x)\,Y(y)$$

ונקבל: $Y''(y)=-k_y^2Y(y)$ $\quad X''(x)=-k_x^2X(x)$, כאשר $k_x^2+k_y^2=\frac{E^2}{(\hbar c)^2}$

תוך שימוש בתנאי שפה, נקבל:

$$X(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_x x)\ ,\quad k_x=\frac{n_x\pi}{L}\ ,\quad n_x=1,2,\dots$$

$$Y(y)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_y y)\ ,\quad k_y=\frac{n_y\pi}{L}\ ,\quad n_y=1,2,\dots$$

$$\frac{E^2_{n_xn_y}}{(\hbar c)^2}=\frac{\pi^2}{L^2}\left(n_x^2+n_y^2\right)$$

עבור מס' המצבים נקבל:

רבע מעגל

$$\Gamma(E)=\underbrace{2}_{\text{בגלל הספין}}\cdot\frac14\pi\frac{L^2E^2}{(\pi\hbar c)^2}\Rightarrow g(E)=\frac{d\Gamma}{dE}=\frac{L^2E}{\cancel{2}\pi(\hbar c)^2}$$

(ב) על סמך הגדרת אנרגיית פרמי, נקבל:

$$N=\int^{E_F}g(E)\,dE=\left(\frac{L}{\hbar c}\right)^2\frac{E_F^2}{2\pi}\Rightarrow E_F=(2\pi N)^{1/2}\frac{\hbar c}{L}$$

ג) הפוטנציאל הגראנד-קנוני נתון ע"י:

$$PV=-\Omega=\int_0^\infty g(E)\ln\left(1+e^{-\beta(E-\mu)}\right)\frac{dE}{\beta}=\frac{L^2}{\pi\beta(\hbar c)^2}\int_0^\infty E\ln\left(1+e^{-\beta(E-\mu)}\right)dE$$

האנרגיה הממוצעת של המערכת נתונה ע"י:

$$U=\int_0^\infty \frac{E\,g(E)\,dE}{e^{\beta(E-\mu)}+1}=\frac{L^2}{\pi(\hbar c)^2}\int_0^\infty\frac{E^2dE}{e^{\beta(E-\mu)}+1}$$

נבצע אינטגרציה בחלקים לפוטנציאל הגראנד-קנוני:

$$PV=\frac{L^2}{2\pi\beta(\hbar c)^2}\int_0^\infty\frac{E^2\beta e^{-\beta(E-\mu)}}{1+e^{-\beta(E-\mu)}}dE\underset{\substack{\text{מתוך}\\ \text{השוואה עם } U}}{=}\frac{U}{2}$$

סופית קיבלנו $\underline{U=2PV}$

ד) לא. אין זה אפשרי במקרה שלנו. ואמנם בטמפרטורה אפס מתקיים $\mu(T=0)=E_F\neq 0$ ולכן הנחה $\mu=0$ לא קונסיסטנטית עם סטטיסטיקת פרמי-דירק.

1) א) קיימות סה"כ $(N-1)$ זוגות. אם מס' הזוגות עם ספינים הפוכים שווה ל- n, אז מס' הזוגות עם ספינים באותו כיוון שווה ל- $N-1-n$ ולכן:

$$E(n,N)=Jn-J(N-1-n)=J(2n-N+1)$$

ב) ישנם n בלוקים מהצורה $\uparrow\downarrow$ ו- $N-1-n$ בלוקים מהצורה $\uparrow\uparrow$ ואנו צריכים לחבר אותם בכל הצורות האפשריות, רק שנקח:

$$g(n)=\underset{\substack{\text{כי ניתן להפוך את}\\ \text{כל הספינים}}}{2}\,\frac{(N-1)!}{n!\,(N-n-1)!}\Rightarrow S(n,N)=k_B\ln g(n)=k_B\ln\left[\frac{2(N-1)!}{n!\,(N-n-1)!}\right]$$

הוא מס' מצבים עם n נתון

$$F(n,N,T)=E(n,N)-TS(n,N)=J(2n-N+1)-\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{2(N-1)!}{n!\,(N-n-1)!}\right]$$

(ג) מתקיים עבור המערכת כולה:

$$e^{-\beta F(T,N)} = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)\, e^{-\beta E(n,N)} = 2\sum_{n=0}^{N-1} \binom{n}{N-1} e^{-2\beta J n}\, e^{\beta J(N-1)}$$

$$e^{-\beta F(T,N)} = 2\, e^{\beta J(N-1)} \left(1+e^{-2\beta J}\right)^{N-1} = Z$$

$$U = \frac{\partial \beta F}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\cancel{2} J(N-1)\cancel{e^{\beta J(N-1)}}\left(1+e^{-2\beta J}\right)^{\cancel{N-1}} + \cancel{2}(N-1)\cancel{e^{\beta J(N-1)}}\cancel{\left(1+e^{-2\beta J}\right)}^{N-2}\left(-2 e^{-2\beta J}\right)}{\cancel{2}\cancel{e^{\beta J(N-1)}}\left(1+e^{-2\beta J}\right)^{\cancel{N-1}}}$$

$$= \frac{2J(N-1)e^{-2\beta J} - J(N-1)\left(1+e^{-2\beta J}\right)}{\left(1+e^{-2\beta J}\right)} = \frac{J(N-1)\left(e^{-2\beta J}-1\right)}{e^{-2\beta J}+1} = -J(N-1)\tanh(\beta J)$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial U}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dT} = -k_B\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta} = k_B J(N-1)\beta^2 \frac{J}{\cosh^2\beta J} = k_B\left(\frac{\beta J}{\cosh \beta J}\right)^2 (N-1)$$

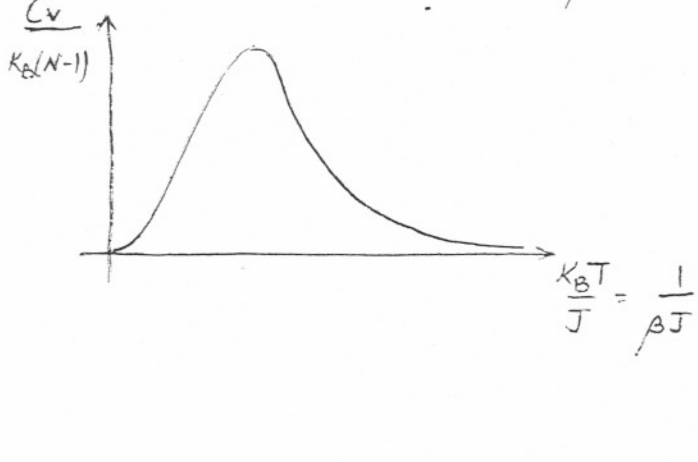
(ד) בגבול של טמפרטורות נמוכות $\beta J \to \infty$ ולכן

$$C_V \simeq k_B(N-1)(\beta J)^2\, 4 e^{-2\beta J}$$

בגבול של טמפרטורות גבוהות $\beta J \to 0$ ולכן

$$C_V \simeq \cancel{4} k_B(N-1)(\beta J)^2$$

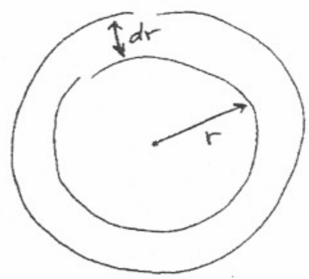
באופן סכמטי הגרף נראה כלהלן.



שאלה 4

נתבונן בשכבה דקה בעלת רדיוסים r ו- $r+dr$, ונסמן ב-ρ את צפיפות המסה,

בש״מ חייב להתקיים:



$$4\pi r^2\left(P(r)-P(r+dr)\right)=G\,\frac{M(r)\cdot dm}{r^2}$$

$dm=4\pi r^2\rho dr$ - מסת השכבה, $P(r)$ - לחץ כפונקציה של מרחק ממרכז הכוכב

$M(r)$ - מסת כדור ברדיוס r.

ניתן לכתוב את המשוואה באופן הבא:

$$P(r)-P(r+dr)=\frac{G\left(\frac{4\pi}{3}r^{3}\rho\right)\rho\, dr}{r^2} \iff \frac{dP}{dr}=-\frac{4\pi G}{3}\rho^2 r$$

מתוך תנאי שפה $P(R)=0$, R - רדיוס הכוכב, נסיק $P(r)=+\frac{4\pi G}{6}\rho^2(R^2-r^2)$

לחץ גז הפרמיונים ב $T=0$ נתון ע״י: $P_F=\frac{1}{5}(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}}$

ולכן במרכז חייב להתקיים:

$$\frac{4\pi G}{6}\rho^2R^2=\frac{1}{5}(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{m m_p^{5/3}}\left(\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\right)^{\frac{5}{3}}$$, m_p - מסת פרוטון

$$\underbrace{\left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho\right)^2}_{M^2}\frac{3}{8\pi}R^{-4}G=\frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\hbar^2}{5mm_p^{5/3}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{5}{3}}}\cdot\frac{M^{\frac{5}{3}}}{R^5}$$

כך שסופית נקבל:

$$R=\frac{C}{M^{1/3}}$$, C - קבוע