77307 מכניקה סטטיסטית

פתרון תרגיל בית 12

(א) תחילה נמצא את $g(E)$:

$$g(E)dE \underset{\text{ספין}}{\overset{\text{מגלל}}{=}} 2\frac{d^dx\,d^dp}{h^d}\Bigg|_{E=pc} = \frac{2V}{h^d}\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}p^{d-1}dp\Bigg|_{E=pc} = \frac{2V}{(hc)^d}\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}E^{d-1}dE$$

כלומר:

$$g(E) = \frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})}E^{d-1}$$

עבור אנרגית פרמי נקבל:

$$N = \int_0^{E_F} g(E)dE = \frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{E_F^d}{d}$$

סופית:

$$E_F = \left(\frac{Nd(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})}{4V\pi^{\frac{d}{2}}}\right)^{1/d}$$

(ב) הפוטנציאל הגראנד-קנוני (עם $\tilde{E} = E-\mu$):

$$\Omega = -\frac{1}{\beta}\int_0^\infty g(E)\ln(1+e^{-\beta\tilde{E}})dE \underset{\text{אינט' בחלקים}}{=} -\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{E^d}{d}\frac{\beta e^{-\beta\tilde{E}}}{1+e^{-\beta\tilde{E}}}dE$$

סופית:

$$-PV = \Omega = -\frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})d}\int_0^\infty\frac{E^d dE}{e^{\beta\tilde{E}}+1}$$

מצד שני:

$$U = \int_0^\infty\frac{Eg(E)dE}{e^{\beta\tilde{E}}+1} = \frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^\infty\frac{E^d dE}{e^{\beta\tilde{E}}+1}$$

מתוך השוואה של שתי התוצאות האחרונות, נקבל:

$$PV = \frac{U}{d}$$

עבור $d=3$ נקבל, כמובן, תוצאה שכבר ראינו.

③ לפי הפיתוח בכיתה נוכל לרשום ($k_B=1$):

$$\Omega=-\frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})d}\left(\int_0^{\mu}f(\epsilon)d\epsilon+2T^2f'(\mu)\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{z\,dz}{e^z+1}}_{\frac{\pi^2}{12}}+\dots\right)\quad,\quad f(\epsilon)=\epsilon^d$$

$$\Rightarrow\ S=-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu}\simeq\frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})d}\,\frac{\pi^2}{3}T\left(d\mu^{d-1}\right)_{\mu=E_F}$$

$$C_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\simeq S\simeq\frac{4V\pi^{\frac{d}{2}+2}}{3(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})}\left(\frac{Nd(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})}{4V\pi^{\frac{d}{2}}}\right)^{\frac{d-1}{d}}T$$

$$C_V\simeq\frac{\pi^2}{3}(Nd)^{\frac{d-1}{d}}\left(\frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{(hc)^d\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{1/d}T$$

② א) בדומה למקרה הקודם:

$$g(E)dE=\frac{2V}{h^d}\,\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}\,p^{d-1}dp\Big|_{p=\sqrt{2mE}}=\frac{4V\pi^{\frac{d}{2}}}{h^d\Gamma(\frac{d}{2})}(2m)^{\frac{d}{2}}E^{\frac{d-1}{2}}\frac{dE}{2E^{1/2}}$$

ולכן:

$$g(E)=\frac{2V(2m\pi)^{d/2}}{h^d\,\Gamma(\frac{d}{2})}E^{\frac{d-2}{2}}$$

עבור אנרגית פרמי נקבל:

$$N=\int_0^{E_F}g(E)dE=\frac{4V(2m\pi)^{d/2}}{h^d\,\Gamma(\frac{d}{2})d}E_F^{\frac{d}{2}}\Rightarrow E_F=\left(\frac{Nh^d\Gamma(\frac{d}{2})d}{4V(2m\pi)^{d/2}}\right)^{\frac{2}{d}}$$

ב) הפוטנציאל הגראנד-קנוני נתון ע"י ($\tilde{E}=E-\mu$)

$$-PV=\underset{\substack{\text{אחרי}\\\text{אינט' בחלקים}}}{\Omega}=-\frac{4V(2m\pi)^{\frac{d}{2}}}{h^d\Gamma(\frac{d}{2})d}\int_0^{\infty}\frac{E^{\frac{d}{2}}dE}{e^{\beta\tilde{E}}+1}$$

מצד שני:

$$U=\int_0^{\infty}\frac{E\,g(E)dE}{e^{\beta\tilde{E}}+1}=\frac{2V(2m\pi)^{d/2}}{h^d\,\Gamma(\frac{d}{2})}\int_0^{\infty}\frac{E^{\frac{d}{2}}dE}{e^{\beta\tilde{E}}+1}$$

מתוך השוואה של שתי התוצאות נסיק:

$$\underline{PV=\frac{2}{d}U}$$

ג) שוב, בדומה למקרה הקודם, נקבל:

$$\Omega = -\frac{4V(2m\pi)^{\frac{d}{2}}}{h^d\Gamma(\frac{d}{2})d}\left(\int_0^{\mu} f(\epsilon)d\epsilon + 2T^2 f'(\mu)\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{z\,dz}{e^z+1}}_{\frac{\pi^2}{12}} + \dots\right), \quad f(\epsilon)=\epsilon^{\frac{d}{2}}$$

$$\Rightarrow S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu} \simeq \frac{\cancel{4}^{\,2}V(2m\pi)^{\frac{d}{2}}}{h^d\Gamma(\frac{d}{2})\cancel{d}}\,\frac{\pi^2}{3}T\left(\frac{\cancel{d}}{\cancel{2}}E_F^{\frac{d-2}{2}}\right)$$

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \simeq S \simeq \frac{\pi^2}{3}\,\frac{2V(2m\pi)^{\frac{d}{2}}}{h^d\Gamma(\frac{d}{2})}\left(\frac{Nh^d\Gamma(\frac{d}{2})d}{4V(2m\pi)^{d/2}}\right)^{\frac{d-2}{d}} T$$

$$C_V = \frac{\pi^2}{6}(Nd)^{\frac{d-2}{d}}\left(\frac{4V(2m\pi)^{d/2}}{h^d\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{\frac{2}{d}} T$$