77307 מס' קורס

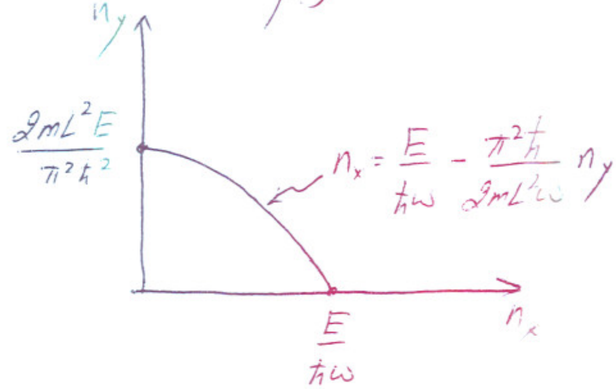
פתרון תרגיל בית מס' 13

1) א) ספקטרום האנרגיות נתון ע"י

$$E_{n_x n_y} = \hbar\omega n_x + \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} n_y^2$$

כי נתון ע"י הבעיה, משתנים להפריד את הבעיה לאוסצילטור הרמוני חד מימדי בכיוון $\hat{x}$ ועבור פוטנציאל בכיוון $\hat{y}$

ב) כרגיל במרחב (n_x, n_y) כל נקודה תופסת שטח יחידה ולכן מס' המצבים בעלי אנרגיה קטנה או שווה ל-E נתון ע"י



$$\Gamma(E) = \int_0^{\frac{2mL^2E}{\pi^2\hbar^2}} \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{\pi^2\hbar}{2mL^2\omega} n_y\right) dn_y$$

$$\Gamma(E) = \frac{2mL^2E^2}{\pi^2\hbar^3\omega} - \frac{\pi^2\hbar}{2mL^2\omega}\,\frac{1}{2}\,\frac{4m^2L^4E^2}{\pi^4\hbar^4} = \frac{mL^2E^2}{\pi^2\hbar^3\omega} \Rightarrow g(E) = \frac{2mL^2}{\pi^2\hbar^3\omega} E$$

ג) כרגיל הפוטנציאל הכימי נתון ע"י:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(E)\,dE}{e^{\beta(E-\mu)}-1} \underset{\beta E = z}{=} \frac{2mL^2}{\pi^2\hbar^3\omega}\frac{1}{\beta^2}\int_0^\infty \frac{z\,dz}{e^{z-\beta\mu}-1}$$

עבור $\beta\mu=0$ האינטגרנד מתנהג כמו 1 ליד האפס $(z=0)$ לכן אין בעיה באינטגרל מתכנס => קיימת התעבות בוזה איינשטיין.

הטמפרטורה הקריטית נתונה ע"י:

$$\beta_c^2 = \frac{2mL^2}{\pi^2\hbar^3\omega N}\int_0^\infty \frac{z\,dz}{e^z-1} = \frac{mL^2}{3\hbar^3\omega N} \Rightarrow T_c = \left(\frac{3\hbar^3\omega N}{mL^2K_B^2}\right)^{1/2}$$

$$\int_0^\infty \frac{z}{e^z-1}dz = \int_0^\infty z\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+1)z}dz \underset{y=nz}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{y}{n}e^{-y}\frac{dy}{n} = \Gamma(2)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

2) א) כפי שראינו בכיתה הטמפרטורה הקריטית נקבעת מתוך זהות.

$$\frac{N}{V}=\frac{(mT_c)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\sqrt{z}\,dz}{e^z-1}\Rightarrow T_c=3.31\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

אינטגרל
לא לחשב כמו
שעשינו בכיתה

ולכן בגבול $m\to 0 \Rightarrow T_c\to\infty$, כלומר בגבול זה כל טמפרטורה היא קריטית $\Rightarrow$ כל החלקיקים נמצאים ברמת היסוד $\Rightarrow$ אין אקסיטציות.

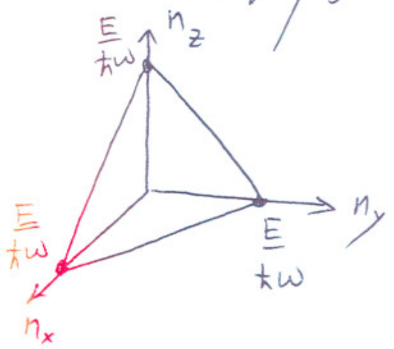
ג) ב) מס' הפוטונים הוא אכן משתנה ולא קבוע ~~[illegible]~~ ושווה $\mu\equiv 0$ לכן אין התלבטות, אלא מס' הפוטונים משתנה עם הטמפרטורה בהתאם. כאמור, מס' הפוטונים אינו אילוץ אלא נקבע מתוך ש"מ תרמודינמי, מכיוון שבתנאים של T ו-V קבועים F חייב לקבל מינימום, ונסיק:

$$0=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}=\mu$$

זה מוכיח את הטענה עבור הפוטנציאל הכימי של פוטונים.

3) אנרגיית החלקיקים נתונה ע"י $E=\hbar\omega(n_x+n_y+n_z)$ (את החלק הקבוע $\frac{3}{2}$- זניח)

א) ולכן מס' המצבים בעלי אנרגיה קטנה או שווה E נתון ע"י:



$$\Gamma(E)=\frac{1}{6}\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^3$$

מס' הנקודות הכלואות בתוך פירמידה במרחב (n_x,n_y,n_z). כאן תרשים

ולכן:

$$g(E)=\frac{d\Gamma}{dE}=\frac{E^2}{2(\hbar\omega)^3}$$

ב) הפוטנציאל הכימי נקבע מתוך אילוץ:

$$N=\int_0^\infty\frac{g(E)dE}{e^{\beta(E-\mu)}-1}=\int_0^\infty\frac{E^2dE}{e^{\beta(E-\mu)}-1}\cdot\frac{1}{2(\hbar\omega)^2}$$

עבור $\mu=0$ האינטגרנד ליד $E=0$ מתנהג באופן הבא:

$$\frac{E^2}{e^{\beta E}-1}\sim\frac{E}{\beta}$$

ולכן האינטגרל באילוץ הינו מתכנס, כך שאין דרך ע"י שינוי ב-μ לשמור על האילוץ $\Rightarrow$ ישנה התעבות בוזה-איינשטיין

ג) עבור טמפרטורת ההתעבות - T_c, $\mu(T_c)=0$ ולכן

$$2(\hbar\omega)^3N=\int_0^\infty\frac{E^2dE}{e^{\frac{E}{k_BT_c}}-1}$$

נבצע החלפת משתנים $\frac{E}{k_BT_c}=x$ ונקבל:

$$2(\hbar\omega)^3N=(k_BT_c)^3\int_0^\infty\frac{x^2dx}{e^x-1}\Rightarrow T_c=\frac{\hbar\omega}{k_B}(2N)^{1/3}\left(\frac{1}{\zeta(3)\Gamma(3)}\right)^{1/3}$$