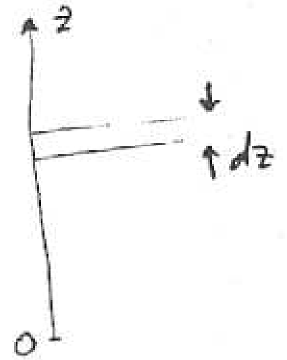
77307 מכניקה סטטיסטית — פתרון גל' תיב 2

① א) נתבונן בשכבה דקה dz הנמצאת בגובה z מסוים



מתנאי שיווי משקל מתקיים

$$P(z)\cdot S - P(z+dz)S - N(z)mg = 0$$

כאשר $N(z)$ - מס' החלקיקים בשכבה dz

ניתן למצוא אותו מתוך משוואה:

$$P\underbrace{Sdz}_{V} = N(z)K_BT \Rightarrow N(z) = \beta PSdz \qquad \beta = \frac{1}{K_BT}$$

נציב ונקבל:

$$P(z)\cancel{S} - P(z+dz)\cdot\cancel{S} - \beta P(z)\cancel{S}mgdz = 0$$

$$\frac{dP}{dz} = -\beta mgP(z) \Rightarrow P(z) = P_0 e^{-\beta mgz}$$

② ב) סמך התפלגות בולצמן:

$$\langle v^2\rangle = AS\,dz\int_0^\infty \underbrace{(4\pi v^2 dv)}_{d\vec{v}}\cdot v^2\cdot e^{-\beta\frac{mv^2}{2}-\beta mgz}$$

לכן מיד ניתן להסיק כי:

$$\langle v^2\rangle \sim e^{-\beta mgz}$$

2

(א) נקבל את קבוע הנרמול שלנו בדרישה $\int f(v)\,d\vec{v} = 1$, (נסמן $\beta = \frac{1}{K_B T}$)

$$1 = A\int_0^\infty e^{-\beta\frac{mv^2}{2}}4\pi v^2\,dv \underset{\alpha := \frac{\beta m}{2}}{=} -4\pi A\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha v^2}dv \underset{v\to\sqrt{\alpha}v}{=} -4\pi A\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2}}{\sqrt{\alpha}}dv$$

$$= 2\pi A\,\alpha^{-\frac{3}{2}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \pi^{3/2}A\alpha^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow A = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2}$$

נסמן: $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ אזי,

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}2\pi r\,dr = \frac{\pi}{2}\left[-e^{-r^2}\frac{1}{2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(ב)

$$\langle v^4\rangle = \int v^4 f(v)\,d\vec{v} = A\int_0^\infty e^{-\alpha v^2}4\pi v^6\,dv = -4\pi A\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\int_0^\infty e^{-\alpha v^2}dv =$$

$$= -4\pi A\frac{d^3}{d\alpha^3}\alpha^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \cancel{2}\pi^{3/2}A\,\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\,\alpha^{-\frac{7}{2}} = \frac{15}{4}\cancel{\pi^{3/2}}\left(\frac{\beta m}{2\cancel{\pi}}\right)^{3/2}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{15}{4}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-2} = 15(\beta m)^{-2}$$

$$\langle v^3\rangle = \int v^3 f(v)\,d\vec{v} = A\int_0^\infty e^{-\alpha v^2}4\pi v^5\,dv \underset{v^2 = x}{=} A\int_0^\infty e^{-\alpha x}4\pi x^2\frac{dx}{2} =$$

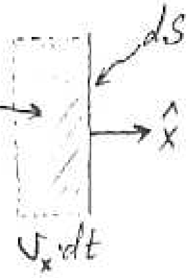
$$= 2\pi A\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = 2\pi A\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\frac{1}{\alpha} = 4\pi A\alpha^{-3} = 4\pi\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^3 =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2}$$

③ כפי שראינו בכיתה:

$$\vec v = \frac{\partial H}{\partial \vec p} = \alpha n |\vec p|^{n-1}\hat p \quad , \quad H=\alpha|\vec p|^n$$

הכוח המופעל על דופן בעל שטח אינפיניטסימלי dS וניצב ל-$\hat x$ נתון ע"י:



$$dF = \frac{N}{V}\underbrace{v_x dS}_{\text{נפח הפוגע ביח' זמן}}\ \underbrace{2p_x}_{\text{שינוי בתנע}}$$

N - מס' כולל של החלקיקים

V - נפח המיכל

נמצע על פני הזמן ונקבל:

$$\text{לחץ}\quad P=\frac{dF}{dS} = \frac{N}{V}2\overline{v_x p_x}\Big|_{v_x>0}$$

בגלל איזוטרופיות $\overline{v_z p_z}=\overline{v_x p_x}=\overline{v_y p_y}$ וכמו כן $\overline{v_x p_x}\Big|_{v_x>0} = \overline{v_x p_x}\Big|_{v_x<0}$

לכן סופית: אנרגיה ממוצעת של המערכת

$$3PV = N\overline{\vec v\cdot\vec p} = N\alpha n\overline{|\vec p|^n} = n\cdot \overline{N\alpha|\vec p|^n} = n\bar U$$

כלומר הראנו שמשוואת המצב נתונה ע"י

$$PV = \frac{n\bar U}{3}$$

...המשך של שאלה 2

④ ההתפלגות של גודל המהירות נתונה ע"י:

$$f(v)=e^{-\alpha v^2}v^2 4\pi$$

יש למצוא את המקסימום של הפונקציה הנ"ל:

$$\frac{df}{dv}=0=\left(2ve^{-\alpha v^2}+v^2(-2\alpha v)e^{-\alpha v^2}\right)4\pi \Leftrightarrow 0=1-\alpha v^2 \Leftrightarrow v=\alpha^{-\frac12}$$

כלומר המהירות הנפוצה ביותר נתונה ע"י:

$$v=\sqrt{\frac{2}{\beta m}}$$

4) נגזור את משוואת המצב לפי T כאשר P קבוע:

$$-2\frac{an^2}{V^3}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P(V-nb)+\left(P+\frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=nR$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{nR}{\left(P+\frac{an^2}{V^2}\right)-\frac{2an^2}{V^3}(V-nb)}\underset{\text{שימוש במשוואת המצב}}{=}\frac{R}{\frac{RT}{V-nb}-\frac{2an(V-nb)}{V^3}}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{RV^3(V-nb)}{RTV^3-2an(V-nb)^2}$$

$$\alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{RV^2(V-nb)}{RTV^3-2an(V-nb)^2}$$

באופן דומה נגזור לפי P כאשר T קבוע ונקבל:

$$\left[1+\frac{an^2}{V^3}(-2)\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\right](V-nb)+\left(P+\frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=-\frac{V^3(V-nb)^2}{nRTV^3-2an^2(V-nb)^2}$$

ולכן:

$$K_T=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=\frac{V^2(V-nb)^2}{nRTV^3-2an^2(V-nb)^2}$$

כלומר:

$$C_P-C_V=TV\frac{\alpha^2}{K_T}=TV\frac{\left[nRV^2\cancel{(V-nb)}\right]^2}{\left(nRTV^3-2an^2(V-nb)^2\right)^2}\cdot\frac{1}{V^2\cancel{(V-nb)^2}}$$

$$=\frac{nR^2TV^3}{RTV^3-2an(V-nb)^2}$$

כך שסה"כ:

$$C_P-C_V=\frac{R}{1-\frac{2an(V-nb)^2}{RTV^3}}$$

עבור גז אידיאלי $a,b=0$ ונקבל את התוצאה הידועה: $C_P-C_V=R$

כלומר במקרה של גז אידיאלי ההפרש הוא קבוע שלא תלוי בגדלים תרמודינמיים, לעומת זאת במקרה של גז ון-דר-ואלס ההפרש הופך להיות פונקציה של טמפרטורה ונפח.

5 (א) נראה שמתקיים:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}f(x)dx=f(0)$$

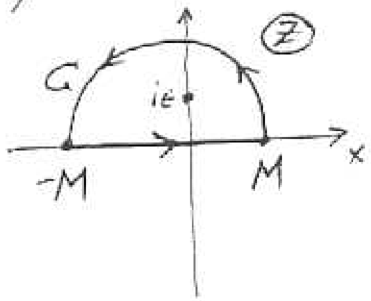
אמנם,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}f(x)dx \underset{\substack{\text{אינט'}\\\text{בחלקים}}}{=} \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)f(x)\right]_{-M}^{M}-\frac{1}{\pi}\int_{-M}^{M}f'(x)\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx$$

$$\xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \frac{f(M)}{2}+\frac{f(-M)}{2}-\frac{1}{\pi}\left[\int_{-M}^{0}f'(x)\left(-\frac{\pi}{2}\right)dx+\int_{0}^{M}f'(x)\frac{\pi}{2}dx\right]=$$

$$=\cancel{\frac{f(M)}{2}}+\cancel{\frac{f(-M)}{2}}-\frac{1}{2}\left[\cancel{f(-M)}-f(0)+\cancel{f(M)}-f(0)\right]=f(0)$$

דרך אחרת לראות את זה היא לפי משפט ה- Residue מתורת הפונקציות הקומפלקסיות, אך דרך זאת פחות נכונה, כי $f(x)$ לאו דווקא אנליטית.



$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\oint_C\frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)}f(x)dx=$$

$$=\frac{2\pi i}{\pi}\left[\frac{\epsilon f(x)}{(x+i\epsilon)}\right]_{x=i\epsilon}=f(i\epsilon)\xrightarrow[\epsilon\to 0]{}f(0)$$

(ב) נוכיח באינדוקציה.

$\underline{n=1}$ $\quad x\delta'(x)=-\delta(x)$

אמנם

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\delta'(x)f(x)dx \underset{\substack{\text{אינט'}\\\text{בחלקים}}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\left[f(x)+xf'(x)\right]dx=-f(0)$$

נניח נכונות עבור $(n-1)$ או n לשם פשטות כלומר

נניח $x\delta^{(n)}(x)=-n\delta^{(n-1)}(x)$ ונוכיח עבור $(n+1)$

מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n+1)}(x)f(x)\,x\,dx \underset{\text{אינט' בחלקים}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(x)\left[f'(x)\,x+f(x)\right]dx =$$

$$\underset{\text{שימוש בהנחת אינדוקציה}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(x)f(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\left[-n\delta^{(n-1)}(x)\right]dx \underset{\text{אינט' בחלקים באינטגרל שני}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(x)f(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty}n\delta^{(n)}(x)f(x)dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}(n+1)\delta^{(n)}(x)f(x)dx$$

כך שהוכחנו $x\delta^{(n+1)}(x)=-(n+1)\delta^{(n)}(x)$ מ.ש.ל.

ב

$$\Delta\frac{e^{ikr}}{r}=\frac{1}{r}\Delta\left(e^{ikr}\right)+e^{ikr}\Delta\frac{1}{r}+2\nabla\frac{1}{r}\cdot\nabla e^{ikr}$$

$$\nabla e^{ikr}=ik\,e^{ikr}\hat{r}\ ;\ \Delta e^{ikr}=-k^2e^{ikr}+\frac{2ik}{r}e^{ikr}$$

$$\left(\Delta+k^2\right)\frac{e^{ikr}}{r}=\left[-\cancel{\frac{k^2}{r}}+\cancel{\frac{2ik}{r^2}}-4\pi\delta(\vec{r})-\cancel{\frac{2ik}{r^2}}+\cancel{\frac{k^2}{r}}\right]e^{ikr}=-4\pi\delta(\vec{r})$$