מכניקה סטטיסטית 77307

פתרון תרגיל בית מס' 3

שאלה 1 כידוע משוואת התנועה של פונקציית הגל נתונה ע"י:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

לכן על פתרון $|\psi(t)\rangle$ כלשהו נוכל לזהות $\hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
כך שאם נפעיל פעמיים נקבל:

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\psi(t)\rangle = \hat{H}^2|\psi(t)\rangle$$

במקרה שלנו $\hat{H} = c\hat{p}$ ונוכל לרשום (בהצגת המקום):

$$-\cancel{\hbar^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -c^2\cancel{\hbar^2}\Delta\psi \quad \left(\hat{p}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\Delta\right)$$

$$c^2\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

קיבלנו משוואת גלים רגילה $\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{c^2\partial t^2} = 0$

למעשה זאת משוואת מכסוול, כאשר ψ מזוהה עם ה-4-פוטנציאל $(\vec{A},\phi)$

כרגיל עבור פונקציה עצמית של ההמילטוניאן ניתן לכתוב $\psi(t,\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(\vec{r})$

כך שנקבל:

$$(1)\quad \Delta\varphi(\vec{r}) + \frac{E^2}{(\hbar c)^2}\varphi = 0$$

$d=1$: $\varphi'' = -k^2\varphi$, $k = \frac{E}{\hbar c}$

החלקיק כלוא בקופסא (ראו ציור), לכן אחרי שימוש בתנאי שפה נוכל לרשום:

$$\varphi(x) = A\sin(k_n x)$$

$$k_n L = n\pi \Rightarrow E_n = \frac{\pi\hbar c}{L}n$$

מדרישת נרמול ניתן לברור את $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$, כך שסופית

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad E_n = \frac{\pi\hbar c}{L}n$$

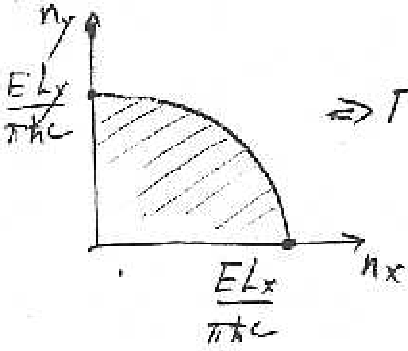
לכן מס' המצבים (קבל):

$$\Gamma(E)=\frac{EL}{\pi\hbar c}\Rightarrow g(E)=\frac{d\Gamma}{dE}=\frac{L}{\pi\hbar c}$$

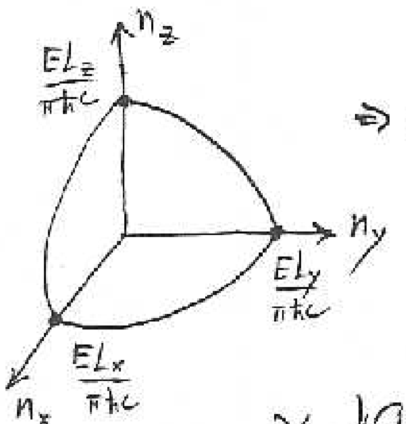
<u>$d=2,3,..$</u>

ההכללה למימדים 3,2 וכו' אינה טריויאלית (הבעיה נפתרת ע"י פתרון של משוואה בשיטת הפרדת המשתנים)

$$E_n^{(d)}=\pi\hbar c\sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{n_i}{L_i}\right)^2}$$



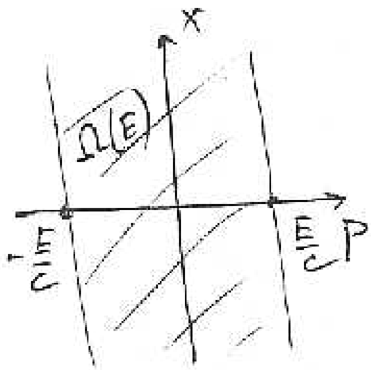
$$\Rightarrow\Gamma(E)=\frac{1}{4}\pi\frac{E^2L_xL_y}{(\pi\hbar c)^2}\Rightarrow g(E)=\frac{\pi EV}{2(\pi\hbar c)^2}$$



$$\Rightarrow\Gamma(E)=\frac{1}{8}\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{E^3L_xL_yL_z}{(\pi\hbar c)^3}\Rightarrow g(E)=\frac{\pi E^2V}{2(\pi\hbar c)^3}$$

<u>הערה:</u> אנו מזניחים את הקיטובים האפשריים של הפוטון, זה שקול להתעלמות מפקטור 2 בתוצאה הסופית.

<u>חישוב קוואזי-קלאסי</u>



<u>$d=1$</u>: מעוניינים בנפח המוגדר ע"י $cp\le E$

נפח זה נתון ע"י: $\Omega(E)=2\frac{E}{c}V$

$$\Gamma(E)=\frac{\Omega(E)}{2\pi\hbar}=\frac{EV}{\pi\hbar c}\Rightarrow g(E)=\frac{V}{\pi\hbar c}$$

<u>$d=2$</u>: מעוניינים בנפח המוגדר ע"י: $p_x^2+p_y^2\le\left(\frac{E}{c}\right)^2$

$$\Gamma(E)=\frac{\Omega(E)}{(2\pi\hbar)^2}=\frac{V\pi\left(\frac{E}{c}\right)^2}{(2\pi\hbar)^2}=\frac{VE^2}{4\pi(\hbar c)^2}\Rightarrow g(E)=\frac{VE}{2\pi(\hbar c)^2}$$

$\underline{d=3}$ מתעניינים בנפח המוגבל ע"י: $p_x^2+p_y^2+p_z^2 \le \left(\frac{E}{c}\right)^2$

$$\Gamma(E)=\frac{\Omega(E)}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{V\frac{4\pi}{3}\left(\frac{E}{c}\right)^3}{(2\pi\hbar)^3}\Rightarrow g(E)=\frac{d\Gamma}{dE}=\frac{VE^2}{2\pi^2(\hbar c)^3}$$

כמובן, התוצאות של שני החישובים מתלכדות.

שאלה 2

<u>חישוב קוואזי-קלאסי</u>

נחשב את נפח מרחב הפאזה הנתון ע"י

$$1\ge\frac{p_x^2+p_y^2}{\left(\sqrt{2m_1E}\right)^2}+\frac{p_z^2}{\left(\sqrt{2m_2E}\right)^2}$$

$$\Omega(E)=V\underbrace{\frac{4\pi}{3}(2m_1E)\sqrt{2m_2E}}_{\text{נפח גוף מימדי}}\Rightarrow\Gamma(E)=\frac{V\frac{4\pi}{3}(2m_1E)\sqrt{2m_2E}}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$g(E)=\frac{d\Gamma}{dE}=\frac{V\sqrt{m_2}\,m_1}{\sqrt{2}\,\pi^2\hbar^3}E^{1/2}$$

<u>חישוב קוונטי</u>

רמות האנרגיה נתונות ע"י: $E_{n_x,n_y,n_z}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2}\left(\frac{n_x^2}{m_1L_x^2}+\frac{n_y^2}{m_1L_y^2}+\frac{n_z^2}{m_2L_z^2}\right)$

הנפח במרחב (n_x,n_y,n_z) המתאים לאנרגיה קטנה או שווה ל-E, נתון ע"י:

$$\Gamma(E)=\underbrace{\frac{1}{8}}_{n_x,n_y,n_z>0}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2E}{\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}m_1\sqrt{m_2}\,\underset{L_xL_yL_z}{\underset{\shortparallel}{V}}$$

$$\Rightarrow g(E)=\frac{d\Gamma}{dE}=\frac{V\sqrt{m_2}\,m_1}{\sqrt{2}\,\pi^2\hbar^3}E^{1/2}$$

מתאים לתוצאה הקודמת.

(3) עבור חלקיק בודד בקופסא האנרגיה נתונה ע"י:

$$E_{\text{חלקיק בודד}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)$$

לכן במקרה שלנו, נקבל:

$$E=\left(\sum_{i=1}^{N_1} n_x^{(i)2}+n_y^{(i)2}+n_z^{(i)2}\right)\frac{\pi^2\hbar^2}{2m_1L^2}+\left(\sum_{j=1}^{N_2} n_x^{(j)2}+n_y^{(j)2}+n_z^{(j)2}\right)\frac{\pi^2\hbar^2}{2m_2L^2}$$

או בקיצור:

$$\underbrace{\alpha^2}_{\text{סימון}}=\frac{2EL^2}{\pi^2\hbar^2}=\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{N_j} n_x^{(i)2}+n_y^{(i)2}+n_z^{(i)2}\right)$$

כלומר יש למצוא את נפח האליפסואיד ב- $3(N_1+N_2)$ מימדים
על מנת לקבל את מספר המצבים באנרגיה קטנה או שווה ל-E.
לשם כך נבצע טרנספורמציה

$$\forall i:\ 1\le i\le N_1 \quad \left(n_x^{(i)}, n_y^{(i)}, n_z^{(i)}\right)\rightarrow\sqrt{\frac{2EL^2m_1}{\pi^2\hbar^2}}\left(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)}\right)$$

$$\forall j:\ 1\le j\le N_2 \quad n_x^{(j)}, n_y^{(j)}, n_z^{(j)}\rightarrow\sqrt{\frac{2EL^2m_2}{\pi^2\hbar^2}}\left(x_2^{(j)}, y_2^{(j)}, z_2^{(j)}\right)$$

בקואורדינטות החדשות האינטגרציה היא על כדור ברדיוס 1 נפחו
נתון ע"י (כפי שחושב בכיתה):

$$\underbrace{V_d}_{\text{נפח כדור}}=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\int_0^1 dr\, r^{d-1}=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)d}$$

במקרה שלנו $d=3(N_1+N_2)$ ולכן סופית נפח האליפסואיד נתון ע"י:

$$\Omega(E)=\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{N_1!N_2!\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)d}\cdot\left(\frac{2EL^2m_1}{\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{3N_1}{2}}\left(\frac{2EL^2m_2}{\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{3N_2}{2}}\cdot\frac{1}{2^d}$$

מספר המצבים [illegible] או שווה ל-E

נפח מרחב המצבים

כאשר הפקטוריאלים $N_1!$ ו- $N_2!$ באים כתוצאה מכך שהחלקיקים זהים. לכן לאחר סידורים בביטויים ניתן לכתוב:

$$g(E)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\frac{d\Omega}{dE}=\frac{V^{N_1+N_2}m_1^{\frac{3N_1}{2}}m_2^{\frac{3N_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3(N_1+N_2)}{2}\right)\left((2\pi)^3\hbar^4\right)^{\frac{3(N_1+N_2)}{2}}N_1!N_2!}E^{\frac{3(N_1+N_2)}{2}-1}$$

שאלה 4

חייב להתקיים $g(x)dx=g(y)dy$

לכן:

$$g(y)=g(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x(y)}$$

$$y=\alpha e^{\beta x^2}\Rightarrow x=\left(-\frac{\ln\frac{y}{\alpha}}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{2\beta y}\left(-\frac{\ln\frac{y}{\alpha}}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

כך שנקבל:

$$g(y)=-\frac{\ln\frac{y}{\alpha}}{\beta}\frac{1}{2\beta y}\left(-\frac{\ln\frac{y}{\alpha}}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\left(-\ln\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\beta^{\frac{3}{2}}y}$$

שאלה 5

(א) עבור חלקיק מסיבי רדיוס הספרה שמגבלה בתוכה את כל המצבים בעלי אנרגיה קטנה או שווה ל-E נתון ע"י $\sqrt{E}$ (מצובר במרחב $(n_x,n_y,n_z,\dots)$)

לכן:

$$\Gamma(E)\propto E^{\frac{d}{2}}\Rightarrow g(E)\propto E^{\frac{d}{2}-1}$$

כך שמשוב דרישה $\frac{d}{2}-1=2$ נקבל $\boxed{d=6}$

(ב) עבור חלקיק חסר מסה רדיוס הספרה פרופורציוני ל- E

כך שנוכל להסיק:

$$\Gamma(E)\propto E^{d}\Rightarrow g(E)\propto E^{d-1}$$

כך שמשוב דרישה: $d-1=2$ נקבל $\boxed{d=3}$

העבודה המבוצעת על הגז $\rightsquigarrow W = -\int_{V_0} P\,dV = \int_{V_0} \frac{P_0 V_0^2}{V^2}\,dV = \left[\frac{P_0 V_0^2}{V}\right]_{V_0}^{2V_0} = \frac{P_0 V_0}{2} - P_0 V_0 = -\frac{P_0 V_0}{2}$ (4)

$\underline{I}$ חוק $\Rightarrow \Delta U = \Delta Q + W \Rightarrow \Delta Q = \Delta U - W$

עבור גז אידיאלי

$$U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3PV}{2} \Leftarrow PV = NkT$$

$$-\Delta U = \frac{3}{2} P_0 V_0 - \frac{3}{\cancel{2}} \frac{P_0}{4} \cancel{2} V_0 \Rightarrow \Delta U = -\frac{3 P_0 V_0}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = -\frac{3 P_0 V_0}{4} + \frac{P_0 V_0}{2} = -\frac{P_0 V_0}{4}$$

לא קשה לקבל שינוי באנטרופיה, אופן:

$$S = C_V \ln T + Nk \ln V + a \Leftarrow dS = \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_A}{T_B} + Nk \ln \frac{V_A}{V_B} = C_V \ln \frac{P_A V_A}{P_B V_B} + Nk \ln \frac{V_A}{V_B} = C_V \ln 2 + Nk \ln \frac{1}{2}$$

$$C_V = \frac{3}{2} Nk$$

$$= (C_V - Nk) \ln 2 = Nk \frac{\ln 2}{2}$$