77307

מס' מקבץ:

מבוא לפיסיקה סטטיסטית

פתרון תרגיל בית 5 ($K_B = 1$)

1) א) שוב התרגיל הוא למעשה קומבינטורי טהור. השאלה היא בכמה אופנים שונים ניתן לסדר $(d-1)$ מחיצות בין n כדורים. מפי זה ניתן ע"י:

$$\text{מס' המצבים המיקרוסקופיים} = \frac{(n+d-1)!}{n!(d-1)!}$$

= ניוון רמה מסוי"מ —

ב) ההמילטוניאן של המערכת נתון ע"י:

$$H=\sum_{i=1}^{d}\frac{P_i^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{d}x_i^2=\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{P_i^2}{2m}+\frac{m\omega^2x_i^2}{2}\right)$$

כלומר ניתן לחשוב על המערכת כאוסף של d אוסצילטורים חד-מימדיים, לכן:

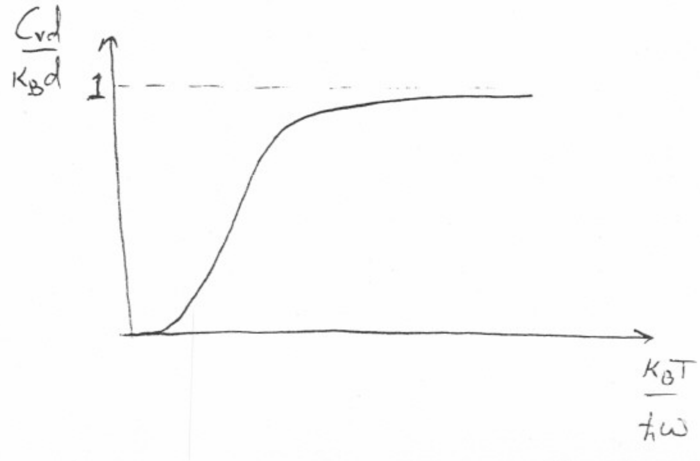
$$Z_d=(Z_1)^d=\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)^{-d} \Rightarrow F_d=\frac{d}{\beta}\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) \Rightarrow U_d=\frac{\partial \beta F_d}{\partial\beta}=\frac{d\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

$$C_{vd}=\frac{\partial U_d}{\partial T}=-\beta^2\frac{\partial U_d}{\partial\beta}=\beta^2\frac{(\hbar\omega)^2 d}{\left(e^{\beta\hbar\omega}-1\right)^2}e^{\beta\hbar\omega}=d\,e^{\beta\hbar\omega}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right)^2$$

ג) טמפרטורה גבוהה $\Leftrightarrow$ $\beta\hbar\omega \ll 1$ $\Rightarrow$ $C_{vd}\simeq d$

טמפרטורה נמוכה $\Leftrightarrow$ $\beta\hbar\omega \gg 1$ $\Rightarrow$ $C_{vd}\simeq d\frac{(\beta\hbar\omega)^2}{e^{\beta\hbar\omega}}$

ד) הציור הסכמטי נתון ע"י:



ה) פונקציית צפיפות המצבים נתונה ע"י

$$g(E) = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}+d-1\right)!}{\frac{E}{\hbar\omega}!\,(d-1)!}$$

$n = \frac{E}{\hbar\omega}$

בנוסף הפרש
בין רמות סמוכות
קבוע ושווה ל- $\hbar\omega$

עבור אנרגיות גבוהות ניתן לרשום (תנאי להצדקת שימוש ב- $g(E)$)

$$g(E) = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}+1\right)\left(\frac{E}{\hbar\omega}+2\right)\cdots\left(\frac{E}{\hbar\omega}+(d-1)\right)}{(d-1)!} \cong \frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{d-1}}{\hbar\omega(d-1)!}$$

טמפרטורות גבוהות <=> אנרגיות גבוהות

ולכן $\frac{E}{\hbar\omega} \gg d-1$

$$Z = \int_0^\infty g(E)\, e^{-\beta E}\, dE = \int_0^\infty \frac{E^{d-1}}{(\hbar\omega)^d (d-1)!} e^{-\beta E}\, dE = \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^d} \frac{1}{(d-1)!} \underbrace{\int_0^\infty x^{d-1} e^{-x}\, dx}_{\Gamma(d)=(d-1)!}$$

$\beta E = x$

ולכן

סופית

$$Z = (\beta\hbar\omega)^{-d} = (Z_1)^d$$

פונקציית החלוקה הקלאסית של 1D אוסצילטור

כמו שמצופה נסיק:

$$U = U_d = \frac{d}{\beta}\ ; \quad C_v = C_v^d = d$$

תוצאות אלה מתקבלות מ- (2) אם $\beta\hbar\omega \ll 1$.

② את האנרגיה של רמות קוונטיות עבור חלקיק בודד ניתן לרשום באופן הבא:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_d^2\right)$$

ולכן:

מספר מצבים עם אנרגיה קטנה מ-E

$$\Gamma(E) = \frac{1}{2^d} \times \underbrace{\text{נפח כדור בעל רדיוס}}_{\left(\frac{2mL^2E}{\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^d}\,\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\left(\frac{2mL^2}{\pi^2\hbar^2}E\right)^{\frac{d}{2}}$$

$$g(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} V}{2^d\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\left(\frac{2m}{\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{d}{2}} E^{\frac{d}{2}-1}, \quad V = L^d$$

נפח ב-d מימדי

אז:

$$Z_1 = \int_0^\infty g(E)\,e^{-\beta E}\,dE = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} V}{2^d\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}\left(\frac{2m}{\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{d}{2}}\frac{1}{\beta^{\frac{d}{2}}}\underbrace{\int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1}e^{-x}\,dx}_{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$

פונקצית חלוקה של חלקיק בודד

וכן סופית:

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!} = \frac{\pi^{\frac{dN}{2}} V^N}{2^{\frac{dN}{2}}\beta^{\frac{dN}{2}} N!}\left(\frac{m}{\pi^2\hbar^2}\right)^{\frac{dN}{2}} = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{\frac{dN}{2}}$$

$$F = -\frac{1}{\beta}\log Z \underset{\text{שימוש בסטירלינג}}{=} -\frac{N}{\beta}\log\left[\frac{V}{N}e\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{\frac{d}{2}}\right]$$

$$U = \frac{\partial \beta F}{\partial \beta} = +N\frac{\partial}{\partial\beta}\log\beta^{\frac{d}{2}} = \frac{Nd}{2}\frac{1}{\beta} \Rightarrow C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{Nd}{2}$$

כמובן חישוב זה תקף בגבול של טמפרטורות גבוהות, כי אחרת אין הצדקה לשימוש בפונקצית צפיפות המצבים, $g(E)$.

③ א

$$\frac{dU}{d\beta} = \frac{-\sum_n (E_n)^2 e^{-\beta E_n} \sum_m e^{-\beta E_m} + \sum_n E_n e^{-\beta E_n} \sum_m E_m e^{-\beta E_m}}{\left(\sum_n e^{-\beta E_n}\right)^2}$$

$$= -\frac{\sum_{n,m} \left(E_n^2 - E_n E_m\right) e^{-\beta(E_n+E_m)}}{\left(\sum_n e^{-\beta E_n}\right)^2} = -\frac{\sum_{n,m} \left(E_n^2 - 2E_n E_m + E_m^2\right) e^{-\beta(E_n+E_m)}}{\left(\sum_n e^{-\beta E_n}\right)^2}$$

$$= -\frac{\sum_{m,n} (E_n - E_m)^2 e^{-\beta(E_n+E_m)}}{\left(\sum_n e^{-\beta E_n}\right)^2} < 0$$

② בסעיף (א) נניח $(*)\ \beta_1 < \beta < \beta_2$

אחרת, לדוגמא, אם $\beta < \beta_1 < \beta_2$, אז לפי (א)

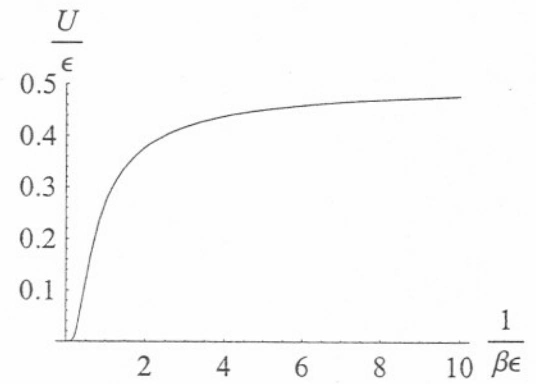
$U_1(\beta) > U_1(\beta_1)$ וגם $U_2(\beta) > U_2(\beta_2)$

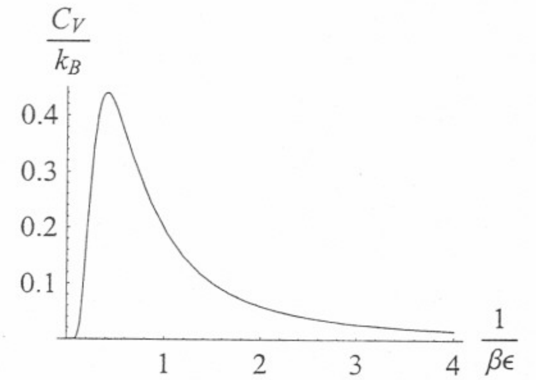
$\Downarrow$

$U_1(\beta) + U_2(\beta) > U_1(\beta_1) + U_2(\beta_2)$ בניגוד להנחה ולכן (*) תקף!

כתוצאה מכך אנרגיה של גוף ראשון יורדת ואנרגיה של גוף שני עולה בהתאם לנדרש.

```
In[97]:= Clear[c, u, x];
         u[x_] := 1/(Exp[1/x] + 1);
         c[x_] := E^(1/x)/((1 + E^(1/x))^2 x^2);
         Plot[u[x], {x, 0.0001, 10},
           PlotRange → {0, 0.5}, AxesLabel → TraditionalForm /@ {1/(βϵ), U/ϵ},
           TextStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 14}];
         Plot[c[x], {x, 0.01, 4}, PlotRange → {0, 0.45},
           AxesLabel → TraditionalForm /@ {1/(βϵ), Cv/kB},
           TextStyle → {FontFamily → "Times", FontSize → 14}];
         FindMaximum[c[x], {x, 0.1}]
```






```
Out[102]=
        {0.439229, {x → 0.416778}}
```

הסבר:

$$u = \frac{U}{\epsilon} = \frac{1}{\cancel{\epsilon}}\,\frac{\cancel{\epsilon}\, e^{-\beta\epsilon}}{1+e^{-\beta\epsilon}} \underset{x=\frac{1}{\beta\epsilon}}{=} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$$

$$c = \frac{C_V}{K_B} = \frac{1}{K_B}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{K_B}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_V \frac{dx}{dT} = \left[\frac{\partial\left(\frac{U}{\epsilon}\right)}{\partial x}\right]_V = \frac{e^{1/x}}{\left(1+e^{1/x}\right)^2 x^2}$$

כפי שניתן לראות קיבול החום מכסימלי עבור טמפרטורה המקיימת:

$$K_B T_{max} \sim \frac{\epsilon}{2}$$