פתרון תרגיל בית 7 (מס' קורס 77307) מכניקה סטטיסטית — חורף תשס"ז

(1) בתרגיל זה נבחר $k_B=1$ ונקבל:

$$F=-T\ln\sum_n e^{-E_n/T}$$

(א) מתקיים

$$\varepsilon_k=cp \qquad ; \quad \sum_n e^{-\frac{E_n}{T}}=\frac{1}{N!}\Big(\underbrace{\sum_k e^{-\frac{\varepsilon_k}{T}}}_{\text{סכום על מצבים של חלקיק בודד}}\Big)^N$$

בקירוב הקוואזי-קלאסי נקבל

$$\sum_k e^{-\frac{\varepsilon_k}{T}}=\int\frac{d^3p\,dV}{(2\pi\hbar)^3}e^{-\frac{cp}{T}}\underset{p\to\frac{Tp}{c}}{=}\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{T}{c}\right)^3\int_0^\infty 4\pi p^2dp\,e^{-p}$$

קירוב סטירלינג

$$\ln N!=N\ln\frac{N}{e}$$

כך שלאחר הצבה נקבל:

$$F=-NT\ln\frac{eV}{N(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{T}{c}\right)^3\int_0^\infty e^{-p}4\pi p^2dp=-NT\ln\frac{AVT^3}{N}$$

כאשר

$$A=\frac{e\int_0^\infty e^{-p}p^2dp}{2\pi^2(\hbar c)^3}$$

(ב) נחשב את האינטגרל הנכנס להגדרת קבוע A:

$$\int_0^\infty e^{-p}p^2dp=\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha p}dp\Big|_{\alpha=1}\underset{p\to\frac{p}{\alpha}}{=}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Big|_{\alpha=1}\int_0^\infty e^{-p'}dp'=\frac{2}{\alpha^3}\Big|_{\alpha=1}\left[-e^{-p'}\right]_0^\infty=2$$

כך שסופית

$$A=\frac{e}{\pi^2(\hbar c)^3}$$

מתקיים:

$$U=\frac{\partial\beta F}{\partial\beta}=\frac{\partial\beta F}{\partial T}\frac{dT}{d\beta}\underset{K_B=1;\ T=\frac{1}{\beta}}{=}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta F}{\partial T}=-T^2\frac{\partial\beta F}{\partial T}$$

$$C_V=\frac{\partial U}{\partial T}=-\frac{\partial}{\partial T}\left(T^2\frac{\partial\beta F}{\partial T}\right)\underset{\beta=\frac{1}{T}}{=}-\frac{\partial}{\partial T}\left(-F+T\frac{\partial F}{\partial T}\right)=\cancel{\frac{\partial F}{\partial T}}-\cancel{\frac{\partial F}{\partial T}}-T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}=-T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

ולכן אם נציב את הביטוי עבור F של הסעיף הקודם נקבל:

$$F=-3NT\ln T-NT\ln\frac{AV}{N}\Rightarrow C_V=3N$$

2 (א) קיימים $2^3=8$ מצבים אפשריים למערכת כזו

$$\underset{1}{\begin{pmatrix} & \uparrow & \\ \uparrow & & \uparrow\end{pmatrix}}\underset{2}{\begin{pmatrix} & \uparrow & \\ \uparrow & & \downarrow\end{pmatrix}}\underset{3}{\begin{pmatrix} & \uparrow & \\ \downarrow & & \downarrow\end{pmatrix}}\underset{4}{\begin{pmatrix} & \uparrow & \\ \downarrow & & \uparrow\end{pmatrix}}\underset{5}{\begin{pmatrix} & \downarrow & \\ \uparrow & & \uparrow\end{pmatrix}}\underset{6}{\begin{pmatrix} & \downarrow & \\ \uparrow & & \downarrow\end{pmatrix}}\underset{7}{\begin{pmatrix} & \downarrow & \\ \downarrow & & \uparrow\end{pmatrix}}\underset{8}{\begin{pmatrix} & \downarrow & \\ \downarrow & & \downarrow\end{pmatrix}}$$

אנרגית כל אחד מהמצבים נתונה ע"י:

$$E_1=-3J;\ E_2=J;\ E_3=J;\ E_4=J;\ E_5=J;\ E_6=J;\ E_7=J;\ E_8=-3J$$

כך שפונקצית החלוקה נתונה ע"י:

$$Z=6e^{-\beta J}+2e^{3\beta J}\Rightarrow F=-\frac{\ln(6e^{-\beta J}+2e^{3\beta J})}{\beta}$$

$$S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V=-K_B\ln Z-\frac{1}{\beta Z K_B}\left(6\frac{J}{T^2}e^{-\beta J}-6\frac{J}{T^2}e^{3\beta J}\right)$$

$$=-K_B\ln Z+\frac{6J}{TZ}\left(e^{3\beta J}-e^{-\beta J}\right)$$

$$C_V=-T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

כאן לא קשה לקבל ביטוי עבור C_V.

(ב) יש להציב בהחלפה $J\rightarrow-|J|$

4 כיוון ש $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ לכן

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_V \frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{K_B T^2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z}\right) = -K_B\beta^2\,\frac{-\sum_n E_n^2 e^{-\beta E_n} Z + \sum_n E_n e^{-\beta E_n}\sum_m E_m e^{-\beta E_m}}{Z^2}$$

$$= +K_B\beta^2\,\frac{\sum_{n,m} E_n^2 e^{-\beta(E_n+E_m)} - \sum_{n,m} E_n E_m e^{-\beta(E_n+E_m)}}{Z^2} = \frac{K_B\beta^2}{Z^2}\sum_{n,m}\left(E_n^2 - E_n E_m\right)e^{-\beta(E_n+E_m)}$$

$$= \frac{K_B\beta^2}{Z^2}\sum_{n,m}\frac{1}{2}\left(E_n^2+E_m^2-2E_nE_m\right)e^{-\beta(E_n+E_m)} = \frac{K_B\beta^2}{2}\,\frac{\sum_{n,m}(E_n-E_m)^2 e^{-\beta(E_n+E_m)}}{Z^2} > 0$$

בגלל סימטריה $m\leftrightarrow n$

האי שוויון האחרון נובע מתוך העובדה שכל המספרים בסכום הינם חיוביים
כמו כן מובן שבגבול $\beta\to\infty$ $C_V\to 0$, כי כל איבר בסכום מתאפס בגבול זה.