מכניקה סטטיסטית

מס' קורס 77307

פתרון תרגיל בית מס' 8

שאלה 1

(א) התפלגות פלאנק נגזרת ע"י (שימו לב $\mu=0$ עבור פוטונים)

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1} \qquad (\text{בחרנו } k_B=1)$$

מס' האופנים עם וקטור גל בתחום $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ נתון ע"י:

$$\frac{V d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk$$

נשתמש ביחס דיספרסיה $\omega = ck$ ונכפיל ב-2 בגלל הקיטוב ונקבל:

$$\text{מס' מצבים באינטרוול } (\omega,\omega+d\omega) = \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

לכן

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}$$

נבצע החלפת משתנים $z=\frac{\hbar\omega}{T}$ ונקבל:

$$N = \frac{VT^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\int_0^\infty \frac{z^2 dz}{e^z-1} \Rightarrow N \propto T^3$$

(ב) באופן כללי:

$$F = G - PV = N\underbrace{\mu}_{\mu=0 \text{ עבור פוטונים}} + \Omega = \Omega$$

אבל:

$$\Omega = T\sum_k \ln\left(1-e^{-\frac{\epsilon_k}{T}}\right) = T\int_0^\infty \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}\ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}\right)$$

לכן:

$$F = \frac{VT^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\int_0^\infty x^2 \ln(1-e^{-x})dx \underset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} -V\frac{T^4}{3\pi^2(\hbar c)^3}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x-1}$$

$x = \frac{\hbar\omega}{T}$

אינטגרלים המופיעים בביטויים שחישבנו ניתנים לחישוב, רק לדוגמא:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$$

לכן:

$$F=-V\,\frac{\pi^2 T^4}{45(\hbar c)^3}=-\frac{4\sigma}{3c}VT^4$$

$$\sigma=\frac{\pi^2}{60\hbar^3c^2}$$

$$S=-\frac{\partial F}{\partial T}=\frac{16\sigma}{3c}VT^3$$

אנרגיה פנימית $\leftarrow$ $E=F+TS=\frac{4\sigma}{c}VT^4=-3F$

שאלה 3 הסטטיסטיקה לא תלויה במימד המרחב, לכן:

$$\bar{n}=\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}$$

לעומת זאת מספר מצבים באינטרוול $(\omega,\omega+d\omega)$ ייראה כלהלן:

שטח העולם בו חיים הפוטונים
+ ישנו רק קיטוב אחד
$\leftarrow$ $\frac{S\,d^2k}{(2\pi)^2}=\frac{S\,2\pi k\,dk}{(2\pi)^2}=\frac{S}{2\pi c^2}\,\omega\,d\omega$

$\omega=ck$

רק ש:

$$d\bar{n}(\omega)=\frac{S}{2\pi c^2}\,\frac{\omega\,d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}$$

ולכן נוסחאת פלאנק תהיה עתה:

אנרגית גוף שחור באינטרוול הנכון $\leftarrow$ $dE_\omega=\frac{S\hbar}{2\pi c^2}\,\frac{\omega^2\,d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}$

(שאלה 4)

משוואת המסטר נתונה (עיין ח-רמה)

$$\forall n \geq 1 \quad \dot{P}(n) = P(n+1)W(n+1\to n) + P(n-1)W(n-1\to n) - P(n)\big(W(n\to n+1) + W(n\to n-1)\big)$$

$$\underline{n=0} \quad \dot{P}(0) = P(1)\,W(1\to 0) - P(0)W(0\to 1)$$

$$W = \begin{cases} 1 & n+1\to n \\ e^{-\beta\hbar\omega} = \alpha & n\to n+1 \end{cases}$$

עבור steady state: $\dot{P}(n)=0$ $\forall n$, ולכן:

$\underline{n=0}$: $P(1) = \alpha P(0)$

$\underline{n=1}$: $0 = P(2) + P(0)\alpha - P(1)(\alpha+1) \Rightarrow P(2) = \alpha P(1) = \alpha^2 P(0)$

$\vdots$

$P(n) = \alpha^n P(0)$

מתנאי דרישת נירמול:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P(0)\alpha^n = P(0)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = P(0) Z_{osc} \Rightarrow P(0) = \frac{1}{Z_{osc}}$$

Z_{osc} - פונקציית החלוקה של אוסצילטור הרמוני

סופית:

$$P(n) = \frac{e^{-\beta\hbar\omega n}}{Z_{osc}}$$

כמובן המצב היציב הוא גם שיווי משקל: נבדוק אם מתקיים איזון $(n \rightleftarrows n+1)$

$$P(n)W(n\to n+1) \overset{?}{=} P(n+1)W(n+1\to n)$$

$$P(n)\alpha \overset{?}{=} P(n+1)$$

אבל $P(n+1) = \alpha^{n+1}P(0) = \alpha\underbrace{(\alpha^n P(0))}_{P(n)} \Rightarrow P(n+1) = \alpha P(n)$ מ.ש.ל.

שאלה 2

(התעצלתי להציב מספרים ולכן בפתרון מופיעים רק ביטויים כלליים בהם יש לבצע הצבות מספריות)

ג + ב + א לפי שאלה ראשונה:

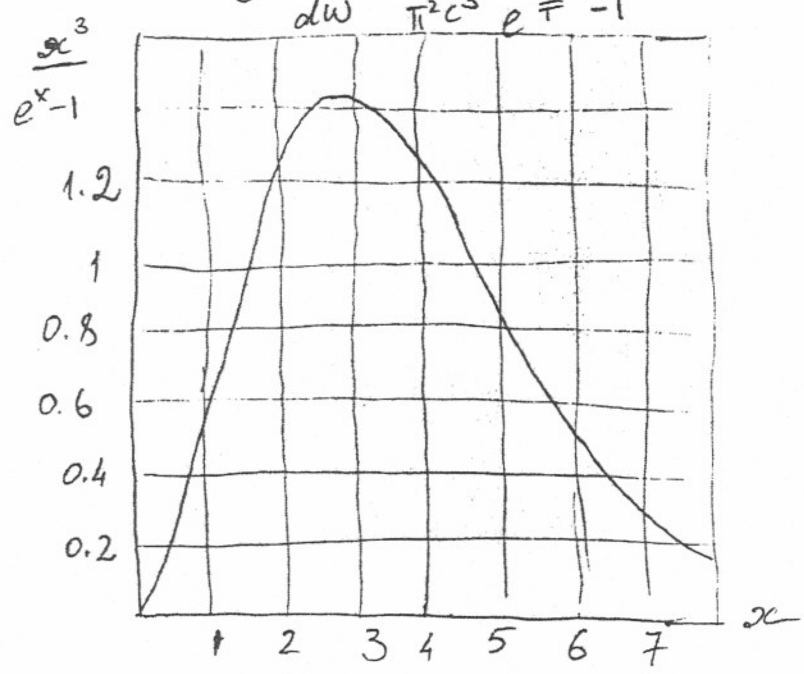
מס' חלקיקים בתחום התדרים $(\omega, \omega+d\omega)$ $\rightarrow$ $$dN_\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\,\frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}$$

$\Downarrow$

אנרגיה בתחום התדרים הנ"ל $\rightarrow$ $$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\,\frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}$$

לכן:

$$0 = \frac{dE_\omega}{d\omega} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\,\frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}$$



מתוך הגרף ניתן לקבל כי התדר המקסימלי מקיים:

$$\frac{\hbar\omega_m}{T} = 2.822$$

אם נתייחס לשמש כאל גוף שחור אז התשובה המבוקשת נתונה ע"י:

$$J = \sigma T^4 \quad \left(\begin{array}{l} T = 6000K \\ \sigma = 5.67\times10^{-5}\frac{gr}{s^3 K^4} \end{array} \right)$$

עוצמת הקרינה הנפלטת מעל יחידת שטח ביחידת זמן

העוצמה הכוללת נתונה ע"י: $I = J\cdot 4\pi R_{\text{שמש}}^2$ $\quad R_{\text{שמש}}$ - רדיוס השמש

על מנת לחשב את טמפרטורת כדה"א יש לפתור

$$T_{\text{כדה"א}} = T_{\text{שמש}}\sqrt[4]{\left(\frac{R_{\text{שמש}}}{d}\right)^2} \Leftarrow \sigma T_{\text{כדה"א}}^4 = \underbrace{\frac{I}{4\pi d^2}}_{\text{שטף קרינת השמש שמגיע לס"מ אחד שלפני כדה"א}}$$

d - מרחק בין השמש לבין כדה"א

$$T_{\text{כדה"א}} = T_{\text{שמש}}\left(\frac{R_{\text{שמש}}}{d}\right)^{1/2}$$

5 (א) אנרגיות עצמיות של המערכת נתונות ע"י: $E_n = -\mu H \sum_i S_i$

כאשר "n" ממיין את המצבים הקוונטיים השונים.

לפי הגדרה מתקיים:

$$\langle M \rangle = \frac{\sum_n M_n e^{-\beta E_n}}{Z} \quad , \quad M_n - \text{מגנטיזציה למצב "n"}$$

מצד שני: $F = -\frac{\ln Z}{\beta}$, לכן:

$$-\frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\frac{\partial Z}{\partial H}}{\beta Z} = \frac{\sum_n -\beta \frac{\partial E_n}{\partial H} e^{-\beta E_n}}{\beta Z} = \frac{\sum_n M_n e^{-\beta E_n}}{Z} = \langle M \rangle$$

מש"ל

(ב) מתוך הגדרה

$$\chi = \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H} = -\frac{\left(\sum_n M_n e^{-\beta E_n}\right)\frac{\partial Z}{\partial H}}{Z^2} + \frac{\sum_n M_n \left(-\beta \frac{\partial E_n}{\partial H}\right) e^{-\beta E_n}}{Z}$$

$$= -\frac{\left(\sum_n M_n e^{-\beta E_n}\right) \sum_m -\beta \frac{\partial E_m}{\partial H} e^{-\beta E_m}}{Z^2} + \frac{\sum_n M_n^2 e^{-\beta E_n}}{Z} \beta$$

$$= \beta \left[\frac{\sum_n M_n^2 e^{-\beta E_n}}{Z} - \frac{\sum_n M_n e^{-\beta E_n}}{Z} \frac{\sum_m M_m e^{-\beta E_m}}{Z} \right]$$

$$= \beta \left[\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \right]$$

6 במקרה הדו-מימדי נקבל בדומה למקרה התלת מימדי

$$U = 2 \int_0^{K_M} \frac{\hbar \omega(k)}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \frac{V d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} \quad , \quad k = \frac{\omega}{c} \quad , \quad c - \text{מהירות הקול}$$

2 — הפעם יש רק שני אופנים אקוסטיים

$$= \frac{V \hbar}{\pi c^2} \int_0^{\omega_M} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \quad , \quad \omega_M = c K_M$$

V - נפח דו-מימדי, למעשה שטח A נתון.

אז K_M ניתן למצוא מתוך הדרישה ~~ספיגה~~ שסה"כ אופני תנודה שווה ל- $2N$

$$2N = \int_0^{K_M} \frac{2V d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} = \int_0^{K_M} \frac{\cancel{2}V}{\cancel{2}\pi} k\,dk \Rightarrow \frac{K_M^2}{2} = \frac{2\pi N}{V}$$

$$K_M = \sqrt{\frac{8\pi V}{2N}} \Rightarrow \omega_M = c\sqrt{4\pi \frac{V}{N}}$$

$$\frac{U}{V} = \frac{\hbar}{\pi c^2} \int_0^{c\sqrt{4\pi \frac{V}{N}}} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \underset{x = \frac{\hbar\omega}{kT}}{=} \frac{\hbar}{\pi c^2} \left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)^3 \int_0^{\frac{\hbar c}{kT}\sqrt{4\pi \frac{V}{N}}} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

ולכן עבור טמפרטורות נמוכות

$$\frac{C_V}{V} = \left(\frac{\partial\left(\frac{U}{V}\right)}{\partial T}\right)_V \sim T^2 \quad \left(\text{לעומת } T^3 \text{ בשלושה מימדים}\right)$$

במודל איינשטיין לעומת זאת נקבל (כל אטום מהווה אוסצילטור הרמוני בעל תדירות ω) ו- ω לפי איינשטיין נקבעת מתוך ניסויים.

$$U = \frac{2N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

נגדיר טמפרטורת איינשטיין $\theta_E = \frac{\hbar\omega}{k}$ ונקבל $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$:

$$C = 2Nk\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{-\frac{\theta_E}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\theta_E}{T}}\right)^2}$$

בשלושה מימדים לפי איינשטיין נקבל פקטור 3 במקום 2.