מס' קורס 77307
מכניקה סטטיסטית

פתרון תרגיל בית מס' 9

שאלה 1

א) מס' החלקיקים N שווה למס' הרמות המאוכלסות בטמפרטורה אפס, לכן:

$$N=\frac{V}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F}p^2dp=\frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3}\Rightarrow p_F=(3\pi^2)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\hbar$$

כאשר p_F תנע מכסימלי של חלקיקים.

$$\text{אנרגית פרמי}\leftarrow E_F=\frac{p_F^2}{2m}=(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

התפלגות פרמי-דיראק נתונה ע"י: $\bar{n}=\frac{1}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}+1}$ בטמפרטורה $T=0$

כל הרמות המקיימות $\mu<\epsilon$ לא מאוכלסות, כי עבורן $e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\xrightarrow[T\to0]{}\infty$

וכל הרמות עם $\mu>\epsilon$ מאוכלסות, כי עבורן $e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}}\xrightarrow[T\to0]{}0$

לכן $\mu=E_F$, כלומר:

$$\mu(T=0)=(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

אנרגיה ממוצעת של המערכת מתקבלת ע"י הכפלה של $\frac{p^2}{2m}$ במס' מצבים בעלי תנע בתחום $(p,p+dp)$ ולכן:

$$\bar{E}=\frac{V}{2m\pi^2\hbar^3}\int_0^{p_F}p^4dp=\frac{Vp_F^5}{10m\pi^2\hbar^3}=\frac{3(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{10}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}N$$

כלומר:

$$\frac{\bar{E}}{N}=\frac{3}{5}E_F=\frac{3}{5}\mu(T=0)$$

ב) באופן דומה לסעיף (א) נקבל:

$$N=2\int_0^{p_F}\frac{d\Omega}{(2\pi\hbar)^2}=\frac{V}{\pi\hbar^2}\int_0^{p_F}p\,dp=\frac{Vp_F^2}{2\pi\hbar^2}\Rightarrow p_F=(2\pi)^{1/2}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{2}}\hbar$$

כאשר V - נפח דו-מימדי או שטח $V=A$

עבור מערכת זאת:

$$E_F = \frac{P_F^2}{2m} = \cancel{2}\pi\left(\frac{N}{V}\right)\hbar^2\cdot\frac{1}{\cancel{2}m} = \frac{\pi\hbar^2}{m}\,\frac{N}{V}$$

כמו כן בדומה למקרה התלת-מימדי:

$$\mu(T=0) = E_F = \frac{\pi\hbar^2}{m}\,\frac{N}{V}$$

בנוסף

$$\bar{E} = \frac{V}{2m\pi\hbar^2}\int_0^{P_F} p^3\,dp = \frac{V P_F^4}{8m\pi\hbar^2} \Rightarrow \bar{E} = \frac{V}{\cancel{8}_{2}\, m\cancel{\pi}\cancel{\hbar^2}}\cdot \cancel{4}\pi^{\cancel{2}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\cancel{2}}\cancel{\hbar^4}_{\hbar^2}$$

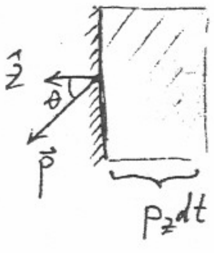
סופית:

$$\frac{\bar{E}}{N} = \frac{\pi}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)\hbar^2 = \frac{E_F}{2} = \frac{\mu(T=0)}{2}$$

שאלה 2

א) על סמך תרגיל קודם $P_F = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}\hbar$

ב) מספר החלקיקים ליח' נפח בעלי תנע בתחום $(p, p+dp)$ היוצרים עם כ"ר $\hat{z}$ (נורמל למשטח) זווית בתחום $(\theta, \theta+d\theta)$ נתון ע"י



$$\underbrace{2}_{\text{בגלל הספין}}\;\frac{2\pi p^2 \sin\theta\, dp\, d\theta}{(2\pi\hbar)^3}$$

לכן מס' החלקיקים הפוגעים ביח' שטח בעלי תנע הנ"ל נתון ע"י:

$$\underbrace{\left(1\cdot\frac{p_z\,dt}{m}\right)}_{\text{אלמנט נפח}} \times \frac{2\pi p^2 \sin\theta\, d\theta\, dp}{(2\pi\hbar)^3}\cdot 2$$

כך שמס' כולל של חלקיקים הפוגעים ביח' שטח ביח' זמן נתון ע"י:

$$\nu = \int_0^{P_F}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\pi p^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, dp}{m(2\pi\hbar)^3} \underset{\substack{\text{לאחר הצבת}\\ \text{ביטוי עבור}\\ P_F}}{=} \frac{3(3\pi^2)^{\frac{1}{3}}}{16}\,\frac{\hbar}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{4}{3}}$$

שאלה 3

עבור מס' מצבים קוונטיים מגע מכסימלי של החלקיקים נקבל בדומה למה שעשינו בשאלה מס' 1

$$N = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \Rightarrow p_F = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \hbar$$

אבל הפעם:

$$E_F = c p_F = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \hbar c \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

אנרגיה כוללת של הגז נקבל ע"י הכפלת את $\epsilon = cp$ במס' מצבים בתחום $((p, p+dp))$

$$E = \frac{cV}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^3 dp = \frac{V c p_F^4}{4\pi^2 \hbar^3} = \frac{3 (3\pi^2)^{\frac{1}{3}}}{4} \hbar c N \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S = \frac{(3\pi^2)^{\frac{1}{3}}}{4} \hbar c \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{E}{3V} \iff E = 3PV$$

שאלה 4

(א) מס' מצבים בתחום $(p, p+dp)$ נתון ע"י ($A = V$ - נפח דו-מימדי)

$$\frac{V 2\pi p\, dp}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{V 2\pi \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{m}{2E}}\, dE}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{V 2\pi m\, dE}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{Vm}{2\pi\hbar^2} dE$$

$$p = \sqrt{2mE} \Rightarrow dp = \sqrt{\frac{m}{2E}}\, dE$$

ולכן מס' ~~מצבים~~ החלקיקים בתחום $(\epsilon, \epsilon+d\epsilon)$ נתון ע"י:

$$dn(\epsilon) = \frac{Vm}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}} - 1} d\epsilon \quad , \quad (\mu < 0 \text{ כמובן})$$

(ב) עבור מס' כולל של חלקיקים מקבלים

$$N = \int dn(\epsilon) = \int_0^\infty \frac{Vm}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{T}} - 1} d\epsilon = \frac{VTm}{2\pi\hbar^2} \ln\left(1 - e^{-\frac{\epsilon-\mu}{T}}\right)\Big|_0^\infty$$

ולכן בהתאם לדיון בכיתה נסיק $\mu \xrightarrow[T\to 0]{} 0$, ואחרת האכלוסים לא יהיו שווים בטמפרטורה אפס, ניתן לראות את זה גם מתוך:

$$\mu = T \ln\left(1 - e^{-\frac{2\pi\hbar^2 N}{mVT}}\right) < 0$$

שאלה 5

א

$$S=\sum_j \ln \frac{G_j^{N_j}}{N_j!} = \sum_j \left(N_j \ln G_j - \ln N_j!\right) = \sum_j N_j \ln \frac{eG_j}{N_j} =$$

$$\ln N_j! \simeq N_j \ln \frac{N_j}{e}$$

$$= \sum_j G_j \bar{n}_j \ln \frac{e}{\bar{n}_j}$$

ב תוך שימוש בכופלי לגרנז' נדרוש את תנאי מכסימליות של אנטרופיה בש"מ:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_j}\left(S+\alpha N+\beta E\right)=0$$

תוך שימוש באילוצים הנתונים וסעיף א, נקבל:

$$G_j\left(-\ln \bar{n}_j + \alpha + \beta E_j\right) = 0 \qquad (\alpha,\beta \text{ - כופלי לגרנז'})$$

ולכן:

$$\bar{n}_j = \exp(\alpha+\beta E_j)$$

זאת התפלגות בולצמן ידועה, כאשר

$$\beta = -\frac{1}{k_B T} \quad ; \quad \alpha = \frac{\mu}{k_B T}$$