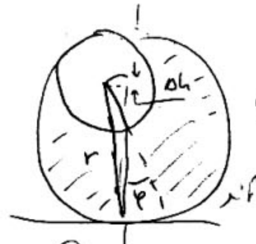
מכניקה ויחסות פרטית - תרגיל 11 - פתרון



1. נחשוב על הגוף כבנוי משני גלילים: גליל אחד עם צפיפות כוללת ρ וגליל שני קטן עם צפיפות שלילית $-\rho$. כשהגוף מתנדנד מרכז המסה של הגליל הקטן עולה ויורד, משום שהצפיפות שלו שלילית הדבר שהוא יורד לעליה האנרגיה הפוטנציאלית בגליל.

נחשב את שינוי הגובה של מרכז המסה של הגליל הקטן Δh כאשר הגוף התגלגל בזווית φ.

$$\Delta h = -\frac{R}{2}\left(1-\cos\varphi\right) \cong -\frac{R}{4}\varphi^2$$

שינוי באנרגיה הפוטנציאלית:

$$\Delta U = +\frac{R}{4} g \underbrace{\rho\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \ell}_{\text{נפח הגליל}} \varphi^2 = \frac{1}{16}\pi\rho g R^3 \ell \varphi^2$$

ℓ - אורך הגליל בכיוון המאונך למישור הציור.

נחשב את האנרגיה הקינטית. היא בנויה מאנרגיות של שני הגלילים. לגליל הקטן אנרגיה קינטית שלילית.

אנרגיה קינטית של הגוף $E_k = \frac{I\dot\varphi^2}{2}$. שני הגלילים מסתובבים סביב נקודת המגע עם הקרקע. לגליל הגדול לפי משפט שטיינר מקבלים את מומנט ההתמד:

$$I_1 = \frac{1}{2}\rho\cdot\pi R^2\ell\cdot R^2 + \rho\cdot\pi R^2\ell\cdot R^2 = \frac{3}{2}\pi\rho R^4\ell$$

$$E_{k_1} = \frac{3}{4}\pi\rho R^4\ell$$

לגליל הקטן:

$$I_2 = -\frac{1}{2}\rho\cdot\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\ell\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \pi\rho\left(\frac{R}{2}\right)^2\ell\, r^2$$

כאן r^2 - לפי הציור, משפט הקוסינוסים נותן:

$$r^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2R\frac{R}{2}\cos(\pi-\varphi) = R^2 + \frac{R^2}{4} + R^2\cos\varphi = R^2\left(\frac{5}{4}+\cos\varphi\right) \cong$$
$$\cong R^2\left(\frac{5}{4} + 1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \simeq R^2\left(\frac{9}{4} - \frac{\varphi^2}{2}\right)$$

$$I_2 = -\frac{1}{32}\rho\pi R^4\ell - \frac{1}{4}\pi\rho R^2\ell\left(\frac{9}{4} - \frac{\varphi^2}{2}\right) =$$
$$= -\frac{19}{32}\pi\rho R^4\ell + \frac{\pi}{8}\rho R^4\ell\varphi^2$$

$$E_{k_2} = -\frac{19}{64}\pi\rho R^4\ell\dot\varphi^2 + \frac{\pi}{16}\rho R^4\ell\dot\varphi^2\varphi^2$$

האיבר השני כאן זניח ביחס לראשון:

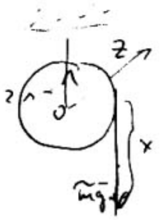
$$E_{k_2} \cong -\frac{19}{64}\pi\rho R^4\ell\dot\varphi^2$$

בסה"כ מקבלים:

$$E_k = \frac{3}{4}\pi\rho R^4\ell\dot\varphi^2 - \frac{19}{64}\pi\rho R^4\ell\dot\varphi^2 = \frac{29}{64}\pi\rho\ell R^4$$

ריבוע של תדירות התנודה ניתן כמנה של המקדמים ב-ΔU וב-E_k:

$$\omega^2 = \frac{\pi\rho g R^3\ell/16}{29\pi\rho\ell R^4/64} = \frac{4}{29}\frac{g}{R}\ ;\ \omega = 2\sqrt{\frac{g}{29R}}$$



2. כדי לפתור את השאלה נחשב את התנע הזוויתי של המערכת, נגזור אותו לפי הזמן ונשווה למומנט הכוח החיצוני. את ראשית הצירים נבחר במרכז הגליל. על המערכת פועלים שני כוחות: כוח הכבידה וכוח התגובה בציר הסיבוב. סכום הכוחות הפועלים על הגליל מתאפס כי הוא יכול רק להסתובב.

בחירת הראשית ב-O מאפסת את המומנט של כוח התגובה שלא ידוע. סכום המומנטים של כוחות הכבידה הפועלים על הנקודות של הגליל מצטמצמים מהסימטריה. ההנחה שמרכז המסה של החלק המלופף של החבל נמצא ב-O אומרת כי החלק הזה גם סימטרי ולכן סכום המומנטים של כוחות הכבידה הפועלים על z גם מתאפס. לכן המומנט היחיד שגורם לשינוי התנע הזוויתי הוא מומנט כוח הכבידה הפועל על החלק התלוי של החבל. נסמן את המומנט הזה ב-$\vec{N}$. ההטלה שלו על z:

$$N_z = R\tilde{m}g = R\frac{x}{e}mg$$

כאן $\tilde{m}$ - מסת החלק התלוי, R - רדיוס הצילינדר וזרוע של הכוח.
התנע הזוויתי מורכב ~~מ...~~ משלושה רכיבים, $\vec{L}_1$ - התנע הזוויתי של הגליל, $\vec{L}_2$ - התנע הזוויתי של החלק המלופף של החבל, $\vec{L}_3$ - התנע הזוויתי של החלק התלוי של החבל, נחשב את ההטלות שלהם על ציר z.

$$L_{1z} = I_{cyl}\,\omega = \frac{MR^2}{2}\omega$$

$$L_{2z} = R(m-\tilde{m})V$$

$$L_{3z} = R\tilde{m}V$$

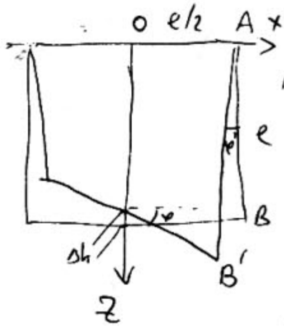
כאן כמו קודם $\tilde{m}$ - מסת החלק התלוי, V - מהירות החבל: $V=\omega R$. רואים כי

$$L_{2z}+L_{3z} = R^2\omega m$$

$$L_z = \frac{MR^2}{2}\omega + R^2 m\omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = R^2\left(\frac{M}{2}+m\right)\dot{\omega} = R\frac{x}{e}mg$$

$$\dot{\omega} = \frac{Rxmg/e}{R^2\left(\frac{M}{2}+m\right)} = \frac{2mgx}{Re(M+2m)}$$



3. לפי הציור נגדיר את הנקודות: A - נק' החיבור של אחד מהמוטות לתקרה, B - נק' חיבור המוטות במנוחה, B' - נק' חיבור המוטות שכאשר התחתון מסובב ב- φ. נגדיר גם Δh - גובה בו עולה המוט התחתון כשהוא מסובב ב- φ, φ' - זווית בין המוט הצדדי לבין מצב המנוחה שלו (לפי הציור), נבחר מערכת צירים, x בכיוון המוט התחתון במנוחה, y - מאונך לו על התקרה, z - למטה. את ראשית הצירים נבחר בין נק' החיבור של 2 המוטות לתקרה.

קואורדינטות של A, B ו- B':

$$A:\left(\frac{l}{2},0,0\right);\quad B:\left(\frac{l}{2},0,l\right);\quad B':\left(\frac{l}{2}\cos\varphi,\frac{l}{2}\sin\varphi,l-\Delta h\right)$$

אורכי המוטות קבועים, לכן $|AB|=|AB'|$, $|AB|^2=|AB'|^2 \Leftarrow$

$$l^2=\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cos\varphi\right)^2+\frac{l^2}{4}\sin^2\varphi+(l-\Delta h)^2$$

$$l^2=\frac{l^2}{4}(1-\cos\varphi)^2+\frac{l^2}{4}\sin^2\varphi+(l-\Delta h)^2$$

בזוית קטנות $\cos\varphi\approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$; Δh^2 זניח ביחס לאחרים, $\sin\varphi\approx\varphi$

$$l^2=\cancelto{0}{\frac{l^2}{4}\varphi^4}+\frac{l^2}{4}\varphi^2+l^2-2l\Delta h \Rightarrow \Delta h=\frac{l}{8}\varphi^2$$

נחשב את φ':

$$\cos\varphi'=\frac{l-\Delta l}{l}\cong\frac{l-\frac{l}{8}\varphi^2}{l}=1-\frac{\varphi'^2}{2};\quad 1-\frac{\varphi'^2}{2}\approx 1-\frac{\varphi^2}{8}\Rightarrow\varphi'=\frac{\varphi}{2}$$

כש המוטות יוצאים ממצב שיווי המשקל במסתובבים עד לזווית φ ו- φ' בהתאם מרכז המסה שלהם עולה ולכן הם מקבלים אנרגיה פוטנציאלית. המוט התחתון מקבל אנרגיה:

$$U_1=mg\Delta h=mg\frac{l}{8}\varphi^2$$

המוטות הצדדיים מקבלים ביחד את האנרגיה

$$U_2=2mg\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cos\varphi'\right)=\frac{l}{2}\cdot 2mg\frac{\varphi'^2}{2}=mg\frac{l}{8}\varphi^2$$

בסה"כ האנרגיה הפוטנציאלית

$$U=mgl\frac{\varphi^2}{4}$$

אנרגיה קינטית מורכבת משתי תרומות: האנרגיה E_{k_1} של המוט התחתון ואנרגיה E_{k_2} של 2 המוטות הצדדיים. כדי לחשב את האנרגיות האלה נזכור כי מומנט ההתמד של המוט שמסתובב סביב המרכז שווה ל $I_1=\frac{ml^2}{12}$ ושל המוט שמסתובב סביב הקצה $I_2=\frac{ml^2}{3}$.

$$E_{k_1}=\frac{I_1\dot\varphi^2}{2}+\frac{m\dot h^2}{2}=\frac{ml^2\dot\varphi^2}{24}+\frac{ml^2}{128}\cdot 4\varphi^2\dot\varphi^2\approx\frac{ml^2\dot\varphi^2}{24}$$

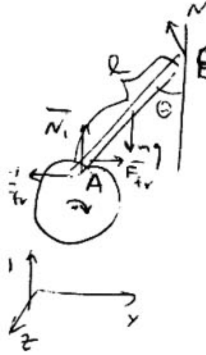
התרומה של $\dot h^2$ זניחה כי היא כוללת $\dot\varphi^2 \gg \varphi^2\dot\varphi^2$.

$$E_{k_2}=2\frac{I_2\dot\varphi'^2}{2}=\frac{ml^2}{3}\frac{\dot\varphi^2}{4}=\frac{ml^2\dot\varphi^2}{12}$$

$$E_k=\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{12}\right)ml^2\dot\varphi^2=\frac{ml^2\dot\varphi^2}{8}$$

ריבוע של תדירות התנודות ניתן ע"י מנת המקדמים ב- U וב- E_k

$$\omega^2=\frac{2g}{l}$$



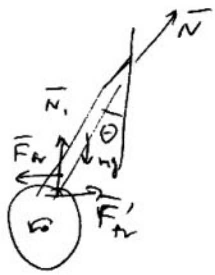
ד. נתבונן בסיבוב בכיוון השעון. בתנאי השאלה המוט AB נמצא במנוחה
תוך כדי התנועה של הדיסק. מצד הדיסק פועלים עליו כוחות $\bar{N}_1$ (תגובה)
ו-$\bar{F}_{fr}$ (חיכוך). על הדיסק מצד המוט פועל כוח $\bar{F}'_{fr}$ (חיכוך) כך
ש- $\bar{F}'_{fr}=-\bar{F}_{fr}$. (וגם לחץ כלפי מטה שלא מסומן בציור), בנק' B
על המוט פועל כוח תגובה N. תנאי הסטטיקה עבור המוט אומרים
ששקול הכוחות צריך להתאפס יחד עם שקול המומנטים.
תנאי הכוחות יאפשר לחשב את $\bar{N}$ - דבר שלא מעניין אותנו.
נשתמש בתנאי המומנטים ונבחר B להיות הראשית.

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta + F_{fr}\,l\cos\theta = N_1 l\sin\theta$$

$$F_{fr}=\mu N_1$$

$$\frac{l}{2}mg\sin\theta + F_{fr}\,l\cos\theta = \frac{F_{fr}}{\mu}\,l\sin\theta$$

$$F_{fr}=\frac{mg}{2\left[\frac{1}{\mu}-\operatorname{ctg}\theta\right]}$$



נתבונן בסיבוב בכיוון ההפוך. עכשיו הכיוונים של $\bar{F}_{fr}$ ו- $\bar{F}'_{fr}$ מתהפכים.

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = N_1 l\sin\theta + F_{fr}\,l\cos\theta$$

$$F_{fr}=\mu N_1$$

$$\frac{l}{2}mg\sin\theta = \frac{F_{fr}}{\mu}\,l\sin\theta + F_{fr}\,l\cos\theta$$

$$F_{fr}=\frac{mg}{2\left[\frac{1}{\mu}+\operatorname{ctg}\theta\right]}$$

עכשיו נשווה בין שני המקרים. משוואת התנועה של הגלגל:

$$I\dot{\omega}=FR \Rightarrow \omega=\omega_0-\frac{FR}{I}t$$

כאן F - כוח קבוע שפועל בקצה הרדיוס. זמן עד העצירה:

$$T=\frac{\omega_0 I}{FR}$$

זווית מלאה: $\varphi=\omega_0 T-\frac{FRT^2}{2I}=\frac{\omega_0^2 I}{2FR}$

זוויות בשני המקרים:

$$\frac{\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)}}=\frac{F^{(2)}}{F^{(1)}}=\frac{\frac{1}{\mu}-\operatorname{ctg}\theta}{\frac{1}{\mu}+\operatorname{ctg}\theta}=\frac{\operatorname{tg}\theta-\mu}{\operatorname{tg}\theta+\mu}$$

5. תנ"ז עצמי של המקל אחרי הפגיעה ניתן ע"י $\hat{L} = px$ כאשר p - תנע שמועבר לו.

$$\tilde{L} = \frac{m\ell^2}{12}\dot{\varphi}$$

במערכת מרכז המסה קצוות המקל אחרי הפגיעה נעים במהירויות

$$\tilde{v}_A = \frac{\ell}{2}\dot{\varphi} = \frac{6\tilde{L}}{m\ell}; \quad \tilde{v}_B = -\frac{\ell}{2}\dot{\varphi} = -\frac{6\tilde{L}}{m\ell}$$

במערכת המעבדה המהירות

$$v_A = v_0 + \frac{6\tilde{L}}{m\ell}; \quad v_B = v_0 - \frac{6\tilde{L}}{m\ell},$$

v_0 - מהירות מרכז המסה.

$$v_A + v_B = 2v_0; \quad v_A - v_B = \frac{12\tilde{L}}{m\ell}$$

$$x = \frac{\tilde{L}}{mv_0} = \frac{\ell}{6}\,\frac{v_A - v_B}{v_A + v_B}$$

התוצאה אינה תלויה בסוג ההתנגשות.

6. תאוצת קוריאוליס ~~[illegible]~~ לא נלקחה בחשבון, לפי תנאי השאלה. אנחנו קודם עוברים למערכת היחוס שמסתובבת סביב A במהירות זוויתית $\bar{\omega}$ ואח"כ מהמערכת הזאת עוברים למערכת ~~[illegible]~~ שמסתובבת בה במהירות זוויתית $-\bar{\omega}$. במעבר הראשון התאוצה הכוללת במערכת מסתובבת

$$\bar{a}' = -\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) - 2\bar{\omega}\times\bar{v}'$$

כאן $\bar{v}'$ - מהירות הגוף במערכת מסתובבת. קל להבין שבתוצאה $\bar{a}' = -\omega^2\bar{r}$ - לכיוון המרכז כמו שזה צריך להיות (כי במערכת הזאת הגוף נע בעיגול)

במעבר השני

$$\bar{a}'' = (-\bar{\omega})\times\left[(-\bar{\omega})\times\bar{r}\right] - 2(\bar{\omega})\times\bar{v}'' + \bar{a}'$$

$\bar{v}''$ - מהירות הגוף במערכת הקבועה; $\bar{v}'' = 0$. לכן $\bar{a}'' = a' - \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$

$\bar{a}'' = 0$.