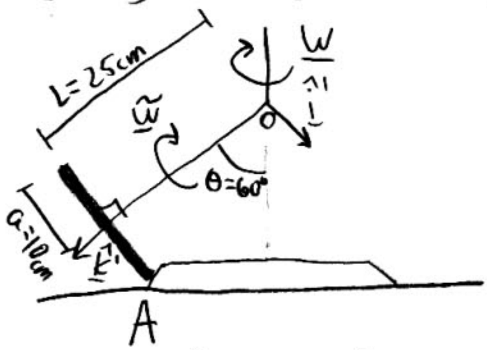
פתרון תרגיל 12 מכניקה ויחסות פרטית (ד)

(1)



א) נצמיד למערכת ז' המסתובבת עם $\underline{\omega}$ הציר הניצב למשטח.

$\hat{i}'$ מקביל לדיסקה (כמתואר בציור)

$\hat{j}'$ מקביל לדיסקה ולשולחן (יוצא מהדף)

$\hat{k}'$ ניצב לדיסקה (כמתואר בציור)

כלומר מרכז המסה של הדיסקה נייח במערכת ז' אבל הדיסקה מסתובבת בתדירות:

$$\underline{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega}\hat{k}'$$

בנוסף ציר הסיבוב $\underline{\omega}$ במערכת ז' מתואר ע"י

$$\underline{\omega} = \omega\sin\theta\,\hat{i}' + \omega\cos\theta\,\hat{k}'$$

לכן סה"כ הסיבוב הכולל של הדיסקה הינו

$$\underline{\omega}_o = \underline{\tilde{\omega}} + \underline{\omega} = \underbrace{\omega\sin\theta}_{\omega_{ox}}\hat{i}' + \underbrace{(\omega\cos\theta + \tilde{\omega})}_{\omega_{oz}}\hat{k}'$$

שימו לב זהו הסיבוב של הדיסקה ביחס למערכת אינרציאלית ולא כפי שרואה צופה במערכת ז'.

כמו כן אי ההחלקה בנקודה A (נקודת המגע)
אומרת שמהירות יחידת מסה בנקודת המגע מתאפסת
כלומר:

$$0 = \underline{w}_0 \times \underline{r}_A = (w_{0x}\hat{\underline{i}}' + w_{0z}\hat{\underline{k}}') \times (a\hat{\underline{i}}' + L\hat{\underline{k}}') =$$

$$= (w_{0z}a - w_{0x}L)\hat{\underline{j}}'$$

כלומר

$$w_{0z} = \frac{w_{0x}L}{a} = \frac{w\sin\theta L}{a}$$

ולכן

$$\underline{w}_0 = \frac{w\sin\theta}{a}(a\hat{\underline{i}}' + L\hat{\underline{k}}')$$

כעת נחשב את התנ"ז של הדיסקה סביב הקודקוד O
נשים לב כי $\hat{\underline{k}}'$ ציר ראשי של הדיסקה
וכן $\hat{\underline{i}}'$ מאונך לציר ראשי של הדיסקה לכן
אין איברים מעורבים בטנזור מומנט ההתמד.
כלומר

$$\underline{L}_0 = I_{xx}w_{0x}\hat{\underline{i}}' + I_{zz}w_{0z}\hat{\underline{k}}' =$$

$$= \frac{w\sin\theta}{a}(I_{xx}a\hat{\underline{i}}' + I_{zz}L\hat{\underline{k}}')$$

3 שיקול המומנטים סביב הקוטב. O

$$\underline{N}=\frac{d\underline{L}_0}{dt}=\underbrace{\left.\frac{d\underline{L}_0}{dt}\right|_{S' \text{ במערכת}}}_{0}+\underline{\omega}\times\underline{L}_0=$$

שכן $\underline{L}_0$ קבוע במערכת S'

$$=\omega\left(\sin\theta\,\underline{\hat{i}}'+\cos\theta\,\underline{\hat{k}}'\right)\times\frac{\omega\sin\theta}{a}\left(I_{xx}a\,\underline{\hat{i}}'+I_{zz}L\,\underline{\hat{k}}'\right)=$$

$$=\frac{\omega^2\sin\theta}{a}\left(I_{xx}a\cos\theta-I_{zz}L\sin\theta\right)\underline{\hat{j}}'$$

הרגע בו הדיסקה מתנתקת זהו הרגע בו הכוח
היחיד המפעיל מומנט ביחס לנקודה O הוא משקל הדיסקה

$$\underline{N}=\underline{R}_{cm}\times m\underline{g}=L\underline{\hat{k}}'\times mg\left(\sin\theta\,\underline{\hat{i}}'+\cos\theta\,\underline{\hat{k}}'\right)=$$

$$=mgL\sin\theta\,\underline{\hat{j}}'$$

מהשוואת המומנטים מקבלים:

$$\frac{\omega^2\cancel{\sin\theta}}{a}\left(I_{xx}a\cos\theta-I_{zz}L\sin\theta\right)=mgL\cancel{\sin\theta}$$

נזכור כי:

$$I_{xx}=\frac{1}{4}ma^2+mL^2$$

$$I_{zz}=\frac{1}{2}ma^2 \qquad \cos\theta=\frac{1}{2} \quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4

כלומר:

$$w = \left(\frac{mgLa}{I_{xx} a\cos\theta - I_{zz} L\sin\theta}\right)^{1/2} \doteq 10.63 \frac{rad}{sec}$$

ב) במקרה זה

$$\underline{w}_0 = \underline{w}$$

כלומר

$$\underline{L}_0 = w\sin\theta I_{xx} \underline{\hat{i}}' + w\cos\theta I_{zz} \underline{\hat{k}}'$$

וכן

$$\underline{N} = \underline{w} \times \underline{L}_0 = \left(w\sin\theta \underline{\hat{i}}' + w\cos\theta \underline{\hat{k}}'\right) \times \left(w\sin\theta I_{xx} \underline{\hat{i}}' + w\cos\theta I_{zz} \underline{\hat{k}}'\right)$$

$$= w^2 \cos\theta \sin\theta \left(I_{xx} - I_{zz}\right) \underline{\hat{j}}'$$

מצד שני:

$$N = mgL\sin\theta \underline{\hat{j}}'$$

לכן

$$w^2 \cos\theta \cancel{\sin\theta} (I_{xx} - I_{zz}) = mgL\cancel{\sin\theta}$$

$$w = \left(\frac{mgL}{\cos\theta (I_{xx} - I_{zz})}\right)^{1/2} \doteq 9.04 \frac{rad}{sec}$$

(5)

2) א) נסמן

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta z = z_2 - z_1$$
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t)$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right)$$

$$\Delta S'^2 = \gamma^2(\Delta x - \beta c \Delta t)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\gamma^2\left(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x\right)^2 =$$

$$= \gamma^2\Delta x^2 - \cancel{2\gamma^2\beta c \Delta x \Delta t} + \gamma^2\beta^2 c^2 \Delta t^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\gamma^2\Delta t^2 +$$

$$+ \cancel{2\gamma^2\beta c \Delta x \Delta t} - \gamma^2\beta^2\Delta x^2 =$$

$$= \Delta x^2 \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1} + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1} = \Delta S^2$$

ג) עבור חלקיקים הנעים במהירות C

$$c = \frac{\Delta r}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \underline{r}^2 - c^2\Delta t^2 = 0$$

(6)

ג) במערכת S :

$$c^2 > V^2 = \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$$

כלומר

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 < 0$$

ובפרט במערכת S' הנעה במהירות u ביחס לS

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2 < 0$$

ולכן

$$\Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2 < 0$$

ולכן

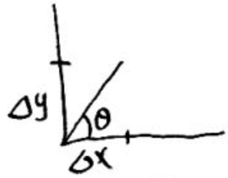
$$(V')^2 = \left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)^2 < c^2$$

ד) במעבדה המהירות היחסית בניהם היא $1.8c$
אבל בעיני אחד החלקיקים המהירות היחסית קטנה מc
(לפי סעיף (ג) הנ"ל) ונקבל (ע"י טרנספורמצית מהירויות)

$$V' = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + \frac{0.9c \cdot 0.9c}{c^2}} = \frac{1.8}{1+0.81} c \cong 0.9945c < c$$

3)

א) במערכת המנוחה של המקל



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\theta$$

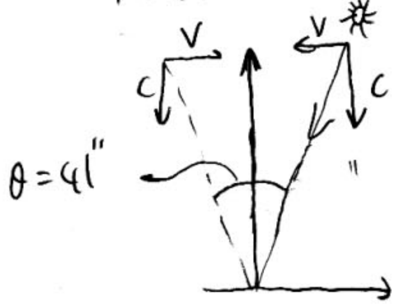
במערכת הנעה במהירות v ביחס למערכת המנוחה

$$tg\theta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x/\gamma} = \gamma\, tg\theta$$

כלומר

$$\theta' = tg^{-1}(\gamma\, tg\theta)$$

ב) ע"פ תרגול הת"ס של האור כמו אל גשם נופל
ומכאן מהוספה של מהירות
כדור הארץ יש זווית הפגיעה



כלומר המהירות היחסית בין האור לכדור הארץ מורכבת ממהירות האור בכיוון האנכי ומהירות כדור הארץ בכיוון אופקי. ומאחר וכדור הארץ מתקדם מסלול סגור אז יש להתחשב במהירות משני הכיוונים:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{V}{C}$$

(8)

ומקירוב זוויות קטנות

$$\frac{\theta}{2} \cong \frac{V}{c}$$

$$c = \frac{2V}{\theta} = \frac{2 \cdot 30\ km/sec}{41 / \frac{180}{\pi} \cdot 3600} \cong 302{,}000\ km/sec.$$

ג) בראדלי כמובן לא היה זר לתורת היחסות
אבל נראה שיצא לו קירוב למהירויות נמוכות
מסדר $\frac{V}{c}$.

במקרה שלנו ללא תנועת כדור הארץ

$$V_x' = 0 \quad V_z' = c$$

ולכן

$$tg\frac{\theta'}{2} = \frac{V_x'}{V_z'} = 0 \Rightarrow \theta' = 0$$

מתוספת תנועת כדור הארץ במהירות V

$$V_x = \frac{V_x' + V}{1 + \frac{VV_x'}{c^2}} = V$$

$$V_z = \frac{1}{\gamma}\frac{V_z'}{1 + \frac{VV_x}{c^2}} = c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

לכן

$$tg\frac{\theta}{2} = \frac{V_x}{V_z} = \frac{V}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \cong \frac{V}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{V}{c} + \frac{1}{2}\frac{V^3}{c^3}$$

לכן מתקבל קירוב לסדר שלו.

4)

א) באופן נאיבי

$$X = C\cdot 1_{nsec} = \frac{3}{10}m$$

ג) ההסבר לכך שהוא מוצא חלקיקים במרחק הרבה יותר גדול נובע מכך שזמן החיים של החלקיק שנמדד ממערכת המעבדה ארוך יותר.

ד)

$$X = V\Delta t' = V\tau\gamma = \tau\frac{V}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{C}\right)^2}}$$

כלומר

$$V = \frac{X/\tau}{\sqrt{1+\left(\frac{X}{C\tau}\right)^2}} = C\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{C\tau}{X}\right)^2}} \cong C\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{C\tau}{X}\right)^2+\cdots\right)$$

$$= C\left(1-4.5\cdot 10^{-10}\right) \cong C$$