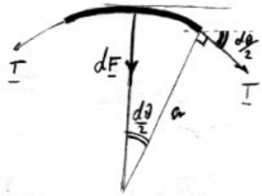
פתרון תרגיל 4 - מכניקה ויחסות פרטית

1. א. נסתכל על אלמנט קטן בגודל $d\theta$. כח המתיחות T פועל משני צידי האלמנט בכיוון משיק למעגל. הכח השקול $d\underline{F}$ הוא:



$d\underline{F} = -T\sin\frac{d\theta}{2}\cdot 2\hat{r} \approx -T\,d\theta\,\hat{r}$. כח זה צריך כמובן להיות הכח הצנטריפטלי, כלומר, $d\underline{F} = -dm\,\omega^2 a\hat{r}$, ו-$dm$ מסת האלמנט, היא $dm = \frac{d\theta}{2\pi}m$. מכאן:

$$T = \frac{m\omega^2}{2\pi}a.$$

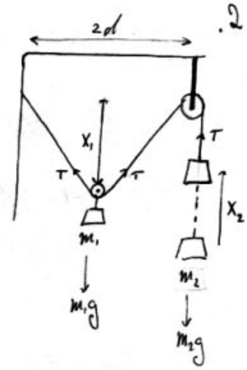
ב. הקפיץ נמתח בשיעור $2\pi(r-a)$ ולכן צריך להתקיים $T = k\cdot 2\pi(r-a)$.

T נתון בסעיף א: $\frac{m\omega^2 r}{2\pi} = k\cdot 2\pi(r-a)$, ומכאן:

$$r = \frac{a}{1 - \frac{m\omega^2}{4\pi^2 k}}.$$

שימו לב ש-r מתבדר כאשר $\omega^2 \to \frac{4\pi^2 k}{m}$.

2.

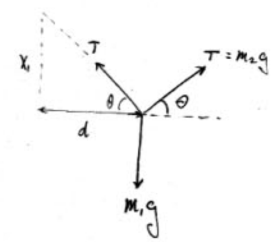


א. הכח שמפעיל החוט על m_1, הוא לכל היותר $2T$: $F < 2T$,

ומשום ש $T = m_2 g$ מתקיים $m_1 g < 2m_2 g \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} < 2$

ב. נסמן ב-θ את הזוית בין החוט לציר x. מתקיים ש:

$$2m_2 g\sin\theta = m_1 g \Rightarrow \sin\theta = \frac{m_1}{2m_2}$$



$$\frac{X_1}{d} = \tan\theta \Rightarrow X_1 = d\tan\theta = d\tan\left(\sin^{-1}\frac{m_1}{2m_2}\right)$$

הערה: $\tan(\sin^{-1}\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \Rightarrow X_1 = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{2m_2}{m_1}\right)^2 - 1}}$

ג. הקשר בין x_1 ל-x_2 ע"י אורך החוט: $x_2 = 2\sqrt{x_1^2+d^2} - 2d$

האנרגיה הפוטנציאלית יחסית לנק' שיווי המשקל היא $U = m_2 g x_2 - m_1 g x_1$.

נביע את U דרך x_1 בלבד:

$$U = g\left[2m_2\sqrt{x_1^2+d^2} - 2m_2 d - m_1 g x_1\right]$$

נגזור את U:

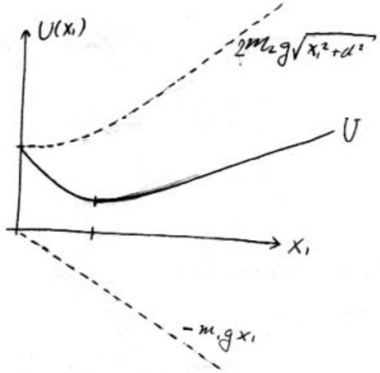
$$\frac{dU}{dx_1} = g\left[2m_2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+d^2}} - m_1\right] = 0$$

ונפתור:

$$x_1 = \frac{m_1}{2m_2}\sqrt{x_1^2+d^2}$$

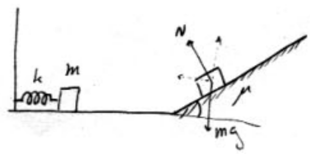
נק' שיווי המשקל:

$$x_1 = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{2m_2}{m_1}\right)^2 - 1}}$$



3. האנרגיה הפוטנציאלית ההתחלתית בקפיץ: $U = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$.

אנרגיה זו מומרת לאנרגיה קינטית. $U = \frac{1}{2}mv^2$.



כעת הגוף מגיע עם מהירות v למישור המשופע. הכח הנורמלי הוא $N = mg\cos\alpha$

מכאן שכח החיכוך שפועל f הוא $f = \mu mg\cos\alpha$. העבודה שנעשה זה

מבצע לאורך מרחק l היא $W = -f\cdot l$, והאנרגיה הפוטנציאלית שנדרשת

כדי לעבור מרחק l בשיפוע α היא $\Delta U = mgl\sin\alpha$. מכאן, לפי שימור

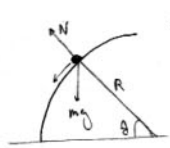
האנרגיה נקבל: $E_f - E_{in} = mgl\sin\alpha - \frac{1}{2}mv^2 = W = -\mu mgl\cos\alpha$

$$l = \frac{\frac{1}{2}v^2}{g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha}$$

מקרי קצה: $\mu = 0 \Leftarrow mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2$ (רק אנרגיה פוטנציאלית)

$\alpha = 0 \Leftarrow \mu mgl = \frac{1}{2}mv^2$ (רק עבודה)

4. מחוק שמור האנרגיה,



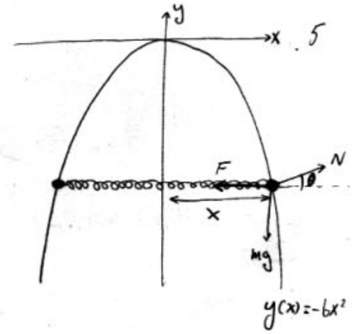
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR - mgR\sin\theta .$$

משו' הכוחות בכיוון הרדיאלי:

$$N - mg\sin\theta = -\frac{mv^2}{R} = -2mg(1-\sin\theta)$$

החלקיק יעזוב את המסלה כש $N=0$, כלומר: $N = mg\sin\theta - 2mg(1-\sin\theta) = 0 \Rightarrow \underline{\sin\theta = \frac{2}{3}}$

5. א. הכח שמפעיל הקפיץ: $F = k(2x-l)$.



זווית הכח הנורמלי N יחסית לציר x: $\cot\theta = -y'(x) = 2bx$

משו' הכוחות:

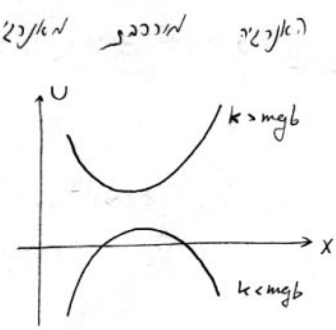
$$\begin{cases} F = N\cos\theta & (\text{כיוון } x) \\ mg = N\sin\theta & (\text{כיוון } y) \end{cases}$$

נחלק המשוואות זו בזו, נקבל $\frac{F}{mg} = \cot\theta$, ומהצבה $\frac{k(2x-l)}{mg} = 2bx$.

נפתור עבור x: $X = \frac{l/2}{1-\frac{mgb}{k}}$ בשיווי משקל.

ב. האנרגיה מורכבת מאנרגיית הקפיץ + האנרגיה הפוטנציאלית של המסות בשדה הכבידה:

$$U = \frac{1}{2}k(2x-l)^2 + 2mgy = \frac{1}{2}k(2x-l)^2 - 2mgbx^2$$



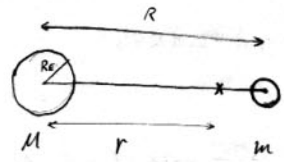
פונקציה זו היא פרבולה, כאשר המקדם של x^2 הוא $2k-2mgb$. אם מקדם זה חיובי יש נק' מינימום.

ג. נגזור את U:

$$\frac{dU}{dx} = 2k(2x-l) - 4mgbx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k(2x-l)}{mg} = 2bx$$

קיבלנו את אותה משו' כמו בא', ולכן גם אותו פתרון.



$.(M-m)r^2-2MRr+MR^2=0$ כלומר, $G\frac{M}{r^2}=G\frac{m}{(R-r)^2}$ נק' שוויון הכוחות מקיימת

הפתרון:

$$r=\frac{2MR\pm\sqrt{(2MR)^2-4(M-m)MR^2}}{2(M-m)}=R\frac{M\pm\sqrt{Mm}}{M-m}=R\sqrt{M}\frac{\sqrt{M}\pm\sqrt{m}}{(\sqrt{M}+\sqrt{m})(\sqrt{M}-\sqrt{m})}=\frac{R\sqrt{M}}{\sqrt{M}\mp\sqrt{m}}$$

כמובן שסימן הפלוס הוא הפיזיקלי, כי $R>r$.

כעת נחשב את האנרגיה הדרושה להגיע ל-r ל[illegible] שמסתה היא μ:

$$\frac{1}{2}\mu v^2=U(r)-U(R_E)=-G\frac{M\mu}{r}-G\frac{m\mu}{R-r}+G\frac{M\mu}{R_E}$$

שימו לב שהזנחנו את $\frac{Gm\mu}{R-R_E}$, השפעת הירח על הגוף בכדור הארץ, מכיוון שזה קטן.

$$\frac{1}{2}\mu v^2=G\mu\left[\frac{M}{R_E}-M\frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{R\sqrt{M}}-m\frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}}{R\sqrt{m}}\right]$$

$$=G\mu\left[\frac{M}{R_E}-\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{R}\right]$$

נציב מספרים:

$$v^2=2\cdot G\left[\frac{M}{R_E}-\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{R}\right]\approx 2\cdot 6.7\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}\left[\frac{6\cdot 10^{24}kg}{6.4\cdot 10^6 m}-\frac{\left(\sqrt{6\cdot 10^{24}kg}+\sqrt{7\cdot 10^{22}kg}\right)^2}{3.8\cdot 10^8 m}\right]$$

$$=1.34\cdot 10^{-10}\left[9.4\cdot 10^{17}-1.9\cdot 10^{16}\right]\frac{m^2}{s^2}\Rightarrow v\approx 11.1\ \frac{km}{s}$$