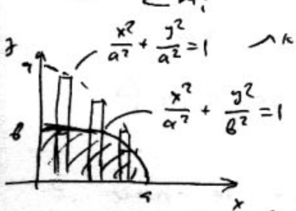
מכניקה ויחסות פרטית - תרגיל 5 - פתרון

1. א) נסמן ב-ρ את צפיפות המסה. וקטור המיקום של מרכז המסה: $\bar{R}_c = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}$



התחום שו אנחנו מעוניינים מצויר בציור משמאל. כדי לחשב את המונה של הנוסחה הנ"ל נוח לחשוב בצורה הבאה. שפה של התחום מתקבלת מהשפה של המעגל $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ע"י הכפלה של y ב-$\frac{b}{a}$. לכן, אם נחשוב על התחום כמורכב ממלבנים (כמו בציור) גובה של כל מלבן בתחום שלנו מתקבל מגובה של המלבן המתאים לו במעגל ע"י הכפלה ב-$\frac{b}{a}$, אותו דבר גם השטח של המלבן, וגם המסה שלו. אחרי הסכימה של כל המלבנים נקבל גם שהמסה מתקבלת מהמסה של התחום המעגלי ע"י הכפלה ב-$\frac{b}{a}$, מסה של התחום המעגלי היא $\frac{1}{4}\pi a^2\rho$ (רבע המעגל). לכן המסה של התחום שלנו $M = \frac{1}{4}\pi ab\rho$.

חישוב ישיר אפשר לעשות בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$M = \rho\int_0^a \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\,dx = \rho b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \underbrace{\rho b\, x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\Big|_0^a}_{0} + \frac{\rho b}{a^2}\int_0^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} =$$

$$= -\rho b\int_0^a \frac{1-\frac{x^2}{a^2}-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\,dx = \underbrace{-\rho b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx}_{M} + \rho b\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

$$2M = \rho b\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \rho b\cdot a\int_0^a \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-x^2/a^2}} = \rho b a \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = \frac{\rho a b\pi}{2}$$

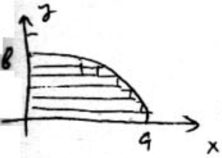
$$M = \frac{\pi ab\rho}{4}$$

מונה של הנוסחה ניתן ע"י אינטגרל שמחשב בקוא' למשל, קואורדינטה x:

$$\left(\sum m_i \bar{r}_i\right)_x = \sum m_i x_i = \rho\int_0^a x\sqrt{b(1-x^2/a^2)}\,dx = \frac{b\rho}{2}\int_0^a \sqrt{1-x^2/a^2}\,dx^2 \Rightarrow$$

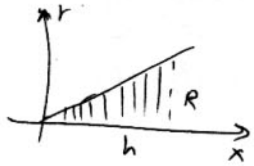
$$\Rightarrow \left(\int \sqrt{1-\frac{z}{c}}\,dz = -\frac{2c}{3}\left(1-\frac{z}{c}\right)^{3/2}\right) \Rightarrow \frac{b\rho}{2}\left[-\frac{2a^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}\right]\Bigg|_0^a = \frac{ba^2\rho}{3}$$

$$X_c = \frac{a^2b\rho}{3}\Big/\frac{\pi ab\rho}{4} = \frac{4a}{3\pi}$$



כדי לחשב את הקואורדינטה y צריך לעשות חלוקה הפוכה!

$$\sum m_i y_i \qquad \rho\int_0^b y\sqrt{a\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dy = \frac{ab^2\rho}{3}; \quad Y_c = \frac{4b}{3\pi}$$



ב) נבחר את מערכת הצירים כך שציר x יהיה הציר של החרוט.
רדיוס של המעגל בחתך החרוט כפונקציה של x הוא

$$r(x)=\frac{R}{h}x$$

(רואים כי ב-$x=0$ $r=0$ וב-$x=h$ $r=R$). שטח המעגל $S(x)=\pi r^2(x)$, ומסת המעגל שנמצאת ב-x ועובי dx היא
$dm=\frac{\pi\rho R^2}{h^2}x^2dx$, ρ - צפיפות המסה.

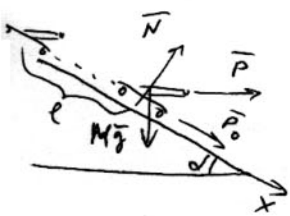
המסה הכוללת של החרוט היא

$$M=\int_0^h\frac{\pi\rho R^2}{h^2}x^2dx=\frac{\pi\rho R^2}{h^2}\frac{h^3}{3}=\frac{\pi\rho R^2h}{3}$$

(רואים כאן את הנוסחה הידועה לנפח החרוט: $V=\frac{M}{\rho}=\frac{\pi R^2h}{3}$)

מסימטריה מרכז המסה נמצא על הציר של החרוט; קואורדינטת x שלו היא

$$X_c=\frac{1}{M}\int_0^h x\,dm=\frac{1}{M}\int_0^h\frac{\pi\rho R^2}{h^2}x^3dx=\frac{1}{M}\frac{\pi\rho R^2}{h^2}\frac{h^4}{4}=\frac{3\pi\rho R^2h^2}{4\rho\pi R^2h}=\frac{3h}{4}$$



2. מהירות התותח ברגע הירייה היא

$$V=\sqrt{2gl\sin\alpha}$$

והתנע $P_0=M\sqrt{2gl\sin\alpha}$.

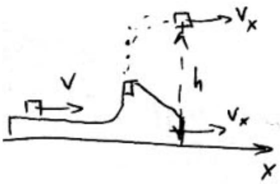
במשך הירייה שינוי התנע של המערכת תותח + כדור הוא

$$\Delta\bar P=\bar P-\bar P_0$$

והוא ניתן ע"י המתקף $\bar F T=(\bar N+M\bar g)T$, T - זמן הירייה. בהטלה על ציר x מקבלים

$$P\cos\alpha-M\sqrt{2gl\sin\alpha}=Mg\sin\alpha\cdot T$$

$$T=\frac{P\cos\alpha-M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{Mg\sin\alpha}$$



3. במערכת משמרים אנרגיה והטלת התנע על ציר x. צורת הגוף הגדול קובעת שכאשר הגוף הקטן נמצא באוויר לשני הגופים אותה מהירות בציר x, נסמן אותה ב-V_x.

שימור תנע: $mV=(m+M)V_x$

שימור אנרגיה: $\frac{m}{2}V^2=mgh+\frac{mV_x^2}{2}+\frac{MV_x^2}{2}$.

$$V_x=\frac{m}{m+M}V$$

$$\frac{m}{2}V^2=mgh+\frac{m+M}{2}\frac{m^2}{(m+M)^2}V^2=mgh+\frac{m}{2(m+M)}V^2$$

$$h=\frac{1}{2g}\frac{M}{m+M}$$

4. נוח לפתור קודם את סעיף ב' ואח"כ סעיף א'. תנאי שהדלי נמצא במנוחה: אומר ש- $m(t)g = \mu(t)V$, כאשר $m(t)$ - מסת הדלי יחד עם דלק בזמן t, $\mu(t)$ - קצב פליטת הגזים בזמן t.

$$m(t)g = \mu(t)V \qquad (*)$$

מצד שני, $m(t) = m_0 - \int_0^t \mu(t)\,dt$ — מסה של הדלי בזמן t שווה למסה המקורית פחות כל המסה שנפלטה.

$$m'(t) = -\mu(t)\,dt. \qquad (**)$$

נגזור את (*) לפי הזמן ונציב (**).

$$-\mu(t)g = \mu'(t)V$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{g}{V}dt$$

$$,\ \mu = \mu_0 e^{-\frac{g}{V}t}$$

μ_0 - קצב הפליטה בזמן 0. בזמן 0 $\mu_0 = m_0 \frac{g}{V} \Leftarrow m_0 g = \mu_0 V$

$$\mu(t) = m_0 \frac{g}{V} e^{-\frac{g}{V}t}$$

מסה שנפלטה מ-0 עד t היא

$$\Delta m = \int_0^t \mu(t)\,dt = m_0 \frac{g}{V} \int_0^t e^{-\frac{g}{V}t} = -m_0 e^{-gt/V}\Big|_0^t = m_0\left(1 - e^{-gt/V}\right)$$

מסה בזמן t היא $m(t) = m_0 - \Delta m = m_0 e^{-gt/V}$.

נסמן ב-M את המסה של דלי ריק $m_0 = M(1+\eta)$. משך זמן T שהדלי יכול להישאר במנוחה נקבע ע"י

$$M = M(1+\eta)e^{-gT/V};\quad T = \frac{V}{g}\ln(1+\eta)$$

5. נניח שבזמן dt נשפכת מסת החול dm מהמיכל לעגלה. מתקף הכוח Fdt הולך לשינוי התנע של העגלה $m(t)dV$ ($m(t)$ - מסה של העגלה יחד עם החול שהצטבר עד אז) ולהאצה של החול שנשפך במשך dt עד למהירות של העגלה V: Vdm

$$Fdt = m(t)dV + Vdm = d(mV)$$

$$mV = Ft$$

מסת העגלה ב-t היא $m_0 + \mu t$.

$$(m_0 + \mu t)V = Ft \Rightarrow V = \frac{Ft}{m_0 + \mu t} \Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = \frac{Fm_0}{(m_0 + \mu t)^2}$$