פיתרון מכניקה ויחסות פרטית תרגיל 6

1) א) ממצב שיווי משקל נקבל את משוואות הכוחות בכיוון הרדיאלי:

$$Mg = \frac{mv_0^2}{r_0}$$

כלומר

$$r_0 = \frac{mv_0^2}{Mg}$$

ב) בנקודת שיווי המשקל החדשה תתקבל באופן דומה:

$$(*)\quad F+Mg = \frac{mv_1^2}{r_1}$$

(v_1 - המהירות המשיקית ברדיוס r_1)

כמו כן משימור תנ"ז (המתיחות בחוט מהווה כוח מרכזי)

$$l = r_1 m v_1 = r_0 m v_0$$

כלומר

$$v_1 = \frac{r_0 v_0}{r_1} = \frac{mv_0^2}{Mg}\cdot\frac{v_0}{r_1} = \frac{m}{M}\frac{v_0^3}{g r_1}$$

נציב ב- * ונקבל

$$F+Mg = \frac{m}{r_1}\left(\frac{mv_0^3}{Mg r_1}\right)^2 = \left(\frac{mv_0^2}{r_1}\right)^3 (Mg)^{-2}$$

$$r_1 = \frac{mv_0^2}{\left((Mg)^2(F+Mg)\right)^{1/3}} \underset{F=7Mg}{=} \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{Mg} = \frac{1}{2}r_0$$

$$W = F\Delta r = F mv_0^2\left(\frac{1}{Mg} - \frac{1}{2Mg}\right) = \frac{7}{2}mv_0^2$$

ג) שימו לב שכאשר הכוח F הופסק לגוף 4 היתה עוד תנועה גם בכיוון הרדיאלי!!

$$E = K + U$$

$$K = \frac{1}{2}m\dot{r}_m^2 + \frac{1}{2}M\dot{r}_M^2 = \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$

למסה M אין תנ"ז והמהירות הרדיאלית של m זהה למהירות בציר y של M שכן יש מיתר אורך קבוע.

$$U = Mgh = Mgr + \underbrace{Const}_{0}$$

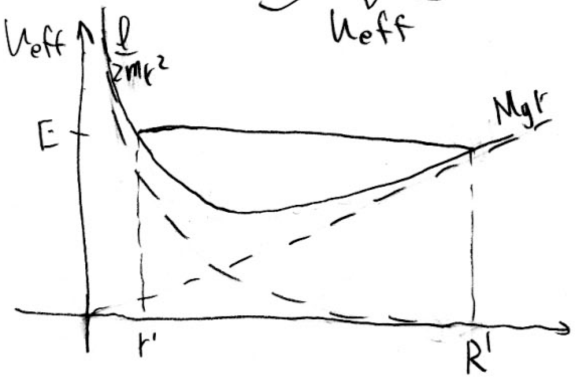
קבוע לנקודת ייחוס שנקבע אותו כאפס

$$h = r + C$$

קבוע כלשהו.

לכן

$$E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + Mgr}_{U_{eff}}$$



③

ב) נחפש מינימום ל- U_{eff}

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{\ell^2}{mr^3} + Mg = 0$$

$$r_{min}^3 = \frac{\ell^2}{mMg} = \frac{m^2 r_0^2 V_0^2}{mMg} = r_0^2\,\frac{mV_0^2}{Mg} = r_0^3$$

קיבלנו את אותו הרדיוס $\leftarrow r_{min} = r_0$
שהתקבל מהתנועה המעגלית!

שימו לב כי מנקודה $r = r_0$

$$E = \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr_0^2} + Mgr_0}$$

זוהי האנרגיה שהייתה למערכת - $E_0 = \frac{3}{2}mV_0^2$
לפני הפעלת הכוח

כלומר $E - E_0 = W = F\Delta r$

ולכן

$$W = \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2$$

$$\dot{r} = \left(\frac{2W}{m+M}\right)^{1/2} = \left(\frac{7mV_0^2}{m+M}\right)^{1/2} = \left(\frac{7m}{m+M}\right)^{1/2} V_0$$

ה) הרדיוסים המקסימלי והמינימלי מתקבלים מנקודה בה $\dot{r} = 0$
ולכן מקיימים את המשוואה

$$E = U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + Mgr$$

זוהי משוואה קובית (r^3) ולכן ננסה לקרב את R'
ע"י הזנחת האנרגיה הסיבובית שם.

④

$$E \cong MgR' \qquad \left(E = W + E_0 = 5mV_0^2\right)$$

$$R' \cong \frac{E}{Mg} = \frac{5mV_0^2}{Mg} = 5r_0$$

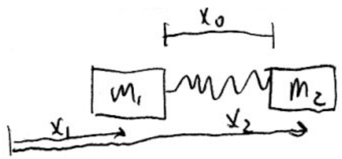
נבחן משגיאה ב- R' ע"י הבדיקה "בכמה השתנתה
האנרגיה מכך ש- R' לא מדויק?"

השגיאה באנרגיה כמובן נמצאת באיבר שהזנחנו:

$$\frac{\ell^2}{2mR'^2} = \frac{m^2 r_0^2 V_0^2}{2m\cdot 25r_0^2} = \frac{mV_0^2}{50} = \frac{1}{250}\,5mV_0^2 = \frac{1}{250}E \approx 0.4\%$$

5

2)



א) משוואות תנועה

$$m_1\ddot{x}_1 = (x_2 - x_1 - x_0)k$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -(x_2 - x_1 - x_0)k$$

ב) אם נחבר את המשוואות נקבל

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$$

כלומר

$$M\ddot{R}_{cm} = 0$$

ולכן

$$R_{cm}(t) = R_0 + V_0 t$$

מרכז המסה מתנהג כחלקיק חופשי

אם נחסר את המשוואות אחרי שחילקנו במסות נקבל

$$\underbrace{\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1}_{\ddot{d}} = -\underbrace{(x_2 - x_1 - x_0)}_{d}\frac{k}{m_2} - \underbrace{(x_2 - x_1 - x_0)}_{d}\frac{k}{m_1}$$

$$\ddot{d} = -k\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right)(d - x_0) = -\frac{k}{\mu}(d - x_0)$$

ג) מנחשים פתרון מהצורה

$$d(t) = x_0 + A\cos(\omega t)$$

ונראה הצורה מקיימת

$$-A\omega^2\cos(\omega t) = -\frac{k}{\mu}A\cos(\omega t)$$

וזה צריך להיות נכון לכל t ולכן

$$\omega^2 = \frac{k}{\mu}$$

A - מהווה את האמפליטודה של התנודה מסביב ל-x_0.

6

ד)

$$E = K + U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1 - x_0)^2$$

נשים לב כי

$$M\dot{R}_{cm} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{d} + \dot{x}_1) = M\dot{x}_1 + m_2\dot{d}$$

$$\dot{d} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$$

כלומר

$$\dot{x}_1 = \frac{M\dot{R}_{cm} - m_2\dot{d}}{M} = \dot{R}_{cm} - \frac{m_2}{M}\dot{d}$$

ובאותו אופן מקבלים

$$\dot{x}_2 = \frac{M\dot{R}_{cm} + m_1\dot{d}}{M} = \dot{R}_{cm} + \frac{m_1}{M}\dot{d}$$

נציב באנרגיה ונקבל:

$$E = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{R}_{cm} - \frac{m_2}{M}\dot{d}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{R}_{cm} + \frac{m_1}{M}\dot{d}\right)^2 + \frac{1}{2}k(d - x_0)^2$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{R}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(m_1\frac{m_2^2}{M^2} + m_2\frac{m_1^2}{M^2}\right)\dot{d}^2 + \frac{1}{2}k(d - x_0)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{R}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{d}^2 + \frac{1}{2}k(d - x_0)^2$$

האנרגיה הזו כמו לסכום של חלקיק חופשי עם מסה M שנע במהירות $\dot{R}_{cm}$ ועוד חלקיק נוסף עם מסה μ שמחובר לקפיץ עם קבוע k ואורך טבעי x_0.

הפוטנציאל במקרה הינו:

$$U(d) = \frac{1}{2}k(d - x_0)^2$$

⑦

3) המקרה הדו-מימדי

א)

$$m_1\ddot{\underline{r}}_1 = \left(|\underline{r}_2-\underline{r}_1|-x_0\right)k\,\underbrace{\left(\widehat{\underline{r}_2-\underline{r}_1}\right)}_{\text{וקטור יחידה בכיוון } \underline{r}_2-\underline{r}_1}$$

$$m_2\ddot{\underline{r}}_2 = -\left(|\underline{r}_2-\underline{r}_1|-x_0\right)k\left(\widehat{\underline{r}_2-\underline{r}_1}\right)$$

ב) שוב נחבר את המשוואות

$$m_1\ddot{\underline{r}}_1 + m_2\ddot{\underline{r}}_2 = 0$$

כלומר

$$M\ddot{\underline{R}}_{cm} = 0$$

ולכן

$$\underline{R}_{cm} = \underline{R}_0 + \underline{V}_0 t$$

וכעת שוב נחסר את המשוואות לאחר חלוקה במסות

$$\ddot{\underline{r}}_2 - \ddot{\underline{r}}_1 = -\left(|\underline{r}_2-\underline{r}_1|-x_0\right)k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(\widehat{\underline{r}_2-\underline{r}_1}\right)$$

כלומר

$$\ddot{\underline{d}} = -\left(d-x_0\right)\frac{k}{\mu}\hat{\underline{d}}$$

$|\underline{d}|$

ג)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}_2^2 + \frac{1}{2}k\left(|\underline{r}_2-\underline{r}_1|-x_0\right)^2$$

⑧

ושוב מקבלים ש

$$\dot{\underline{r}}_1 = \dot{\underline{R}}_{cm} - \frac{m_2}{M}\dot{\underline{d}}$$

$$\dot{\underline{r}}_2 = \dot{\underline{R}}_{cm} + \frac{m_1}{M}\dot{\underline{d}}$$

ומהצבה באנרגיה

$$E = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\underline{R}}_{cm} - \frac{m_2}{M}\dot{\underline{d}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\underline{R}}_{cm} + \frac{m_1}{M}\dot{\underline{d}}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(d-x_0\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\underline{R}}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2^2}{M^2}+\frac{m_2m_1^2}{M^2}\right)\dot{\underline{d}}^2 + \frac{1}{2}k\left(d-x_0\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\underline{R}}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\underline{d}}^2 + \frac{1}{2}k\left(d-x_0\right)^2$$

נעבור $\underline{d}$ בקואורדינטות פולריות

$$\underline{d} = d\,\hat{\underline{d}}$$

$$\dot{\underline{d}} = \dot{d}\,\hat{\underline{d}} + d\dot{\varphi}\,\hat{\underline{\varphi}}$$

(נשים לב כי הכוח בין המסות הינו תמיד מקביל ל $\underline{d}$
ולכן התנ"ז של המערכת ביחס ל $\underline{R}_{cm}$ נשמר!)

$$E = \frac{1}{2}M\dot{\underline{R}}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{d}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu d^2} + \frac{1}{2}k\left(d-x_0\right)^2}_{\text{זהו הפוטנציאל האפקטיבי במערכת}}$$

ד)

$$U_{eff}(d) = \frac{\ell^2}{2\mu d^2} + \frac{1}{2}k\left(d-x_0\right)^2$$

$$U'_{eff}(d) = -\frac{\ell^2}{\mu d^3} + k\left(d-x_0\right) = 0 \leftarrow$$

זהו משוואה מסדר d^4 שפתרונה את נקודת המינימום!

(9) 4)

א) באופן כללי האנרגיה נשמרת: $E = K + U$

ולכן נדרוש

$$E = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GmM}{R} \geq 0$$ = האנרגיה המינימלית ב- $r=\infty$

ולכן $V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \cong 11{,}183 \, m/sec$ ← לא תלוי הכיוון !!

אבל נראה זאת גם עבור הצורה הפולרית באנרגיה:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mR^2} - \frac{GmM}{R} \geq 0$$

במישור אנכי $l = 0$; $\dot{r} = V_0$ ואז מקבלים

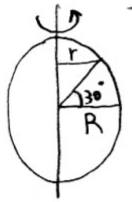
$$\frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GmM}{R} \geq 0$$ כמו קודם

במישור אופקי $\dot{r} = 0$; $l = mRV_0$ ואז מקבלים

$$\frac{m^2 R^2 V_0^2}{2mR^2} - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GmM}{R} \geq 0$$ כמו קודם

(10)

ב) ראשית נשאל מהי המהירות האופקית שאנו נעים בקו רוחב $30°$



$$r = R\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

המהירות האופקית אם כן

$$V' = \omega r = \underbrace{\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}}_{rad/sec} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \underbrace{6{,}400 \cdot 10^3}_{m} \cong 403 \, m/sec$$

הדרישה שלנו היא:

$$\frac{GmM}{R} \leq \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m (V - V')^2 = \frac{1}{2} m V^2 - mVV' + \frac{1}{2} m V'^2$$

המהירות המשיכית הדרושה כאשר כדור הארץ אינו מסתובב

סימן שלילי שכן משגרים לכיוון מזרח

מכאן שהתוספת לאנרגיה הקינטית שעלינו לספק:

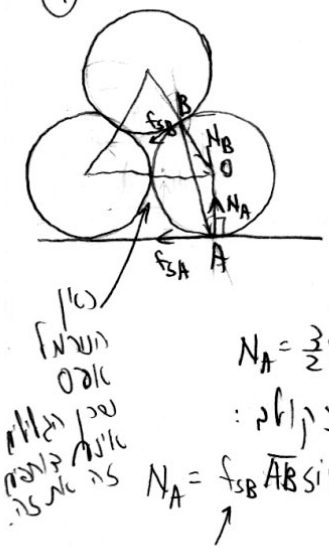
$$\Delta E = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = mVV' - \frac{1}{2} m V'^2 \underset{V = V' + V_0}{=} m V_0 V' + \frac{1}{2} m V'^2$$

סה"כ

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{m V_0 V' + \frac{1}{2} m V'^2}{\frac{1}{2} m V_0^2} = \frac{2V'}{V_0} + \left(\frac{V'}{V_0}\right)^2 \cong 7.3\%$$

(5) נדרוש

(11)



$$\sum \underline{F}=0$$
$$\sum \underline{N}=0$$

נסמן $\angle ABO=15^0$, $\overline{BO}=R$

$$\overline{AB}=\frac{R}{\sin 15}\cdot\sin(150^\circ)=\frac{R}{2\sin 15}$$

אם משקל הגליל $W=mg$

אז מהתאפסות שקול הכוחות $N_A=\frac{3}{2}W$

שקול המומנטים סביב נקודה A מתאפס:

$$N_A= \underbrace{f_{sB}}_{\mu_B N_B}\overline{AB}\sin(90^\circ+15)-N_B\overline{AB}\sin(15)=0$$

כלומר

$$\mu_B=\frac{\sin 15}{\cos 15}\cong 0.27$$

שקול המומנטים סביב נקודה B מתאפס:

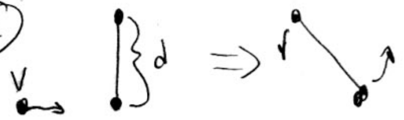
$$N_B=\underbrace{-WR\sin 30}_{\text{המשקל של הגליל ממרכז מסתו}}+\underbrace{N_A}_{\frac{3}{2}W}\underbrace{\overline{AB}}_{\frac{R}{2\sin 15}}\sin 15-\underbrace{f_{sA}}_{\mu_A\frac{3}{2}W}\underbrace{\overline{AB}}_{\frac{R}{2\sin 15}}\sin(90+15)=0$$

כלומר

$$-\frac{WR}{2}+\frac{3}{4}WR-\frac{3}{4}\mu_A WR\frac{1}{tg15}=0$$

$$\mu_A=\frac{1}{3}tg15\cong 0.09$$

(12)



6)

א) $$\underline{V}_{cm}=\frac{\sum m_i \underline{V}_i}{M}=\frac{mv\hat{i}}{3m}=\frac{v}{3}\hat{i}$$

משימור תנע קווי מהירות מרכז המסה לא תשתנה.

ב) לאחר ההתנגשות המערכת תסתובב סביב מרכז המסה שכן אין כוחות חיצוניים למערכת.

בזמן ההתנגשות מרכז המסה נמצא על המוט

$$\underline{r}_{cm}=\frac{\sum m_i \underline{r}_i}{M}=\frac{d}{3}\hat{j}$$

נחשב מהו התנ"ז רגע לפני ההתנגשות ביחס לנקודה $\frac{d}{3}\hat{j}$ כקוטב.

$$\underline{L}_{tot}=mv\frac{d}{3}\hat{k}$$

מרכז המסה עובר דרך נקודה זו ולכן

$$\underline{L}_{tot}=\underbrace{L_{cm}}_{0}+\sum \underline{L}_i' = \sum \underline{L}_i' =$$ התנ"ז סביב מרכז המסה

סביב $\frac{d}{3}\hat{j}$

בנוסף לאחר ההתנגשות התנ"ז סביב מרכז המסה:

$$\sum \underline{L}_i'=m\omega\left(\frac{2d}{3}\right)^2\hat{j}+(2m)\omega\left(\frac{d}{3}\right)^2\hat{j}=\frac{2}{3}m\omega d^2\hat{j}$$

משימור תנ"ז סביב מרכז המסה

$$mv\frac{d}{3}=\frac{2}{3}m\omega d^2 \Rightarrow \omega=\frac{v}{2d}$$

6) איבוד האנרגיה באנרגיה הקינטית (ביחס למרכז המסה) 13

$$E_{\text{לפני}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}V\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}V\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}V\right)^2=\frac{1}{3}mV^2$$

$$E_{\text{אחרי}} = \frac{1}{2}(2m)\left(\omega\frac{d}{3}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\omega\frac{2d}{3}\right)^2=m\left(\frac{V}{6}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{V}{3}\right)^2=\frac{mV^2}{12}$$

$$\Delta E = E_{\text{לפני}} - E_{\text{אחרי}} = \frac{1}{4}mV^2$$

7) משימור תנע:

$$mV=(m+M)u$$

משימור אנרגיה

$$\frac{1}{2}(\cancel{m+M})u^2=(\cancel{m+M})gh$$

$$V=\frac{m+M}{m}u=\frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}=\frac{3.015}{0.015}\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 0.1}\cong 281\,m/sec.$$

8) הדרך שעברו המסות זהה היא אותה הדרך לכן
נשאל איזו מהמסות נעה במהירות גבוהה יותר בממוצע.
המסה שעלתה לגבעה האטה את מהירותה משימור אנרגיה,
ואילו המסה שירדה לעמק הגדילה את מהירותה.
ולכן המסה שעברה בעמק נעה במהירות גבוהה יותר
בממוצע ולכן מהר יותר.