מכניקה ויחסות פרטית - תרגיל מס' 8 - פתרון

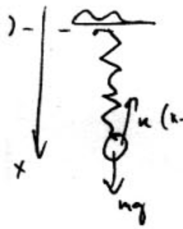
1. תוך כדי התנועה אורכים של הקפיצים משתנים. נסמן ב-Δx_1 וב-Δx_2 התארכויות של הקפיצים. נקודת חיבור הקפיצים נעה בתאוצה, אבל היא חסרת מסה, לכן שקול הכוחות הפועלים עליה צריך להתאפס. מכאן מקבלים $k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2$. בנוסף, אם נסמן ב-$\Delta x$ את התארכות של שני הקפיצים ביחד אז $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$. משתי המשוואות האלה מקבלים כי

$$\Delta x_1 = \frac{k_2}{k_1+k_2}\Delta x, \quad \Delta x_2 = \frac{k_1}{k_1+k_2}\Delta x$$

האנרגיה הפוטנציאלית של שני הקפיצים שווה ל-

$$U_s = \frac{k_1\Delta x_1^2}{2} + \frac{k_2\Delta x_2^2}{2} = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}\,\frac{\Delta x^2}{2}$$

רואים ששני הקפיצים מתנהגים כמו קפיץ אחד עם קבוע $k = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$
לכן ניתן לפתור בעיה פשוטה יותר: גוף עם מסה m תלוי על קפיץ עם קבוע k. מהו זמן המחזור של תנועת הגוף?
נסמן ב-ℓ את האורך החופשי של הקפיץ (במקרה שלנו הוא שווה לסכום האורכים החופשיים של שני הקפיצים). לפי הציור משוואת התנועה של הגוף תהיה



$$m\ddot{x} = mg - k(x-\ell)$$

רואים שלמשוואה יש פתרון קבוע: $x_0 = \ell + \frac{mg}{k}$, משמעות של הפתרון הקבוע הזה שהוא מתאר את מצב שיווי המשקל; $\Delta x = \frac{mg}{k}$. נגדיר משתנה חדש $y = x - x_0$ שמתאר ההפרש בין מיקום הגוף לבין מיקום שיווי המשקל. עבור y נקבל משוואה:

$$m\ddot{y} = mg - k\left[\left(y + \ell + \frac{mg}{k}\right) - \ell\right] = -ky$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

כידוע, $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$, כאשר $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. זמן המחזור

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}}$$

2. זמן המחזור ניתן ע"י $T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$, כאשר $m+M$ – מסה של הגוף יחד עם הקליע, ו-k – קבוע הקפיץ, שאותו אנחנו לא יודעים. כדי לחשב אותו נשים לב שמיד לאחר הפגיעה אורך של הקפיץ עדיין שווה לאורך החופשי שלו, אבל לגוף הכולל יש מהירות. במילים אחרות, כל האנרגיה של המערכת היא אנרגיה קינטית בלבד, כשהגוף יגיע למרחק המקסימלי מנק' שיווי משקל כל האנרגיה שלו תהיה לגמרי רק אנרגיה פוטנציאלית

את המהירות של הגוף מייד לאחר הפגיעה מחשבים משימור התנע;

$$mV=(m+M)V' \Rightarrow V'=\frac{m}{m+M}V$$

משוואת האנרגיה;

$$\frac{m+M}{2}\frac{m^2}{(m+M)^2}V^2=\frac{ka^2}{2}$$

$$k=\frac{m^2}{m+M}\frac{V^2}{a^2}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+M}{\frac{m^2}{m+M}\frac{V^2}{a^2}}}=2\pi\frac{M+m}{m}\frac{a}{V}$$

3. בזמן שהמקל מסתובב הקפיץ מתוח ואורכו r (שזה גם מרחק מהציר עד לגוף) מתקבל מהמשוואה לתאוצה;

$$m\omega^2 r=k(r-r_0)\Rightarrow r=\frac{k}{k-m\omega^2}r_0$$

כשעוצרים את המקל הקפיץ נשאר מתוח עד לאותו אורך r,
משוואת התנועה של הגוף

$$ma=k(r-r_0)$$

$$r-r_0=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

גזירה של המשוואה הזאת נותנת

$$V=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\cos\omega t.$$

אנחנו יודעים שמייד אחרי העצירה לגוף מהירות 0 $\Leftarrow V(0)=0$
$\Leftarrow C_2=0.$

$$r-r_0=C_1\cos\omega t$$

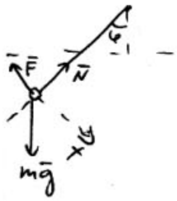
ב- $t=0$ נתונים לכן $r=\frac{k}{k-m\omega^2}r_0$ $\Leftarrow$

$$C_1+r_0=\frac{k}{k-m\omega^2}r_0\Rightarrow C_1=r_0\left[\frac{k}{k-m\omega^2}-1\right]=r_0\frac{m\omega^2}{k-m\omega^2}$$

$$r=r_0\left[1+\frac{m\omega^2}{k-m\omega^2}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right]$$

4 א) בהינתן זווית φ נצייר את מערכת הצירים כמו בציור.

עבור כוח החיכוך מקבלים:



$$|\bar F| = \alpha V = \alpha \ell \dot\varphi$$

משום שלגלגל אין מהירות ולכן $\bar V_{rel} = \bar V$

משוואות התנועה בצירים:

$$mg\cos\varphi - N = 0$$

$$ma_x = mg\sin\varphi + \alpha\ell\dot\varphi$$

במשוואה השניה סימן (+) משום בכיוון ציר x זווית φ קטנה.

$a_x = -\ell\ddot\varphi$, שוב סימן (-) מאותה סיבה. מקבלים בציר x:

$$m\ell\ddot\varphi + mg\sin\varphi + \alpha\ell\dot\varphi = 0$$

תנאי ראשון שאנו כופים אומר שגודל הזווית צריך להיות קטן: $|\varphi| \ll 1$. במקרה הזה אפשר להמיר $\varphi \to \sin\varphi$.

$$m\ell\ddot\varphi + \alpha\ell\dot\varphi + mg\varphi = 0$$

נחפש את הפתרון כרגיל בצורה $\varphi = e^{\lambda t}$; עבור λ:

$$m\ell\lambda^2 + \alpha\ell\lambda + mg = 0$$

$$\lambda = \frac{-\alpha\ell \pm \sqrt{\alpha^2\ell^2 - 4m^2\ell g}}{2m\ell}$$

מכאן מקבלים את תנאי התנודות: λ צריך להיות מרוכב, לכן

$4m^2 g > \alpha^2\ell \Leftarrow 4m^2\ell g > \alpha^2\ell^2$, הפתרון הכללי:

$$\varphi(t) = e^{-\frac{\alpha t}{2m}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{4m^2\ell g-\alpha^2\ell^2}}{2m\ell}t + C_2\sin\frac{\sqrt{4m^2\ell g-\alpha^2\ell^2}}{2m\ell}t\right]$$

בהינתן תנאי ההתחלה $\varphi(0)=\varphi_0$, $\dot\varphi(0)=0$ נחפש את C_1 ואת C_2. לשם כך נגזור את הביטוי ל-φ לפי הזמן (נסמן $\omega = \frac{\sqrt{4m^2\ell g-\alpha^2\ell^2}}{m\ell}$)

$$\dot\varphi(t) = -\frac{\alpha}{m}e^{-\frac{\alpha t}{m}}\left[C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\right] + e^{-\frac{\alpha t}{m}}\omega\left[C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t\right]$$

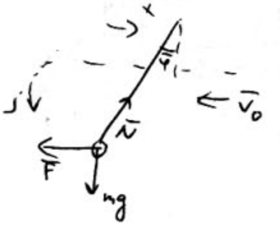
נציב $t=0$:

$$\varphi_0 = C_1;\quad 0 = -\frac{\alpha}{m}C_1 + \omega C_2$$

$$C_2 = \frac{\alpha\varphi_0}{m\omega}$$

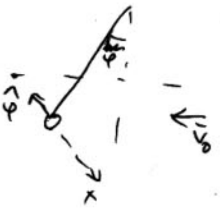
הפתרון:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\frac{\alpha t}{m}}\left\{\cos\frac{\sqrt{4m^2\ell g-\alpha^2\ell^2}}{m\ell}t + \frac{\alpha\ell}{\sqrt{4m^2\ell g-\alpha^2\ell^2}}\sin\frac{\sqrt{4m^2\ell g-\alpha^2\ell^2}}{2m\ell}t\right\}$$



ב) נמצא את מצב שיווי המשקל החדש, ב-$\hat{\varphi}$ נסמן את הזווית של המצב הזה. בצ'ר כמו בציור מקבלים

$$mg = N\cos\hat{\varphi}$$
$$\alpha V = N\sin\hat{\varphi}$$
$$tg\,\hat{\varphi} = \frac{\alpha V_0}{mg}\ ;\quad \hat{\varphi} = \operatorname{arctg}\frac{\alpha V_0}{mg}$$



עכשיו נחזור למקרה של תנודה קטן נניח שזרם במהירות V_0. את מהירות הגוף ניתן לכתוב כ- $\bar{V} = l\dot{\varphi}\hat{\varphi}$. המהירות שלו ביחס לנוזל $\bar{V}_{rel} = \bar{V} - \bar{V}_0$, בהטלה על ציר x

$$V_{rel_x} = -l\dot{\varphi} + v_0\cos\varphi$$

משוואת הכוחות בהטלה על ציר x:

$$-ml\ddot{\varphi} = mg\sin\varphi + \alpha l\dot{\varphi} - \alpha V_0\cos\varphi$$
$$ml\ddot{\varphi} + \alpha l\dot{\varphi} + mg\sin\varphi - \alpha V_0\cos\varphi = 0.$$

עכשיו הזווית φ לא קטנה, אבל ההפרש $\hat{\varphi}-\varphi$ כן קטן, נסמן אותו ב-ψ.

$$\sin\varphi = \sin(\psi+\hat{\varphi}) = \sin\psi\cos\hat{\varphi} + \cos\psi\sin\hat{\varphi} \approx \psi\cos\hat{\varphi} + \sin\hat{\varphi}$$
$$\cos\varphi = \cos(\psi+\hat{\varphi}) = \cos\psi\cos\hat{\varphi} - \sin\psi\sin\hat{\varphi} \approx \cos\hat{\varphi} - \psi\sin\hat{\varphi}$$

דרך אחרת להגיע לנוסחאות האלה היא להשתמש בפיתוח טיילור:

$$\sin\varphi \cong \sin\hat{\varphi} + \left.\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\right|_{\hat{\varphi}}\cdot\psi = \sin\hat{\varphi} + \cos\hat{\varphi}\cdot\psi$$
$$\cos\varphi \cong \cos\hat{\varphi} + \left.\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\right|_{\hat{\varphi}}\cdot\psi = \cos\hat{\varphi} - \sin\hat{\varphi}\cdot\psi$$

נציב למשוואת התנועה:

$$ml\ddot{\psi} + \alpha l\dot{\psi} + mg(\sin\hat{\varphi} + \cos\hat{\varphi}\,\psi) - \alpha V_0(\cos\hat{\varphi} - \sin\hat{\varphi}\cdot\psi) = 0.$$

אבל אנחנו יודעים כי $mg\sin\hat{\varphi} = \alpha V_0\cos\hat{\varphi}$ $\Leftarrow$

$$ml\ddot{\psi} + \alpha l\dot{\psi} + (mg\cos\hat{\varphi} + \alpha V_0\sin\hat{\varphi})\psi = 0.$$

הפולינום האופייני:

$$ml\lambda^2 + \alpha l\lambda + (mg\cos\hat{\varphi} + \alpha V_0\sin\hat{\varphi}) = 0$$
$$\lambda = \frac{-\alpha l \pm \sqrt{\alpha^2 l^2 - 4ml(mg\cos\hat{\varphi} + \alpha V_0\sin\hat{\varphi})}}{2ml}$$

תנאי התנודות: ביטוי בתוך השורש שלילי! תדירות

$$\omega = \frac{\sqrt{4ml(mg\cos\hat{\varphi} + \alpha V_0\sin\hat{\varphi}) - \alpha^2 l^2}}{2ml}$$

אבל $\cos^2\tilde{\varphi} = \frac{1}{1+tg^2\tilde{\varphi}} = \frac{m^2g^2}{m^2g^2+\alpha^2v_0^2}$; $\sin^2\tilde{\varphi} = \frac{\alpha^2v_0^2}{m^2g^2+\alpha^2v_0^2}$

$$\omega = \sqrt{4m\ell\left[mg\frac{mg}{\sqrt{m^2g^2+\alpha^2v_0^2}} + \alpha v_0\frac{\alpha v_0}{\sqrt{m^2g^2+\alpha^2v_0^2}}\right] - \alpha^2\ell^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4m\ell}{\sqrt{m^2g^2+\alpha^2v_0^2}}\left[m^2g^2+\alpha^2v_0^2\right] - \alpha^2\ell^2} =$$

$$= \sqrt{4m\ell\sqrt{m^2g^2+\alpha^2v_0^2} - \alpha^2\ell^2}$$

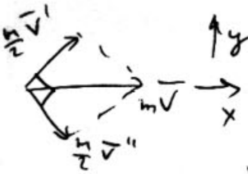
ברור שכאשר $v_0=0$ מקבלים את התוצאה הקודמת. לעומת המקרה של $v_0=0$ קיבלנו תדירות יותר גדולה.

5. א) נמצא בתנועה מעגלית, $\frac{mv^2}{r}=\frac{GmM}{r^2}$, כאן m – מסת האסטרואיד, M – מסת השמש, r – רדיוס המסלול. $mv^2=\frac{GmM}{r}$; $v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$ – מהירות האסטרואיד.

בהתפרקות התנע נשמר: $mv=\frac{m}{2}\cdot v'(+0) \Leftarrow v'=2v$ – מהירות של החלק שעליו מדובר. אנרגיה שלו:

$$E=\frac{1}{2}\frac{m}{2}\cdot(2v)^2-\frac{G\frac{m}{2}M}{r^2} = mv^2-\frac{GmM}{2r} = \frac{GmM}{r}-\frac{GmM}{2r} =$$

$$= \frac{1}{2}GmM>0 \Rightarrow$$ מסלול היפרבולי



ב) בהבלה על כיוון התנועה של האסטרואיד (ציר x):

$$2\frac{m}{2}v'_x = mv \Rightarrow v'_x=v$$

תנאי של הזווית נותן $v'_x=v'_y=v$. $v'^2=v^2+v^2=2v^2$

$$E=\frac{1}{2}\frac{m}{2}\cdot 2v^2-\frac{G\frac{m}{2}M}{r} = \frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{2r}\equiv 0 \Rightarrow$$

תנועה פרבולית