מספרים קומפלקסיים

(סביר בקלדה על כלי מתמטי שימוש מאוד לבעיית האוטומטיות ההרמוני (לבעיות רבות מאד בחיי היום יום!). כלי זה הוא המספרים הקומפלקסיים, או כפי שהם - מספרים מרוכבים (complex number).

* הגדרת i:

$$i \equiv \sqrt{-1}$$

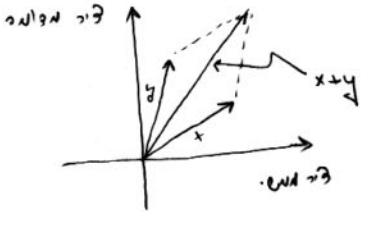
* מספר מרוכב כללי, מכיל רכיב ממשי ורכיב מדומה:

$$\underbrace{x}_{\text{מספר מרוכב}} = \underbrace{a}_{\substack{\text{חלק}\\ \text{ממשי}\\ (\text{Real})}} + i\underbrace{b}_{\substack{\text{חלק מדומה}\\ (\text{Imaginary})}}$$

מספר מרוכב בדומה לוקטור דו מימדי, כך שחיבור שני מספרים קומפלקסיים הוא חיבור הרכיבים:

$$x+y = \overbrace{(a+ib)}^{x} + \overbrace{(c+id)}^{y} = (a+c) + i(b+d)$$

ובציורה גרפית:



וחיסור באופן דומה:

$$x-y = (a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d)$$

מה שווה הכפלה של שני מספרים מרוכבים?

$$x\cdot y = (a+ib)(c+id) = ac + aid + ibc + (i)^2 bd = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

ובאופן פרטי:

$$x^2 = x\cdot x = (a^2-b^2) + 2iab$$

ניתן להגדיר גודל של מספר קומפלקסי (modulus):

$$|x|^2 = a^2 + b^2$$

ולהגדיר קומפלקסי (complex conjugate):

$$\bar{x} = a - ib$$

אנו יכולים לראות מיד כי מתקיים הקשר:

$$x\bar{x} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$$

"c" "d" הנומרטור - y.x

כלומר: $x\bar{x} = |x|^2$.

כעת ניתן לחלק במספר קומפלקסי:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\cdot\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

(כפל בדמוי לנקה ולמטה)

ולכן:

$$\frac{y}{x} = \frac{c+id}{a+ib} = \frac{(c+id)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{ac+bd+i(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

דוגמא: מה שווה $1/i$?

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

מעניין!

* דוגמא: מה שווה הפתרון של המשוואה הריבועית $x^2+1=0$?

$$x^2=-1 \Rightarrow x=\pm i$$

* ובמשוואה $x^2-2x+2=0$, מה פתרונה?

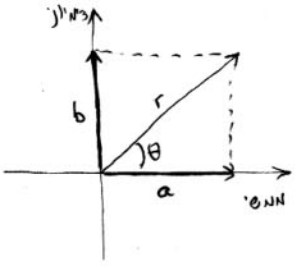
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1\pm i$$

פתרון משוואה ריבועית

באופן כללי ניתן להראות שאם המשוואה היא ממשית אזי הפתרונות הקומפלקסיים יופיעו עם הדמוי שלהם.

מספרים קומפלקסיים בתיאור פולרי:

כפי שקבלנו היום ניתן לתאר בקואורדינטות קרטזיות ובקואורדינטות פולריות, כך ניתן לעשות עם מספרים קומפלקסיים.



כלומר:

$$x = a + ib = r\cos\theta + i r\sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

למה שווה הביטוי בסוגריים?

נזכר כי $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

נעשה זאת ע"י פיתוח לטור טיילור סביב האפס:

הנגזרת ה-n-ית

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(i)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

עבור e^x, כל הנגזרות שוות! ב- $x=0$ הן שוות ל- 1, לכן:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \xrightarrow[x=i\theta]{} e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\theta^n}{n!}$$

אולם:

$$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2\cdot i = -i,$$
$$i^4 = i^2\cdot i^2 = -1 \ldots$$

כלומר, אם נחלק לחזקות זוגיות ואי זוגיות:

$$i^{2n-1} = i(-1)^{n-1}$$
$$i^{2n} = (-1)^n$$

לכן, אם נחלק את הפולינום של $e^{i\theta}$ לאיברים זוגיים ואי זוגיים:

$$e^{i\theta} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\theta^{2m}}{(2m)!} + i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}\theta^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

כעת נראה מה הפיתוח טיילור של כל סכום בנפרד- נעשה זאת ע"י פיתוח לטור של sin ו- cos.

1.12.09

כדי לפתח $\cos(\theta)$ אני גוזרים את נגזרות הפונקציה:

$$\cos(x)\Big|_{x=0} = 1 \qquad \frac{d\cos(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \sin x\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{d^2\cos(x)}{dx^2}\Big|_{x=0} = -\cos(x)\Big|_{x=0} = -1$$

כך באופן כללי:

$$\frac{d^n\cos(x)}{dx^n}\Big|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{m/2} & \text{זוגי} - m \\ 0 & \text{אי זוגי} - m \end{cases}$$

לכן:

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n(\cos(\theta))}{d\theta^n}\Big|_{\theta=0} \frac{\theta^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!}$$

סכימה רק על ה- n הזוגי. $n = 2m$

כאן האיבר הראשון שמופיע בסכום.

ובמקרה לסינוס:

$$\frac{d^n\sin(x)}{dx^n} = \begin{cases} 0 & \text{זוגי} - m \\ (-1)^{(m-1)/2} & \text{אי זוגי} - m \end{cases}$$

ולכן:

$$\sin(\theta) = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{d^n(\sin(\theta))}{d\theta^n}\Big|_{\theta=0} \frac{\theta^n}{M!} = \sum_{m=1} \frac{(-1)^{m-1} \theta^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

סכימה רק על ה- n ים האי זוגיים: $M = 2m-1$

זיהוי הסכומים המופיעים בביטויים עבור $e^{i\theta}$ הם בהפרש $\cos\theta$ ו- $\sin\theta$, לכן:

<u>נוסחת אוילר</u> — $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

מספרים בא נתונים אם החלק הממשי והחלק המדומה שווים בין שני המספרים.

לכן, אם: $x_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ו- $x_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, נקבל שהמספרים שווים: $x_1 = x_2$

אם $r_1 = r_2$ ו- $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ כאשר n מספר שלם.

הכפלה של שני מספרים:

$$x_1 \cdot x_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right) =$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

הכפלה תגרום הכפלת הגדלים ותיבור הזוויות θ.

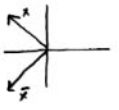
כמובן, שאם עובדים עם $e^{i\theta}$ ההכפלה היא טריוויאלית!

$$x_1 \cdot x_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

לכן הרבה יותר קל לעבוד עם $e^{i\theta}$ מאשר סינוס וקוסינוס...

* צמוד קומפלקסי:

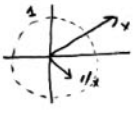
$$\bar{x} = \overline{re^{i\theta}} = r\left(\overline{\cos\theta + i\sin\theta}\right) = r(\cos\theta - i\sin\theta) =$$
$$= r\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) = re^{-i\theta}$$



כלומר הצמוד הקומפלקסי מתקבל ע"י החלפת i ב- $-i$. זה לא קשה להבין הן מצד גאומטרי שלו. (נראה כאן באופן כללי).

* חילוקה:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$



דוגמא:
בהקרה הפרטי של $x=i$ נשים: $x = 1\cdot e^{i\pi/2}$ ולכן: $\frac{1}{i} = \frac{1}{e^{i\pi/2}} = e^{-i\pi/2} = -i$

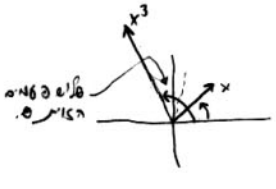
ובאופן כללי:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

* חזקה:

$$x^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$$

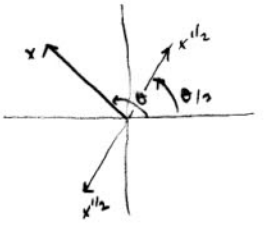
α יכול להיות שלם, אבל לא חייב להיות!



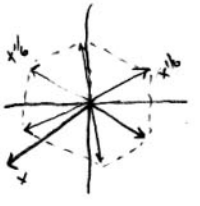
רגע! בתנאים הלא ו- $re^{i\theta}$ ו- $re^{i(\theta+n2\pi)}$ הם אינו מספר, להעלות מספר בחזקת α יש לעשות עבור כל האפשרויות של n. למשל:

$$x = re^{i\theta} \quad x^{1/2} = r^{1/2}e^{i\theta/2}, \quad r^{1/2}e^{i\frac{(\theta+2\pi)}{2}} = r^{1/2}e^{i(\theta+\pi)}$$

בדרך גרפית:



עבור n=6 הדרך יותר:



באופן כללי למשוואה פולינומית מסדר n ישנם n פתרונות במישור הקומפלקסי!

תרגיל. למה שווה i^i?

$$i^i = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}\right)^i = e^{i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)} = e^{-\pi/2-2\pi n}$$

כלומר ישנם אין-סוף פתרונות ממשיים ל- i^i! המספר המתקבל ל- $n=0$ נקרא: principle value.

ואנו כבר רגילים לאפסות הזו, למשל כשאנו כותבים: $x^2=a \rightarrow x=\pm\sqrt{a}$
אנו אומרים לקחת את ה- principle value של הפונ' כפול 2+ או 2-!

דוגמא נוספת היא הפונקציה $\sin^{-1}(x)$. יש לה אין סוף פתרונות!
אולם אנו רגילים לקחת רק אחד.

דוגמא אחרונה:

$$\ln x = \ln\left(re^{i(\theta+2\pi n)}\right) = \ln r + i(\theta+2\pi n)$$