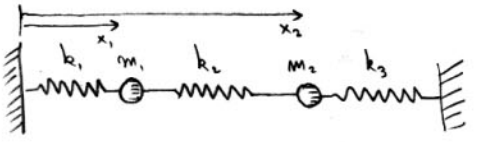
8.12.04

דוגמא מורכבת יותר – שתי מסות על קפיצים

נסתכל על בעיה מורכבת יותר המכילה שתי מסות הקשורות צולבו ולקרולת כמתואר בציור:



כדי לפתור את הבעיה הנוכחית נשתמש בחוקי ניוטון את משוואות התנועה.

נסמן אורכי שיווי משקל לקפיצים $l_{1,2,3}$. במקרה כזה, משוואות התנועה תהיינה:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1-l_1) + k_2(x_2-x_1-l_2)$$

קפיץ 1 "מדבר" למשוך את המסה שמולה ואם x_1 גדול ממצב שיווי משקל.

אם קפיץ 2 מתאוסף הוא רוצה למשוך את m_1 ימינה ואת m_2 שמולה

אם x_2 גדול משווי משקל, k_3 מנסה לקרב את x_2 (לכיוון שמולה)

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2-x_1-l_2) - k_3(x_2-l_3)$$

שלב I: המשוואות אינן תלויות בזמן. בגלל הסימטריה הזו ש- x_1 ו- x_2 אינם מוגדרים סביב מצב השיווי משקל. לכן, בשלב הראשון, יש למצוא את נקודת שיווי המשקל. נסמן כ- $x_{1,0}$ ו- $x_{2,0}$:

$$\begin{cases} -k_1(x_{1,0}-l_1) + k_2(x_{2,0}-x_{1,0}-l_2) = 0 \\ -k_2(x_{2,0}-x_{1,0}-l_2) - k_3(x_{2,0}-l_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,0}(-k_1-k_2) + x_{2,0}(k_2) = l_1k_1 + l_2k_2 \\ x_{1,0}(k_2) + x_{2,0}(-k_2-k_3) = -l_2k_2 - k_3l_3 \end{cases}$$

נכפיל משוואה השניה כ- k_2 ומשוואה הראשונה כ- (k_2+k_3) ונחבר:

$$x_{1,0}\left(k_2^2 - (k_1+k_2)(k_2+k_3)\right) = (l_1k_1+l_2k_2)(k_2+k_3) - (l_2k_2+l_3k_3)k_2$$

$$x_{1,0} = \frac{(l_1k_1+l_2k_2)(k_2+k_3) - (l_2k_2+l_3k_3)k_2}{\left(k_2^2-(k_1+k_2)(k_2+k_3)\right)}$$

בדומה בדיוק ניתן לקבל ביטוי דומה עבור $x_{2,0}$. אבל נקודת שיווי המשקל לא מעניינת אותנו יותר מדי. אותנו מעניינת התנועה של המסות.

לאחר שיש את נקודת שיווי המשקל, נוכל לרשום משוואה להסחות משיווי משקל:

נגדיר: $\xi_1 = x_1 - x_{1,0} \qquad \xi_2 = x_2 - x_{2,0}$

ונקבל:

$$m_1\ddot{\xi}_1 = -k_1\xi_1 + k_2(\xi_2 - \xi_1)$$

$$m_2\ddot{\xi}_2 = -k_2(\xi_2 - \xi_1) - k_3\xi_2$$

נחפש פתרון מהצורה: $\xi_1 = Ae^{\lambda t}$ ו- $\xi_2 = Be^{\lambda t}$. נציב במשוואות ונקבל:

$$m_1\lambda^2 A = -k_1 A + k_2(B-A)$$

$$m_2\lambda^2 B = -k_2(B-A) - k_3 B$$

נרשום בצורה כללית אחרת:

$$(m_1\lambda^2 + k_1 + k_2)A - k_2 B = 0$$

$$-k_1 A + (m_2\lambda^2 + k_2 + k_3)B = 0$$

יש לנו שתי משוואות אלגבריות לינאריות ב- A ו- B שהן הומוגניות (אין איבר שאינו תלוי ב- A או B). מתי נוכל לקבל פתרון לא טריוויאלי? דרור A ו- B? באופן כללי, אם המשוואות אינן תלויות זו בזו לא יהיה פתרון לשתי המשוואות עם שתי הנעלמים זולת רק $A=B=0$. נוכל לקבל פתרון אחר עם $A\neq 0$ ו/או $B\neq 0$ רק אם המשוואות הן תלויות אחת בשניה, כלומר, אם משוואה אחת היא כפולה של המשוואה השניה:

כדי לראות זאת, נניח שהמשוואות הן מהצורה:

$$a_1 A + b_1 B = 0$$

$$a_2 A + b_2 B = 0$$

מהמשוואה הראשונה מקבל: $A = -\frac{b_1 B}{a_1}$

ואילו מהמשוואה השניה מקבל: $A = -\frac{b_2}{a_2}B$. כדי שיהיה פתרון לא טריוויאלי עם $A=B=0$, צריך ש- $\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1} \leftarrow a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$

ואם נציב את המקדמים:

$$(m_1\lambda^2 + k_1 + k_2)(m_2\lambda^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0$$

8.12.04

לשם נוחות נגדיר:

$$\omega_1^2 \equiv \frac{k_1+k_2}{m_1} \qquad \omega_2^2 \equiv \frac{k_2+k_3}{m_2}$$

$$\delta\omega^4 = \frac{k_2^2}{m_1 m_2}$$

אם היו התנודות שייכות למסה 1 אזי מסה 2 לא הייתה נעה (היה לה אורך קבוע) ואזי אם היו התנודות שייכות למסה 2 אזי 1 הייתה קבועה. שם היו אינה שפוא "תדרים" אופיינית שמתאר את הצימוד (coupling) בין שתי המסות.

נחלק את המשוואה בסך הכל הצמוד הקפוי ב- $m_1 m_2$ ונקבל:

$$\left(\lambda^2 + \frac{k_1+k_2}{m_1}\right)\left(\lambda^2 + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right) - \frac{k_2^2}{m_1 m_2} = 0$$

או בעזרת ההגדרות:

$$\left(\lambda^2 + \omega_1^2\right)\left(\lambda^2 + \omega_2^2\right) - \delta\omega^4 = 0$$

נפתח:

$$(\lambda^2)^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda^2 + (\omega_1^2\omega_2^2 - \delta\omega^4) = 0$$

הפתרון הוא כמובן:

$$\lambda^2 = -\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 + 4\delta\omega^4}$$

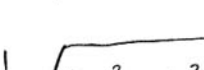
נפתח את ה ( ) בתוך השורש:

$$\lambda^2 = -\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\underbrace{(\omega_1^2)^2 + 2\omega_1^2\omega_2^2 + (\omega_2^2)^2}_{(\omega_1^2)^2 - 2\omega_1^2\omega_2^2 + (\omega_2^2)^2} - 4\omega_1^2\omega_2^2}_{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} + 4\delta\omega^4}$$

סה"כ נקבל:

$$\lambda^2 = -\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{\omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2 + 4\delta\omega^4}$$

(סתכל בסת של מספרי גבולות.

* מה קורה אם $k_1 = k_3 = 0$? בשקדה כבר אינו קיים בשת מסות המתבדלות בקפיץ בינים, ללו קשר לקיים!  הגיל מ- $\sqrt{\ }$ נהיה:

$$\omega_1^2 = \frac{k_2}{m_1} \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad \delta\omega^4 = \frac{k_2^2}{m_1 m_2} \rightarrow \sqrt{\ } = k_2\left(\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right)^2 + 4\frac{1}{m_1 m_2}\right)^{1/2}$$

לכן:

$$\sqrt{\ } = k_2\left(\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2\right)^{1/2}$$

והפולינום יהיה:

$$\lambda^2 = -\frac{k_2}{2m_1} - \frac{k_2}{2m_2} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right) = 0, \quad -\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1 m_2} = -\frac{k_2}{\mu}$$

מסה מצומצמת. פתרון אחד.

מה המקרים הפתרונות הללו? נניח $\lambda^2=0$ במשוואות עבור A ו-B, ונצטרך שמספק לקחת משוואה אחת כי השניה תלויה בראשונה.

$$\left(m_1\underbrace{\lambda^2}_{=0} + (k_1+k_2)\right)A - k_2 B = 0 \implies A = B$$

הפתרון הראשון, עם $\lambda=0$ נראה:

$$x_1 = Ae^{\lambda t} = A$$
$$x_2 = Be^{\lambda t} = B$$

אולם זה פתרון אחד, עם תנאי התחלה אחד עבור x_1 ועבור x_2. מה עם הפתרון השני? הבעיה מסתתרת בעובדה שיש שני שורשים $\lambda=0$ למשוואה $\lambda^2=0$. כשבודקים משוואות בפסקנ"ל רגילות, לומדים שהפתרון הנוסף למשוואה היא: $\begin{cases}\xi_1 = A_2 t e^{\lambda t}\\ \xi_2 = B_2 t e^{\lambda t}\end{cases}$ ובמקרה שלנו: $A_2 t$, $B_2 t$. כך נבדוק:

ישר המשוואה:

$$m_1\ddot{\xi}_1 = -\underbrace{k_1}_{=0}\xi_1 + k_2(\xi_2-\xi_1) \implies 0 = +k_2(B_2 t - A_2 t)$$

עבור המקרה בו אנו עובדים.

$\xi_1 = A_2 t$
$\xi_2 = B_2 t$

$$\downarrow$$

$$B_2 = A_2$$

לכן, הפתרונות המתקבלים מהשורש $\lambda=0$ הם:

$$x_1 = A_1 + A_2 t$$
$$x_2 = B_1 + B_2 t$$

פתרון זה מתאר את תנועת מרכז המסה של שני המסות! הוא ואין כח חיצוני על מערכת שתי המסות, מתקבלת תנועה שווה תאוצה!

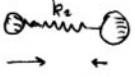
מה קורה עבור הפתרון השני של λ?

נציב את $\lambda^2 = -\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_2 m_1}$ במשוואה, ונקבל:

$$(m_1\lambda^2 + k_2)A - k_2 B = 0$$

$$\left(k_2 - \frac{k_2(m_1+m_2)}{m_2}\right)A = k_2 B \Rightarrow B = -\frac{m_1}{m_2}A$$

התנודות המתאוששות ע"י תדירות ω הן תנודות בין כל מסה נדה בכיוון הפוך עם אמפליטודה היחסית הנתונה למסה – כך מקיימים שמרכז המסה נשאר במקום!



צורת הפתרון כאן, נתונה ע"י:

$$\begin{cases} \xi_1 = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \\ \xi_2 = -\frac{m_1}{m_2}A_1 e^{i\omega t} - \frac{m_1}{m_2}e^{i\omega t} \end{cases}$$

כאשר: $\omega^2 = \frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1 m_2}$ $(-\lambda^2)$

חלק מינוס!

או בצורה כללית אחרת, כפי לקבל ξ ממשיים:

$$\xi_1 = |A|\cos(\omega t + \varphi_A)$$

$$\xi_2 = -\frac{m_1}{m_2}|A|\cos(\omega t + \varphi_A)$$

לכן, הפתרון הכללי שלנו המכיל את שתי ה-λ יראה:

הקבועים A_1 ו-A_2 מהמקרה $\lambda=0$.

$$\xi_1 = C_1 + C_2 t + |C_3|\cos(\omega t + \varphi_{C_3})$$

$$\xi_2 = C_1 + C_2 t - \frac{m_1}{m_2}|C_3|\cos(\omega t + \varphi_{C_3})$$

צורת תנועה עם תדירות מסוימת ω (או λ) הנראה לעיני כיוצ'.

כיחס בין ξ_1 ל-ξ_2 בתנודה (למשל $(+1, -\frac{m_1}{m_2})$ הפתרון עם $\lambda = -\frac{k}{m}$) נקרא אופן תנודה (או מוד עצמי) ולו יש תדירות עצמית ω.

(מתמטיקאים קוראים לאופן התנודה "וקטור עצמי" (Eigenvector) ולתדירות המתאימה לו ערך עצמי (Eigenvalue))

במקרה שלנו ישנו מוד אחד עם "וקטור עצמי" $(1,1)$ – היחס בין תנועת ξ_1 ל-ξ_2, עם ערך עצמי $\lambda=0$ ואילו מוד שני הוא עם "וקטור עצמי" $(+1, -\frac{m_1}{m_2})$ עם "ערך עצמי" $\lambda = -\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1 m_2}$

8.12.04

נסתכל על בדיאגו אחרת, בה כל הקפיצים שווים והמסות שוות

זה כן. במקרה כזה:

$$\omega_1^2 = 2\frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = 2\frac{k}{m} \quad \delta\omega^4 = \frac{k^2}{m^2}$$

והשוואת הערכים העצמיים תהיה:

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} - \frac{k}{m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\left(\frac{2k}{m} - \frac{2k}{m}\right)}_{=0}^2 + 4\frac{k^2}{m^2}}$$

$$\lambda^2 = -\frac{2k}{m} \pm \frac{k}{m}$$

נקבל לכן שני צורות של ערכים עצמיים: $\lambda^2 = -\frac{3k}{m}$ ו- $\lambda^2 = -\frac{k}{m}$

ננסה למצוא את אופני התנודה. נתחיל עם $\lambda^2 = -\frac{k}{m}$, נציב במשוואה את ונקבל:

$$(\underbrace{m\lambda^2}_{-k} + 2k)A - kB = 0$$

$$\hookrightarrow kA = kB \longrightarrow A = B$$

נציב כעת את המקרה $\lambda^2 = -\frac{3k}{m}$:

$$(\underbrace{m\lambda^2}_{-3k} + 2k)A - kB = 0$$

$$\hookrightarrow -kA = kB \longrightarrow A = -B$$

בהתאם הכללי של המשוואות הוא אם כן:

$$\xi_1 = \overbrace{A_1}^{A \text{ המקרה הראשון}} e^{i\omega_1 t} + \overbrace{A_1^*}^{\text{נצ. ש. צמודים}} e^{-i\omega_1 t} + \overbrace{A_2}^{A \text{ של המקרה השני}} e^{+i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t}$$

$$\xi_2 = \underbrace{A_1}_{B_1 = A_1 \text{ כי}} e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t} - \left(A_2 e^{i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t}\right)$$

נגדיר:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

או בצורה אחרת:

פיקטיבי בגלל הגדרה של A חדשה

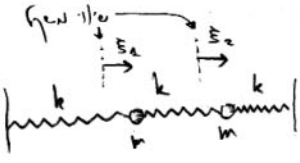
$$\xi_1 = |A_1| \cos(\omega_1 t + \varphi_{A_1}) + |A_2| \cos(\omega_2 t + \varphi_{A_2})$$

$$\xi_2 = \underbrace{|A_1| \cos(\omega_1 t + \varphi_{A_1})}_{\text{אופן תנודה ראשון}} - \underbrace{|A_2| \cos(\omega_2 t + \varphi_{A_2})}_{\text{אופן תנודה שני}}$$

שימו לב כי הפעם ישנן שתי קואורדינטות ξ_1 ו- ξ_2 לשתי המסות, הלא ומשוואות התנועה הן מסדר שני, הפעם ארבעה קבועי אינטגרציה אותם יש למצוא מתנאי התחלה.

מה מתאר תנועה כזו?

תנועת המסות מורכבת משתי תנועות בלתי תלויות:

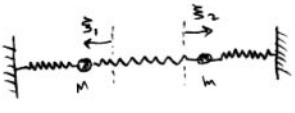


אופן תנודה 1: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = תדר עצמי

(Eigen mode)

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = A_1 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\text{וקטור עצמי}} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$ — "וקטור עצמי"

אופן תנודה 2:



$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

סה"כ בכל וקטורי (אבל לא וקטור מרחבי אלא וקטור עצמי) של מרחב הקואורדינטות $\{\xi_1, \xi_2\}$):

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$