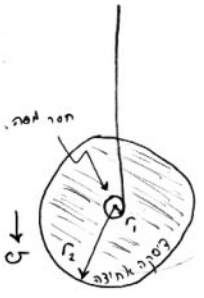
דינמיקה של גופים קשיחים סביב ציר קבוע



דוגמא ראשונה: נפילת יו-יו. למה שווה תאוצתו של יו-יו נופל?

נניח לשם פשטות כי הדיסקה הקטנה חסרת מסה ואילו הדיסקה הגדולה מלאת אחיד.

נחשב את תאוצת היו-יו בעזרת באנרגיה הקינטית של הגליל. ראינו בעבר כי האנרגיה הקינטית ניתנת לכתיבה כאנרגיה הקינטית של מרכז המסה + אנרגיה קינטית של התנועה יחסית למרכז המסה. לכן, נוכל לרשום:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

כאשר I הוא מומנט האינרציה לסיבוב סביב ציר הדיסקה, $I = \frac{1}{2}MR^2$.

כדי למצוא את תאוצת v, יש לקשר את ω ל-v. מה הקשר?

הקשר בין שינוי הגובה לבין תנועת היו-יו למטה: $dy = r_1 d\theta$

והמהירות: $v = \frac{dy}{dt} = r_1\frac{d\theta}{dt} = r_1\omega$

לכן האנרגיה הקינטית היא:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}Mr_2^2}_{I}\cdot\left(\frac{v}{r_1}\right)^2 = \frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)$$

שימור אנרגיה אומר:

$$K+U = const \Rightarrow \cancel{M}gy + \frac{1}{2}\cancel{M}v^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right) = const$$

גזירה לפי הזמן ונקבל:

$$g\cancel{\dot{y}} + \cancel{\dot{y}}\ddot{y}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right) = 0$$

ולכן התאוצה היא:

$$\ddot{y} = -\frac{g}{1+\frac{1}{2}(r_2/r_1)^2}$$

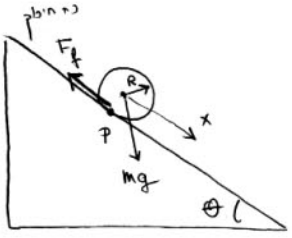
כלומר, תאוצת היו-יו קטנה יותר מ-g. הסיבה היא שהאנרגיה הפוטנציאלית לא הופכת רק לתנועה קווית אלא גם לתנועה סיבובית כך שתנועת הקווית קטנה יותר. אם r_2 גדול מספיק מ-r_1 נקבל תאוצה גדולה יותר קטנה מ-g.

המיקום y הוא לכן:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\frac{g}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}t^2$$

מהירות התחלתית

נסתכל על גלגול ללא החלקה



נחשב כעת את תאוצת הנפלה של גליל המתגלגל ללא החלקה במורד של מישור משופע. נעשה כזאת אספר דרכים שונות.

דרך I: שימור אנרגיה.

האנרגיה הקינטית של הגליל:

$$K = \underbrace{K_{CM}}_{\text{תנועת מרכז המסה}} + \overbrace{K'}^{\text{מסביב למרכז המסה}} =$$

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \omega = \dot{x}/R$$

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}M\Big(1+\underbrace{\frac{I}{MR^2}}_{\text{גאומטרי ומאפיין הכוללת פחות לתאוצה גדולה יותר מ-M.}}\Big)\dot{x}^2$$

האנרגיה הפוטנציאלית:

$$U = -Mgx\sin\theta$$

האנרגיה הכוללת קבועה:

$$E = K+U = \frac{1}{2}M\Big(1+\frac{I}{MR^2}\Big)\dot{x}^2 - Mg\sin\theta\, x = \overbrace{C}^{\text{קבוע}}$$

גזור לפי הזמן:

$$M\Big(1+\frac{I}{MR^2}\Big)\cancel{\dot{x}}\ddot{x} - Mg\sin\theta\,\cancel{\dot{x}} = 0$$

לכן:

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\theta}{(1+I/MR^2)}$$

דרך II

נחשב ע"י כוחות – תאוצת מרכז המסה ותאוצה זוויתית סביב מרכז המסה:

יש לנו כעת שני משוואות

חוק II למרכז המסה: $Ma = \sum F$

מומנטים סביב מרכז המסה: $I\frac{d\omega}{dt} = \sum N_c$

שני כוחות פועלים על המסה M: ראשית, Mg כלפי מטה ו- F_f - כח החיכוך מעלה המישור. לכן:

$$Ma = M\ddot{x} = \overset{\text{x מוגדר כלפי מטה.}}{Mg\sin\theta} - F_f$$

אבל נסתכל על מרכז המסה, כח הכבידה אינו מפעיל מומנט, לכן התאוצה היחידה היא מכח החיכוך:

$$N_c = \underbrace{F_f R}_{\text{כח × כוח}} = \underbrace{I}_{\text{מדד שני}}\frac{d\omega}{dt}$$

סביב מרכז המסה.

הוא עצם גלגול ללא החלקה, משמע:

$$\omega R = v \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

ולכן: (מהשוואת המומנט):

$$F_f = \frac{I}{R}\frac{d\omega}{dt} = \frac{I}{R^2}\ddot{x}$$

נציב במשוואה עבור תאוצת מרכז המסה:

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2}\ddot{x}$$

ונקבל:

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\theta}{1+I/MR^2}$$

הוא והדרך הנוחה מבינה מציבים את F_f, ניתן לחשב את התנאי להחלקה ללא החלקה.

$$F_f = \frac{I}{R^2}\ddot{x} = \frac{I/R^2}{1+I/R^2}\, g\sin\theta = \frac{I}{MR^2+I}\, g\sin\theta$$

הכוח הנורמלי הוא:

$$F_N = Mg\cos\theta$$

כדי שלא תהיה החלקה

$$\mu_s F_N > F_f$$

מקדם חיכוך סטטי
הוא מאזן שנמצא
בין הגוף לבין המשטח
בנקודת המגע

$$\mu_s \cos\theta > \frac{I}{I+MR^2}\sin\theta$$

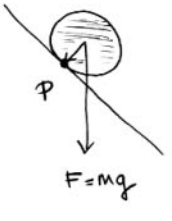
ולכן:

$$tg\theta < \mu_s\left(1+\frac{MR^2}{I}\right)$$

תנאי ללא החלקה.

דרך III: חישוב תאוצת הגוף ע"י מומנט סביב נקודת המגע.

מומנט האינרציה לסיבוב סביב נקודה זו:



$$I_P = I_c + MR^2$$

מומנט שטיינר.

המהירות הזוויתית הידועה סביב נקודה P:

$$\omega = v/R$$

הדגש הזוויתי הוא אז:

$$L_P = I_P\omega = (I+MR^2)\frac{v}{R}$$

סביב סביב P.

המומנט הזוי הפועל הוא:

$$N_P = \underbrace{Mg}_{\text{כח}}\ \underbrace{R\sin\theta}_{\text{מרחק}}$$

שינוי התנע הזוויתי הוא:

$$\frac{dL_P}{dt} = N_P$$

ולכן:

$$(I + MR^2)\frac{v}{R} = Mg R \sin\theta$$

כלומר:

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2}\, g \sin\theta$$

כפי שקיבלנו קודם. עבור גליל חלול $I = MR^2$ $a = \frac{1}{2} g \sin\theta$

גליל מלא $I = \frac{1}{2} MR^2$ $a = \frac{2}{3} g \sin\theta$

עבור כדור $I = \frac{2}{5} MR^2$ $a = \frac{5}{7} g \sin\theta$

חשוב לציין שרסבה היחידה שניתן היה לחשב את התאוצה בעזרת המומנט סביב הנקודה P היא שהנקודה P אינה מאוצה. לא ע"מ מומנט סביב הציר, ניתן להסתכל לפחות בהנחה כזאת על התנועה כסיבוב סביב P. נסתכל R דומה בה לא ניתן לעשות זאת.

<u>חישוב מומנט סביב נקודה מאוצה</u>

נסתכל על גלגל הנמצא על מישור המאוץ בתאוצה a. מהי שווה תאוצת הגלגל?

נפתור בעזרת 2 בשתי דרכים.

דרך I: נסתכל על הכוח שפועל על מרכז המסה ועל המומנט סביב מרכז המסה.

תאוצת מרכז המסה:

$$M\frac{dv}{dt} = \overset{\text{חיכוך}}{F_f}$$

מומנט הכוח סביב מרכז המסה:

$$N_c = F_f R = I_c \frac{d\omega}{dt}$$

לכן:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_f}{M} = \frac{I_c}{MR}\frac{d\omega}{dt}$$

קשר נוסף היא בין ω ל- v ו- a הנובע מכך שמגלגל ללא החלקה.

$$\Delta x = \underbrace{V}_{\text{מהירות הטיה בראש נתון.}} \Delta t - R\Delta\theta$$

יחסית לשקדה.

נחלק ב- Δt ונשאף לאפס:

$$v_c = V - \omega R$$

נגזור לפי הזמן:

$$\frac{dv}{dt} = a - R\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\text{מלמעלה}: \frac{dv}{dt}\frac{MR}{I}}$$

אם נשווה את התאוצות:

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{dv}{dt}\frac{MR}{I} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{a}{1+\frac{MR^2}{I}}$$

והתאוצה הזוויתית:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{MR}{I} = \frac{MR^2/I}{1+MR^2/I}\frac{a}{R} = \frac{MR^2}{I+MR^2}a/R$$

דרך II: נסתכל עם המומנטים סביב נקודה P. אולם הפעם נקודה P איננה אינרציאלית!

בחיינו, גם אם אין תאוצה סיבובית של הגוף יש תאוצה ל נקודת המגע. הדרך להתמודד עם זה, היא לעבור למערכת המאוצה ביחד עם השטח המאוץ. במערכת זו יפעלו כוחות מדומים על הגוף.

שוב התנע הזוויתי סביב הציר החלף P במערכת המאוצה עם השטח (בה הנקודה P איננה מאוצה אם אין סיבוב) נתון ע"י:

$$\frac{dL}{dt} = \sum \underbrace{r_i F_i}_{\text{הכפל עם הסכומה מגלה את חוק המומנט על הגוף.}} = 0 + RMa$$

תיכף יוצא פולג עם גוף

סימן הכח המדומה הוא "הכיוון המנדה לפיצוי" את ω.

אולם: $L = I_P\omega$ ולכן:

$$I\frac{d\omega}{dt} = RMa$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{MR^2}{I_P}\frac{a}{R} = \frac{MR^2}{MR^2+I_c}\frac{a}{R}$$

I_P: סביב ציר P. R: שיינר. I_c: סביב מרכז המסה

כמו כן, מצאנו כבר:

$$\frac{dv}{dt} = a - R\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = a\left(1 - \frac{MR^2}{MR^2+I_c}\right) = \left(\frac{I_c}{MR^2+I_c}\right)a$$