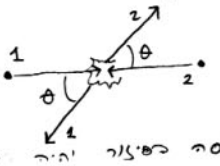
תנע, אנרגיה ומסה בהתחלת פיזיקה (דינמיקה יחסותית)

(תחילה עם מושג התנע, נראה ראשית, שהתנע הקלאסי, המוגדר כ- $\vec{p}=m\vec{v}$ אינו מספק בשמירה יחסותית הלא ומוגדר לא יהיה אובדן נשמר. נמשיך בהפוש אחר אבל שכן נשמר (הוא יהיה $\vec{p}=\text{שמור}$). אחרי נמשיך ונראה כיצד ניתן לתקן את התנע ל- 4-וקטור כך שנוכל לתרגם את התנע ממערכת למערכת. נראה שהרכיב הרביעי של ה 4 וקטור יהיה האנרגיה של החלקיק. כמו כן, נראה כיצד בלעדי אלו קשורים המסה המשתנה של החלקיק וכן שאנרגיה ומסה חד-חד.

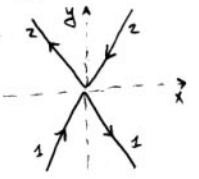
התנע היחסותי

נסתכל על פגיעה בין שני חלקיקים זהים, המשמר אנרגיה (התנגשות אלסטית). במערכת מרכז המסה נראה:



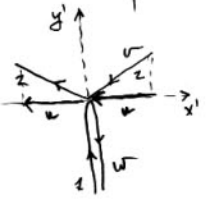
לאחר התנע והאנרגיה נשמרים, במערכת מרכז המסה כיוון יהיה סימטרי ומהירות הבודדה וההתרחקות תהיה אחת. ניתן, כמובן, להסתכל על התנגשות במערכת המסובבת ב- $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}$:

S:



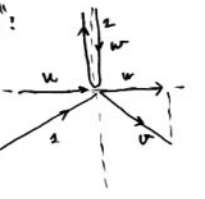
כמו כן, אנו יכולים לעבור למערכת הנעה בכיוון ציר x עם חלקיק מס' 1:

S':



במערכת זו, נניח כי חלקיק מס' 1 מגיע במהירות v (ומוצר במהירות v-). המהירות הרוחבית של החלקיק 2 היא v ולכן רכיב x שלה הוא v-. גם יהיה רכיב y' של מהירות חלקיק מס' 2. מסימטריה של המערכת אנו יכולים להסתכל על מערכת S'' בה לחלקיק 2 אין רכיב מהירות בציר "x:

S'':



במערכת זו, רכיב "y של הנגיעה של חלקיק 2 יהיה כמובן v- (אז v התגבר), לכן, במערכת S, רכיב y (בעזרת טרנס' ט מהירות) יהיה:

$$v_{2y'} = \pm v\sqrt{1-u^2/c^2} \quad (S')$$

בעיה ניתן לראות התנע הקלסי אבן נשמר בכיוון ציר $\hat{x}$ (והוא שווה ל- mw לפני ואחרי ההתנגשות) אולם בציר $\hat{y}$ הוא אינו נשמר:

"תנע הקלסי" בכיוון y במערכת S'

לפני: $$\underbrace{P_{classical,y',0}}_{} = \underbrace{mw}_{\text{חלקיק 1}} - \underbrace{mw(1-w^2/c^2)^{1/2}}_{\text{חלקיק 2}} \neq 0$$

אחרי: $$P_{clas,y',1} = -mw + mw(1-u^2/c^2)^{1/2} = -P_{clas,y',0}$$

כלומר, הביטוי עבור התנע הקלסי בכיוון ציר y' אינו שווה לאפס והוא מתהפך סימן עם ההתנגשות לכן הוא לא נשמר. האם יש ביטוי שכן נשמר?

נתבונן בביטוי מהצורה: $\vec{p} = f(v)m\vec{v}$

דרך אחת להסתכל על זה, הא שהמסה תלויה במהירות. $\vec{p} = m(v)\vec{v}$

והמטרה שלי היא למצוא את כמות המסה במהירות,

הלוך וחזור

במערכת S', שינוי התנע של חלקיק מס' 1 הוא: $\Delta p'_1 = -2m(w)w$

שינוי התנע של חלקיק מס' 2 הוא: $\Delta p'_2 = 2m(v)w\sqrt{1-u^2/c^2}$

אם הגוף שנקרא לו תנע הוא בעל שימור, הוא אמור להשאר, ולכן אנו רוצים שיתקיים:

$$\Delta p'_1 + \Delta p'_2 = 0 \Rightarrow m(w)w = m(v)w\sqrt{1-u^2/c^2}$$

כלומר:

$$\frac{m(w)}{m(v)} = \sqrt{1-u^2/c^2}$$

נקרא לזה "מסת המנוחה" המתקבלת מ- $v=0$.

נראה מה קורה עבור $w \ll c$. במקרה כזה, אנו אמורים לקבל ש $m(w) \to m(0) \equiv m_0$

ובאותה צורה: $m(w) \to m(u)$. כלומר:

הגדרנו ש כך מאד

$$\frac{m_0}{m(u)} = \sqrt{1-u^2/c^2} \Rightarrow m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma m_0$$

ניתן לראות (ע"י הרבה אי מתמטיקה) שביטוי זה עבור $m(u)$ משמר את הכנע

גם עבור w כללי.

מה קבלנו? ראינו שגם אנו נדרשים להגדיר אופן הפעולה לתנע הקלאסי ושנשמר ושנשמר בהתנגשות יחסותית, על אופן זה להיות: $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$. מעניין כי בפיזיקה הניחנו שגם מסתכלים על מערכות פירים שנעות הקבועות ביחס לחוק אך הפיסיקה היא אקווילנטית. תנאי זה הכרחי לשימור הגופן הנ"ל. בעיות אחרות - ניסויים שיראו לנו כי התנע היחסותי נשמר אקווילנטיים לקביעה כי תחת טרנס' לורנץ הפיסיקה זהה (כפי שהפיסיקה הקלסית אינה משתנה תחת טרנס' גליליאו)

התנע היחסותי כאורך וקטור

אנו ראינו כי הוקטור התלת-מימדי $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ נשמר בהתנגשות (למשל). אולם, כאשר מעניין אותנו לבצע כיבוי הגופן נראה בנערכות שונות. למשל, תחת טרנס' גליליאו מערכת אחת למערכת שניה הנעה במהירות V היו:

$$\vec{p}_{clas}' = \vec{p}_{clas} - m\vec{V},$$

כדי למדוד את הטרנס' של $\vec{p}$ ממערכת יחסותית אחת לשניה, נגדיר אותו כחלק מאורך-וקטור. כדי להבין כיצד לעשות זאת, נסתכל על הגודל $\vec{p}^2$:

$$\vec{p}^2 = m_0^2 \gamma^2 v^2 = m_0^2 \frac{1}{1-\beta^2} v^2 = m_0^2 c^2 \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} =$$

$$= m_0^2 c^2 \left\{ -1 + \frac{1}{1-v^2/c^2} \right\} = -m_0^2 c^2 + m^2 c^2 \gamma^2$$

ולכן:

$$\vec{p}^2 - m^2 c^2 \gamma^2 = -m^2 c^2$$

נזכור שמ c כדי שמימדי כל הגדלים יהיו זהים.

כעת, אם היה לנו וקטור (x, y, z, ct) ולפי תחת טרנס' לורנץ הגודל $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ נשאר קבוע (זהו "אורך" מוכלל של 4-וקטור הנשאר קבוע תחת הטרנספורמציה של לורנץ)

לכן, אם נגדיר את הרבעיה $(p_x, p_y, p_z, m\gamma c)$ אזי טרנס' לורנץ ישמרו על הגודל

$$\vec{p}^2 - m^2 c^2 \gamma^2 = -m^2 c^2$$

בכל המערכות שנפתר. לכן, נגדיר את הרבעיה הזו כ- 4-תנע.

$$p = (4\text{-תנע}) = (m_0\gamma v_x, m_0\gamma v_y, m_0\gamma v_z, m_0\gamma)$$

והיא תסבור טרנס' כמו ה- 4-וקטור של הקואורדינטות.

9.1.04

דרך הסתכלות נוספת: הקשר בין הזמן t במערכת S לבין הזמן העצמי τ שמחוג הזמן הנמדד במערכת נמצא לחלקיק נתון הוא: $dt = \gamma d\tau$

ולכן:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \frac{dx}{dt} = m_0 \frac{dx}{d\tau}$$

בהינתן, התנע החסרי הוא כמו התנע הקלסי אם המהירות נמדדת ביחס לזמן שבין הזמן העצמי של החלקיק ולא הזמן הנמדד במערכת S. את האורך-תנע ניתן לכתוב בצורה:

$$p = (\vec{p}, \gamma m_0 c) = \gamma m_0 \frac{d}{dt}(\vec{r}, ct) = m_0 \frac{d}{d\tau}(\vec{r}, ct)$$

כי $\frac{dt}{dt} = 1$

הלת ו- $(\vec{r}, ct)$ עובר כמו - 4-וקטור ממערכת למערכת והלת ו- $m_0 \frac{d}{d\tau}$ אינו תלוי המערכת, גם p המוגדר למעלה הוא 4-וקטור העובר ממערכת למערכת בעזרת טרנס' לורנץ.

הגשמעות של האובר הרביעי ב- 4-תנע:

האובר הרביעי ב- 4-תנע הוא: $\gamma m_0 c$. למה הוא שווה במהירויות נמוכות?

$$\gamma m c = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc\Big(\underbrace{1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots}_{\text{פיתוח טור טיילור}}\Big) = m_0 c + \frac{1}{c}\frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

כלומר $\gamma m_0 c$ נראה כ- m_0 פחות c כפול האנרגיה הקינטית של החלקיק. לכן, נקרא לגודל $\gamma m_0 c^2$ כאנרגיה של המערכת:

$$\gamma m_0 c^2 = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{אנרגיית מנוחה}} + \underbrace{(\gamma - 1) m_0 c^2}_{\text{אנרגיה קינטית}} \simeq m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

כלומר, האובר-תנע הוא: $p = (\vec{p}, \frac{E}{c})$ הלת והוא אובר וקטור, הוא עובר טרנס' כמו 4-וקטור בלורנץ:

$$\begin{cases} p'_x = \gamma\left(p_x - \beta \frac{E}{c}\right) \\ p'_y = p_y \\ p_z = p'_z \\ E' = \gamma\left(E - \beta c p_x\right) \end{cases}$$

המשמעות של המסה המשתנה — על מסה ואנרגיה.

נסתכל על שני חלקיקים הנעים זה לכיוון זה

$$\xrightarrow{\quad} \qquad p = m(v)v$$

$$\xleftarrow{\quad} \qquad p = \gamma m_0 v = v \cdot m(v)$$

ונניח מתחברים לדם יחסון. (למשל פרוטון וניוטרון), ונלמדים איך חדש. הוא בדרך יציב

על האיור החדש (לאחר איבוד אנרגיה) יהיה:

$$P_{TOT} = (\gamma m_0 v, 0, 0, \gamma m_0 c) + (-\gamma m_0 v, 0, 0, \gamma m_0 c) =$$

$$= (0, 0, 0, 2\gamma m_0 c)$$

כלומר, למרות שמסת האיור אמורה להיות $2m_0$, המסה בפועל של האיור שנוצר היא $2\gamma m_0$! בהינתן, האיור החדש שלנו אמנם מורכב מ- $2m_0$ גם אם אנרגיה שהיתה האנרגיה הקינטית בהתחלה $(2(\gamma-1)m_0c^2)$. שהפכה בחלקה לאנרגיית קשר וחלקה נשארה אנרגיה קינטית של המרכיבים. אנרגיה פנימית כזו, יש לה אינרציה! והיא מתבטאת כמו מסה!!! כמה ניתן לבדוק לדוגמה את הביטוי של אינשטיין: $E = m(v)c^2 = \gamma m_0 c^2$

דוגמא: מסת הפרוטון:

הפרוטון מורכב משלושה קווארקים: שני up ואחד down (ניוטרון מורכב מ-up אחד ושני down).
הערכות כולם הן שמסת ה- up היא כ- 1.5-4 MeV ואילו מסת ה- down היא 4-8 MeV אולם, מסת הפרוטון היא 938 MeV, דהיינו רוב "המסה" של הפרוטון היא האנרגיה הקשורה שם. הקשר הזה מהווה את רוב מסת הפרוטון!

דוגמא נוספת: היתוך גרעיני. מסה של אנרגיה פרוטונים: $4m_p = 4 \times 938\ MeV = 3752\ MeV$

מסה של גרעין הליום $m_{He^4} = 3726\ MeV$

המסה של גרעין הליום נמוכה יותר, המתן ואנרגיית הקשר היא שלילית (הגרעין הפרוטונים לתוך הליום, נקבל תגובה אנרגיה:

$$\Delta E = 4m_p - m_{He^4} = 26\ MeV$$

מסה כלה להפוך לאנרגיה (ראה: פצצת מימן!)

הישור הניסוי לשימור תנע-אנרגיה יחסתי (המלא, שהכיסדה אקוולנטית בין מערכת אינרציאלית המופרדות ע"י טרנס לורנץ) הוא הניסוי של ארתור קומפטון ב- 1923 (Arthur Compton). (וצבה הפרס נוסף ב- 1927) שמראה שה- 4 תנע נשמר והוא מסביר גם שהאור הוא קוואנטי (בנוסף לתאורי גל).

בניסוי, קרן אור (פוטון) מתנגש באלקטרון והלה מתפזרים.

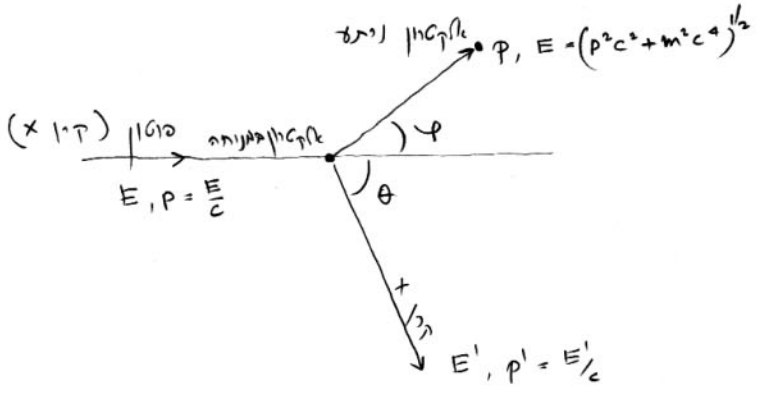
* ובכן, מה התנע של פוטון?

מתוך הקשר: $\vec{p}^2c^2 - E^2 = -m_0^2c^4$ ברור שהחלבה $m_0=0$ נותנת: $p = \frac{E}{c}$

(באופן מעניין, התנהגה האלקטרומגנטית של מקסוול ניתנת גם לאור שהקשר בין התנע שהרס לאנרגיה היו: $p = E/c$!)

פיזור קומפטון.

נסתכל על הבעיה בהפוטון, בעל אנרגיה E פוגע באלקטרון במנוחה, לשם נוחות נסובב את מערכת הצירים בהתחלה. של הפוטון כך $\hat{x}$.



בניסוי רואים שקרני ה-x מתפזרות בזוית θ (שכולה לחלוטין שונה מפיזור לפיזור) ואילו האלקטרונים נעצרים בזוית φ (התלויה ב- θ בלבד). אנרגיית הפוטונים המפוזרים שונה מאנרגיית הפוטונים הפוגעים (ותלויה ב- θ).

שום חשבון קלסי לא נתן את הקשר $E'(E,\theta)$ שנצפה.

9.1.05

שימור תנע בכיוון הקרן נותן:

$$\frac{E}{c} = \underbrace{\frac{E'}{c}}_{\text{תנע פוטון (אחרי פיזור)}} \cos\theta + \overbrace{p}^{\text{תנע אלקטרון}} \cos\varphi$$

שימור תנע בכיוון הניצב לקרן:

$$0 = \frac{E'}{c} \sin\theta - p \sin\varphi$$

כמו כן, שימור אנרגיה נותן:

$$m_0c^2 + E = (p^2c^2 + m_0^2c^4)^{1/2} + E'$$

שני משוואות התנע נותנות:

$$p^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \left(\frac{E}{c} - \frac{E'}{c}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 \sin^2\theta$$

דהינו:

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - 2\frac{EE'}{c^2}\cos\theta$$

מצד שני, את p^2 ניתן למצוא משימור אנרגיה:

$$(m_0c^2 + (E-E'))^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

(פתחו את הריבוע: $m_0^2c^4 + 2m_0c^2(E-E') + (E-E')^2 = p^2c^2 + m_0c^4$)

לכן:

$$p^2 = \left(\frac{E-E'}{c}\right)^2 + 2m_0(E-E')$$

נשווה את שני הביטויים ל-p (משימור אנרגיה ומשימור מסה) ונקבל:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - \frac{2EE'}{c^2}\cos\theta = \underbrace{\left(\frac{E-E'}{c}\right)^2}_{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - 2\frac{EE'}{c^2} + \left(\frac{E'}{c}\right)^2} + 2m_0(E-E')$$

כלומר,

$$-\frac{2EE'}{c^2}\cos\theta + \frac{2EE'}{c^2} = 2m_0(E-E')$$

או:

$$\frac{E-E'}{EE'} = \frac{(1-\cos\theta)}{m_0c^2}$$

או:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta)$$

הביטוי הנ"ל אופיר ניסויית.

כמו כן, ההתאמה היתה גם עם אורך הגל של הפוטונים, אם כתבים

$$E = \underbrace{h}_{\text{קבוע פלנק = קבוע של הטבע.}}\underbrace{\nu}_{\text{תדירות הפוטון.}} = h\frac{c}{\lambda}$$

כלומר:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

על ההתאמה בין הפרש ה-E לצורת הפיזור וגם הקשר בין ההתנהגות הגלית (אורך הגל) להתנהגות החלקיקית (אנרגיה של פוטון) קיבל קומפטון פרס נובל (1927).