"פרק" ראשון: חומר רקע

- רקע, מה זה פיסיקה? (לא ממש למבחן, עד סוף התואר תדעו בכל מקרה).
- מבוא מתמטי:

1. סקלרים ווקטורים. פעולות בסיסיות (חיבור, חיסור הכפלה בסקלר)
2. המכפלה הסקלרית והווקטורית בין וקטורים.
3. גזירה של וקטורים
4. מערכות צירים (קרטזית, פולרית, צילינדרית, כדורית)
5. מהירות ותאוצה במערכת פולרית.
6. אינטגרציה של וקטור.

פיסיקה מבוא:

הפיסיקה הינה מדע נסיוני, הדן בחוקים הבסיסיים המתארים את התנהגות הטבע.

מכניקה קלסית

מתארת את החוקים הבסיסיים להתנהגות חלקיקים "קלסיים" (לא יחסותיים ולא קוונטיים) בהשפעת כוחות נתונים.

לא יחסותי: אופייני $v \ll c$ (מהירות האור)

לא קוונטי: $p \cdot \Delta x \ll \hbar$ (קבוע פלנק)

יחסות פרטית

הכללה של המכניקה הקלסית ל- $v \lesssim c$

תורת הקוונטים

הכללה ל- $\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar$: חומר מתנהג בצורה גלית.

התנהגות החומר (תחת כוחות נתונים)

הכללות!

מכניקה סטטיסטית ותרמודינמיקה:

טיפול במערכות בעלות מספר רב של חלקיקים

מכניקה סטטיסטית: אספקטים מיקרוסקופיים

תרמודינמיקה: אספקטים מקרוסקופיים.

הידרודינמיקה:

דנה במערכות מרובות חלקיקים (גזים ונוזלים) עם תנועה מקרוסקופית (זרימה).

הכוחות הבסיסיים בטבע:

- כבידה
- אלקטרומגנטי (חשמלי + מגנטי).
- כוח גרעיני חזק
- כוח הגרעיני החלש

לא מובנים במכניקה קלסית היות והטווח שלהם קצר.

תורה אלקטרומגנטית:

מתארת את התנהגות השדה החשמלי והמגנטי

כבידה

יחסות כללית

הרחבת יחסות פרטית ע"י הכללת הכבידה

(כבידה = עקמומיות המרחב)

קוונטיזציה שניה = תורת השדות ("חלקיקים")

קוונטיזציה של השדות (לדוגמא E,B) במקום שהשדות "נתונים"

$\Downarrow$

QED

הכללת שדות הכוח החזק $\Rightarrow$ QCD

ישום:

- מדע מוצק
- פיסיקה אטומית
- פסיקה גרעינית
- אסטרופיסיקה
- ביו פיסיקה

וכו'...

מכניקה קלסית

מאה 17 : עד ניוטון, מעט מאד נסיונות. הראשון היה למעשה גלילאו שחקר גופים נופלים, תנועה בליסטית וכו'...
והנ"ע במפורש את רעיון הנסיון לאישור התאוריה
1687 – פרסום "הפרנקיפיה" Principia
ניסוח ראשון של המכניקה בעזרת כוחות ע"י ניוטון.
Liebnitz - בן דורו של ניוטון. הביא את מושג האנרגיה הקינטית.

מאה 18 : Bernoulli – עקרון שימור האנרגיה
Euler – ניסוח בעזרת משוואות דיפרנציאליות.
Lagrange – ניסוח המכניקה בעזרת אנרגיות וללא כוח
מאה 19 : Hamilton – ניסוח נוסף ללא כוחות. שימוש לתורת הקוונטים.

= מכניקה אנליטית = [illegible]

יחידות:

גדלים פיסיקליים מכילים יחידות. למשל, מרחק אינו יכול להיות מבוטא בעזרת מספר בלבד 17 ק"מ או $1.7\times10^5 cm$. לכן חשוב מאוד להקפיד שהיחידות תהיינה רשומות כשיש צורך. (לא לכתוב 17 או x m אלה רק 17m).

* עבודה שימושית: אם בבעיה ישנם מספרים עם יחידות, כדאי להציבם בשלב האחרון ולא הראשון. זאת מפני שקל הרבה יותר לבדוק את הגיון התשובה הסופית.

* בעזרת יחידות ניתן לבדוק נכונות התשובה (או לפחות למצוא הרבה טעויות).

דוגמא:

מחשבים את זמן המחזור של כוכב לכת מסביב לשמש ומתקבלת התשובה:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_\odot}}$$

* האם התשובה הגיונית? אם היינו מציבים את ערכי r, G ו-$M_\odot$ בתחילת הפתרון (בהנחה שאלו נתונים) כי אז לא היינו יכולים לבדוק ש-r גדול יותר מגדיל את P (הגיוני). ו-$M_\odot$ או G המגדילים את כח המשיכה, מקטינים את P (הגיוני - הגוף צריך להסתובב מהר יותר כדי שהכח הצנטריפוגלי יאזן).

* מה היחידות?

$$G = 6.67\times10^{-8}\frac{cm^3}{gs^2} \Rightarrow [P] = \underbrace{[2\pi]}_{\text{חסר יחידות}}\frac{cm^{3/2}}{cm^{3/2}}$$

יחידות נפוצות:

- Système International : SI (= MKSA)
  meter, kg, second, ampere
- cm, gr, second : cgs

מכניקה - שימושי (במחשבים . יותר נח.
מידה . הרבה cgs
גאוסית ונגטיות :

<u>ישנן שיטות נוחות פחות:</u>

השיטה האנגלית: שיטה של מעוניסטים ואמריקאים.

<u>אלו נוחות יותר:</u>

לפעמים עובדים ביחידות בהן $c=1$, $\hbar=1$ ו- $G=1$.

הקדמה מתמטית

<u>סקלרים ווקטורים:</u>
* הגדרה, סימון
* פעולות בוקטורים – חיבור, מכפלה, תכונות.
* גזירה ואינטגרציה של וקטורים.
* מערכות צירים – קרטזית, פולרית, גלינדרית.

<u>סקלר:</u> גודל פיסקלי המוגדר בעזרת "גודל" בלבד, ללא כיוון (מסה, אנרגיה)

<u>וקטור:</u> גודל פיסקלי המוגדר בעזרת "גודל" וכיוון. שימו לב כי המיקום של הוקטור (למשל היכן כח פועל או היכן המכונית בעלת המהירות הנתונה) איננו חלק מוקטור הכח או וקטור המהירות).
(דוגמאות: כח, מהירות, תנע ומיקום – כחלק מוקטור מיקום).

<u>ניתן להגדיר בנוסף:</u>

<u>פונקציה וקטורית</u> (שדה וקטורי): פונקציה המתאימה גודל וקטורי בכל נקודה במרחב
(לדוגמא: שדה כבידה, שדה חשמלי, מהירות הזרימה בנוזל וכו'...).

<u>פונקציה סקלרית:</u> פונקציה המתאימה בכל נקודה במרחב <u>גודל</u> בלבד
(לדוגמא, לחץ בשדה זרימה, צפיפות אנרגיה בשדה חשמלי).

<u>סימונים:</u>

<u>סקלר:</u> "סתם" אות a, k וכו'.. (בספרים, אות ב- italics).

<u>וקטור:</u> $\underline{A}$, $\vec{A}$ (מספרים אות ב- bold).

<u>הגודל של וקטור:</u> $A \equiv |\vec{A}|$

<u>וקטור יחידה בכיוון $\vec{A}$</u>: (וקטור שאורכו 1 וכיוונו $\vec{A}$): $\hat{A}$

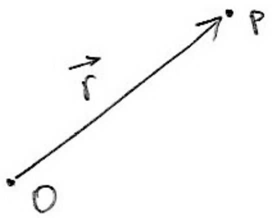
מתקיים כמובן: $|\hat{A}| = 1$

$$\vec{A} = \hat{A}\,|\vec{A}|$$

<u>הערה:</u> סקלרים ווקטורים הם סוגים פרטיים של <u>טנסורים</u> (סקלר - גודל 0 מימדי", וקטור 1 מימדי, מטריצה – אותה תראו עוד מספר שבועות, גודל דו-מימדי וכו').

<u>רק לידע כללי</u>!

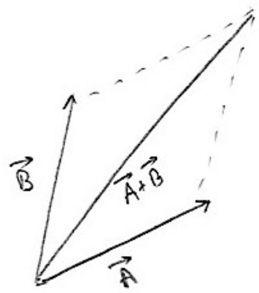
<u>וקטור המקום:</u> $\vec{r}$ הוא וקטור המחבר בין ראשית הצירים (מסומנת בדר"כ ב-O) לבין מקום נקודה נתונה P.



<u>חיבור וקטורים:</u>

חיבור מוגדר ע"י האלכסון של המקבילית המתקבלת כששני הוקטורים יוצאים מאותה הנקודה, כמתואר בציור.

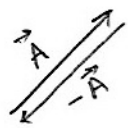
ניתן לראות מהציור כי $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$. דהיינו,
<u>חיבור וקטורי הוא קומוטטיבי = חילופי</u>



<u>חיסור וקטורי:</u>

$-\vec{A}$ מוגדר כוקטור $\vec{A}$ עם אותו הגודל אך כיוון הפוך.

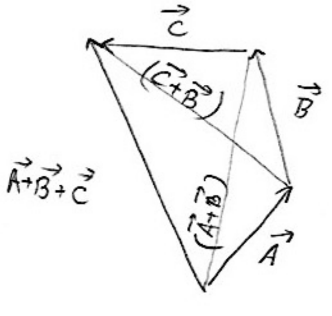
ברור מהציור כי: $\vec{A}+(-\vec{A})=0$



<u>אסוציאטיביות:</u> חיבור וקטורי מקיים:

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

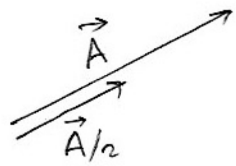
זאת ניתן לראות מהציור.



<u>הכפלה בסקלר:</u>

הכפלת וקטור בסקלר נותנת וקטור חדש באותו הכיוון אך הגודל מוכפל בערך הסקלר.
גודל שלילי ← כיוון הפוך.

$$(-1)\vec{A}=-\vec{A}$$

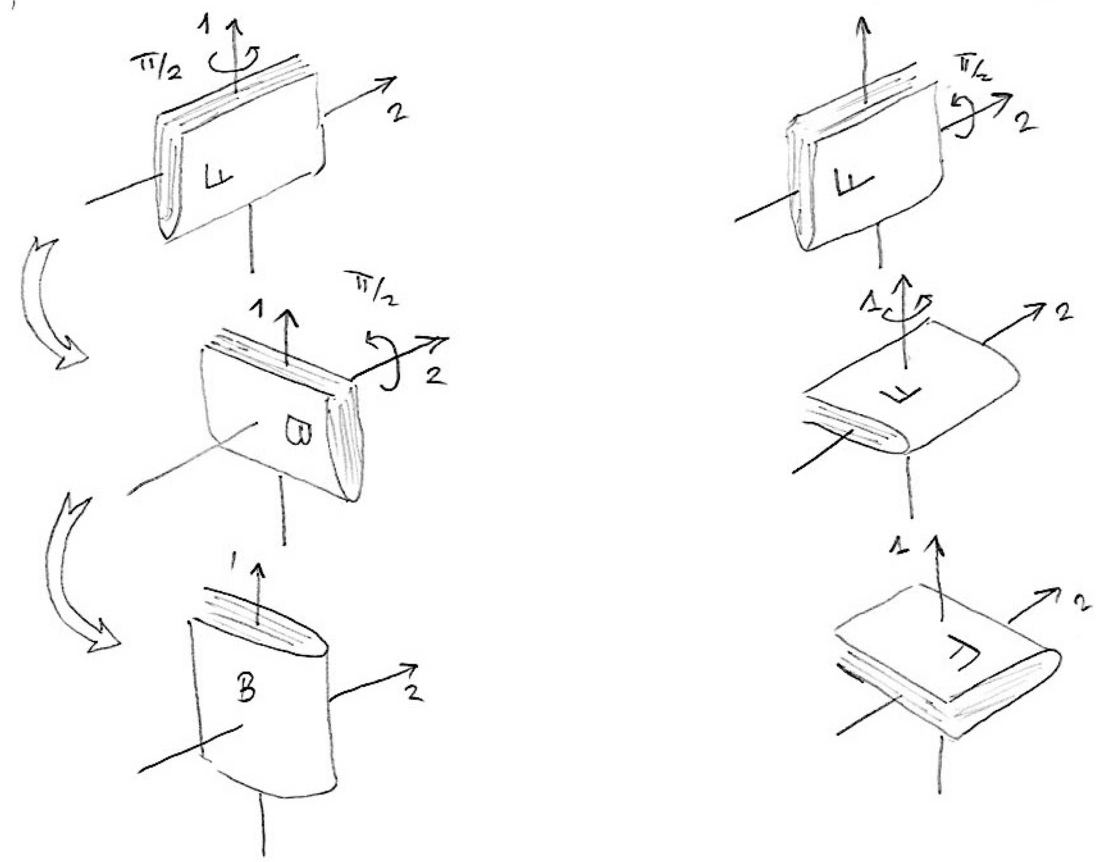


<u>דוגמאות לוקטורים</u>

* הסחה (displacement) מקיימת את התנאים לוקטורים (סכום הסחות לפי חוק המקבילית וכו').
* בנ"ל גם כוחות (נראה הדוגמה בכיתה).

דוגמאות לגדלים שאינם וקטורים:

* סיבובים סופיים במרחב - ניתן להגדיר סיבוב ע"י כיוון (ציר סיבוב) וגודל (זווית הסיבוב). אולם הסיבובים אינם חילופיים ולכן לא ניתן לתארם ע"י וקטור. נסובב ספר, פעם סביב ציר 1 ואח"כ ציר 2 ופעם בסדר הפוך:



סיבוב סביב ציר 1 ואח"כ סביב ציר 2.

* <u>קיטוב של אור</u>: היות ואור מקוטב בכיוון אחד או בכיוון ההפוך, הוא אותו המצב קיטוב אינו מתנהג כמו וקטור.

↕ ↔

שני המצבים: מצב 1 מצב 2.

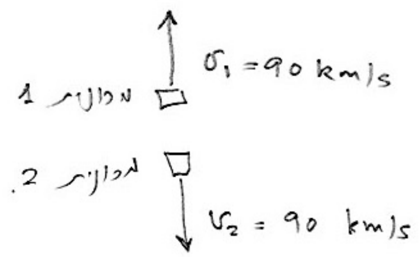
<u>הערה לידע כללי</u>: קיטוב חוזר לאותו המצב לאחר סיבוב ב-180°. וקטור חוזר לאותו המצב לאחר סיבוב ב-360°. ספינור חוזר לאחר 720°...

חיבור וקטורי — דוגמאות

1. נתון גוף הפועל עליו כוח של 5 דין ימינה ו 5 דין שמאלה. מהו הכוח הכולל?

<u>תשובה</u>: היות וכוח הוא וקטור, יש לחבר את הכוחות בצורה וקטורית. הוקטורים $\vec{F}_1 , \vec{F}_2$ שווים בגודלם אך מנוגדים בכיוונם ולכן: $\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$.

2. מכונית נעה צפונה במהירות של 90 קמ"ש ומכונית נוספת נעה דרומה במהירות של 90 קמ"ש. מהי המהירות היחסית של המכונית הראשונה יחסית למכונית השניה?



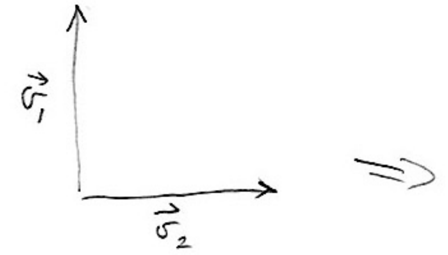
<u>תשובה</u>:
$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

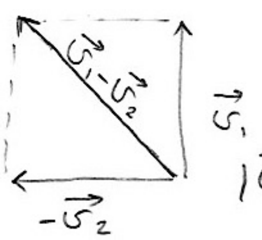
(בדיקה - אם v_2 היה באותו כיוון של v_1, אז היתה מהירות יחסית 0! אם $\vec{v}_2=0$, המהירות היחסית היא מהירות המכונית הראשונה).

היות ו- $v_2=v_1$ (בגודל בלבד) מתקבל:
$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$$
המהירות היחסית של מכונית 1 יחסית למכונית 2 היא 180 קמ"ש צפונה.

3. כנ"ל, רק שמכונית 2 נעה מזרחה ב- 90 קמ"ש.

<u>תשובה</u>:
$$v_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$





נשרטט את $\vec{v}_1-\vec{v}_2$.
אנו רואים כי נוצרת מהירות יחסית של
$$|\vec{v}_{rel}|=\sqrt{2}\cdot 90 \text{ km/s} = 127.3 \text{ km/s}$$

כיוונה הוא צפון-מערב. (מכונית 2 תראה את מכונית 1 נעה בכיוון צפון מערב).

מכפלות בין וקטורים:

ישנן מספר דרכים להגדיר מכפלה בין וקטורים. שתי המכפלות השימושיות ביותר הינן המכפלה הסקלרית (בה מתקבל סקלר המכפלה בין הוקטורים) והמכפלה הוקטורית בה התוצאה היא וקטור.

אנו רוצים להגדיר מכפלה שתקיים מספר חוקים בסיסיים. למשל, מכפלה שתהיה **פילוגית**, כלומר, ש- $\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C})$ יהיה $\vec{A}*\vec{B}+\vec{A}*\vec{C}$ (כאשר "*" הינה המכפלה שלנו.

דוגמא להגדרה שאינה מקיימת את זה ולכן אינה שימושית היא: $\vec{A}*\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|$

כדי לראות ש- $\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C})\neq\vec{A}*\vec{B}+\vec{A}*\vec{C}$ כל שיש לעשות הוא להסתכל על המקרה בו $\vec{B}=-\vec{C}$ במקרה זה:

$$\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C})=0$$
$$\vec{A}*\vec{B}+\vec{A}*\vec{C}=2|\vec{A}||\vec{B}|$$

המכפלה הסקלרית:

המכפלה הסקלרית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ מוגדרת כגודל $\vec{A}$ כפול גודל $\vec{B}$ כפול קוסינוס הזווית ביניהם:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\equiv|\vec{A}||\vec{B}|\cos\underbrace{(\vec{A},\vec{B})}_{\text{הזווית בין }\vec{A}\text{ ל-}\vec{B}}$$

* ראשית, אנו רואים שמערכת הצירים אינה מעורבת בהגדרה.
* שנית, היות ו- $\cos(\vec{A},\vec{B})=\cos(\vec{B},\vec{A})$ (קוסינוס זוית זהה לקוסינוס מינוס הזוית) נקבל כי:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

נוכיח את הפילוגיות של המכפלה עוד מעט.

לפני כן, נסתכל על עוד מספר תכונות.

מכפלה של וקטור בעצמו:

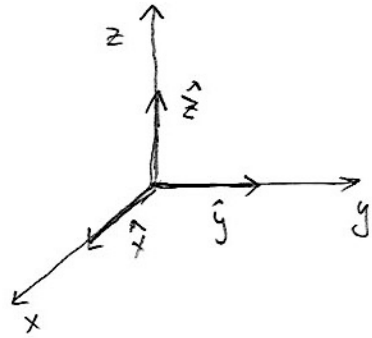
$$\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}||\vec{A}|\underbrace{\cos(\vec{A},\vec{A})}_{=1}=A^2$$

כי הזוית בין A לעצמו היא 0 ו- $\cos(0)=1$.

דהיינו, מכפלת וקטור בעצמו נותנת את גודלו בריבוע.

רכיבי וקטור במערכת קרטזית, וקוסינוסי הכיוון

מערכת הצירים הקרטזית היא המערכת הפשוטה ביותר. היא מוגדרת ע"י שלושה כיוונים קבועים ואורתוגונליים (ניצבים זה לזה):



ניתן להגדיר וקטורי יחידה בכיוון הצירים $\hat{x}$, $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$.

היות ומדובר בוקטורי יחידה, מתקבל:

$$\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$$

היות והצירים ניצבים זה לזה, מתקבל:

$$\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{z}\cdot\hat{x}=0$$

ניתן לרשום כל וקטור בצורה:

$$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$$

מה המשמעות של כל איבר?

$$(\vec{A}\cdot\hat{x})=A_x\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{x})}_{1}+A_y\underbrace{(\hat{y}\cdot\hat{x})}_{0}+A_z\underbrace{(\hat{z}\cdot\hat{x})}_{0}=A_x$$

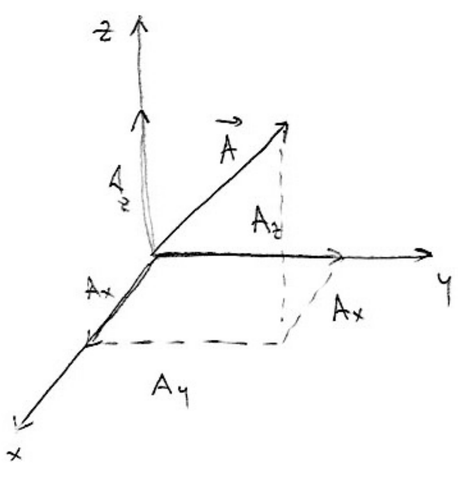
ז.א. A_x הוא ההיטל של $\vec{A}$ בכיוון $\hat{x}$ (כפול הגודל של $\hat{x}$ אך זה שווה ל-1).

A_x נקרא רכיב A בכיוון x, או רכיב x של A.

כיצד קשור גודל A לרכיביו?

$$A=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\cdot(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})}$$

$$=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$



מכפלה סקלרית בעזרת הרכיבים:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})$$

$$=A_xB_x\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{x})}_{1}+A_xB_y\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{y})}_{0}+\dots$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

<u>וקטורים מאונכים:</u> אם $|\vec{A}|\neq 0$ וגם $|\vec{B}|\neq 0$ אזי התנאי $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ פירושו ש- $\cos(\vec{A},\vec{B})=0$ כלומר הזווית היא $\frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2}$ והוקטורים ניצבים זה לזה.

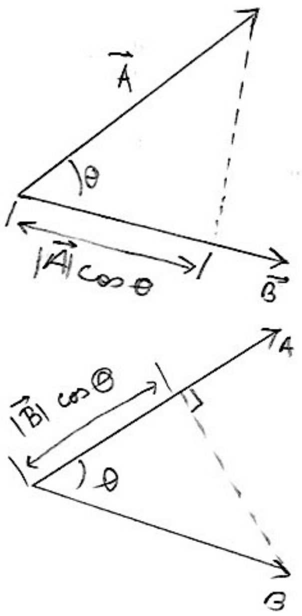
<u>שאלה:</u> נתונים שני וקטורי יחידה $\hat{a}$ ו- $\hat{b}$ כך ש- $\hat{a}\cdot\hat{b}=-1/2$.
מה הזווית ביניהם?

<u>תשובה</u>

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = \underbrace{|\hat{a}||\hat{b}|}_{=1}\cos(\hat{a},\hat{b}) = -1/2$$

$$\cos(\hat{a},\hat{b}) = -1/2 \Rightarrow (\hat{a},\hat{b}) = \cos^{-1}(1/2) = \frac{2\pi}{3} \quad (=120^\circ)$$

<u>משמעות המכפלה הסקלרית</u>



משני הציורים בצד שמאל, ניתן לראות שהגודל:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = |\vec{B}|\cdot(|\vec{A}|\cos\theta)$$

הוא למעשה ההיטל של $\vec{A}$ על $\vec{B}$ כפול הגודל של $\vec{B}$. או, ההיטל של $\vec{B}$ על $\vec{A}$ כפול הגודל של $\vec{A}$:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|(|\vec{B}|\cos\theta)$$

<u>פעולה הפוכה למכפלה סקלרית:</u> אין ז"א אין משמעות לחלוקה בוקטור. למשל, אם יודעים את $\vec{B}$ ואת $\vec{A}\cdot\vec{B}$ לא ניתן לדעת את $\vec{A}$ היות ויש הרבה (אינסוף) אפשרויות ל- $\vec{A}$ לתת את ה- $\vec{A}\cdot\vec{B}$ הנתון.

פילוגיות של מכפלה סקלרית :

נחשב את $\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ וגם את $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})$ ונראה שהללו זהים.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$

מצד שני :

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = A_x(B_x+C_x) + A_y(B_y+C_y) + A_z(B_z+C_z)$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

משפט הקוסינוסים:

נסתכל על הוקטור $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$ ונכפיל בעצמו: $\vec{C}\cdot\vec{C}=(\vec{A}-\vec{B})(\vec{A}-\vec{B})$

בעזרת הפילוגיות $c^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{B} = A^2+B^2-2\vec{A}\cdot\vec{B}$

אולם זה בדיוק משפט הקוסינוסים הידוע מטריגונומטריה:

$$A^2+B^2-2AB\cos\underbrace{\theta}_{\text{הזווית בין A ל-B}} = C^2$$

כמו כן, ניתן לכתוב ביטוי עבור θ:

$$\cos\underbrace{\theta}_{\text{הזווית בין A ל-B.}} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

תרגיל:

נתון הוקטור $\vec{A} = 3\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z}$.

א. מצא את אורכו של $\vec{A}$.

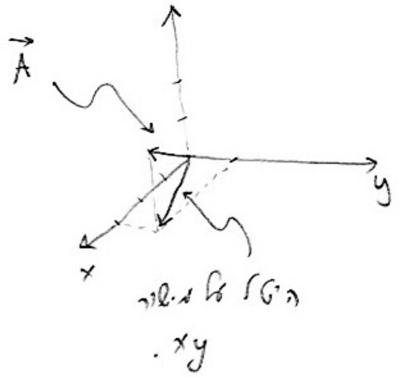
ב. מהו אורך היטלו של $\vec{A}$ על מישור xy?

ג. בנה וקטור במישור xy שיהיה ניצב ל-$\vec{A}$.

ד. מצא וקטור יחידה בכיוון הוקטור מסעיף ג'.

פתרון:

א. אורכו של A נתון ע"י: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$



ב. ההיטל על xy (נקרא לו $\vec{B}$) נתון ע"י:

$$\vec{B} = \vec{A} - (\vec{A}\cdot\hat{z}) = 3\hat{x} + \hat{y}$$

פחות הרכיב בכיוון ציר $\hat{z}$.

אורכו: $|\vec{B}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

ג. אני רוצה למצוא וקטור $\vec{C}$ שיהיה ניצב ל-$\vec{A}$, ז.א. $\vec{A}\cdot\vec{C}=0$.
כמו כן, $\vec{C}$ נמצא במישור xy, ולכן יש לו את הצורה:

$$\vec{C} = C_x\hat{x} + C_y\hat{y}$$

מקבל: $\vec{A}\cdot\vec{C} = 3\cdot C_x + 1\,C_y = 0 \Rightarrow C_y = -3C_x$

אורכו של $\vec{C}$ נשאר חופשי. וקטור אחד, למשל, שמקיים את תנאי זה הוא:

$$\vec{C} = \hat{x} - 3\hat{y}$$

ד. כדי למצוא וקטור יחידה, יש למצוא את אורכו של C:

$$C = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

וקטור היחידה יהיה:

$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\hat{x}-3\hat{y}}{\sqrt{10}} = \frac{\hat{x}}{\sqrt{10}} - \frac{3\hat{y}}{\sqrt{10}}$$

מכפלה וקטורית:

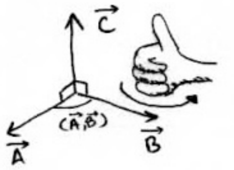
מכפלה שימושית נוספת היא המכפלה הוקטורית, המחזירה וקטור כפי שהשם מרמז.

← אם נתונים שני וקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, אזי הכיוון היחיד שהם מגדירים הוא הניצב למישור שמכיל את שני הוקטורים (או הכיוון ההפוך) לכן,
המכפלה הוקטורית מוגדרת בעזרת כיוון זה:

<u>הגדרה:</u> המכפלה הוקטורית בין וקטור $\vec{A}$ לוקטור $\vec{B}$ נותנת וקטור הניצב למישור המכיל את $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ לפי <u>חוק היד הימנית</u> וגודלו נתון ע"י

$$|A\times B| = |A||B|\sin(\vec{A},\vec{B})$$

<u>חוק יד ימין:</u> מסובבים מ-A ל-B בעזרת יד ימין. כיוון האגודל הוא כיוון $(\vec{A}\times\vec{B})$.



אם היינו "מסובבים" מ- $\vec{B}$ ל- $\vec{A}$ היינו מקבלים כיוון הפוך. ז"א מכפלה וקטורית היא אנטי-קומוטטיבית (אנטי חילופית)

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

מכפלה של וקטור בעצמו תתן 0 $(\sin 0=0)$ $\qquad \vec{A}\times\vec{A}=0$

במערכת צירים ימנית:

$$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$$
$$\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$$
$$\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$$

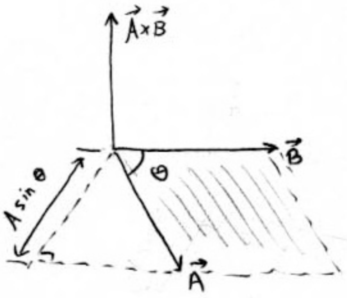
<u>מכפלה וקטורית היא פילוגית</u> (הוכחה בספר או בבית...):

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

<u>מכפל. וקטורית בעזרת רכיבים:</u>

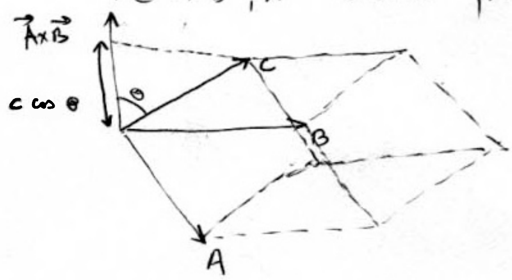
$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}) =$$
$$= A_xB_x\underbrace{(\hat{x}\times\hat{x})}_{=0} + A_xB_y(\underbrace{\hat{x}\times\hat{y}}_{\hat{z}}) + A_yB_z(\underbrace{\hat{x}\times\hat{z}}_{-\hat{y}}) + \dots$$
$$= \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{z}(A_xB_y - B_yA_x)$$

משמעות גיאומטרית:



$\vec{A}\times\vec{B}$ נותן וקטור שגודלו שטח המקבילית שצלעותיה
$\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, וכיוונו ניצב לפני המקבילית.

כמו כן, ניתן לחשב את נפח של מקבילון שצלעותיו A, B ו- $\vec{C}$:



<u>נפח המקבילון:</u> $V=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

$$\left(=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = -\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})\right)$$

שלושה וקטורים נמצאים במישור אם ורק אם: $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=0$ כי אז המקבילון
שנוצר צלעותיהם יהיה בעל נפח אפס.

משפט הסינוסים:

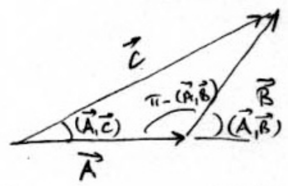
נגדיר $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$, נכפיל ב- $\vec{A}$ בשני הצדדים ונקבל:

$$\vec{A}\times\vec{C} = \underbrace{\vec{A}\times\vec{A}}_{=0} + \vec{A}\times\vec{B}$$

ולפי ההגדרה של מכפלה וקטורית:

$$\cancel{A}C\sin(\bar{A},\bar{C}) = \cancel{A}B\sin(\bar{A},\bar{B})$$

גרפית:



כלומר: $C\sin(\vec{A},\vec{C}) = B\sin(\pi-(\vec{A},\vec{B})) = B\sin(\vec{A},\vec{B})$

ולכן:

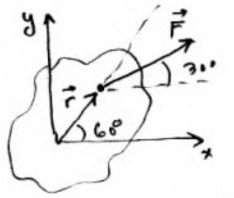
$$\frac{C}{\sin(\vec{A},\vec{B})} = \frac{B}{\sin(\vec{A},\vec{C})}$$

וזהו משפט הסינוסים.

שימושים נפוצים למכפלה וקטורית

* **מומנט סיבוב מוגדר ע"י** :

$$\vec{N} = \underbrace{\vec{r}}_{\text{הסתה מהציר סביבו מחושב המומנט.}} \times \underbrace{\vec{F}}_{\text{הכח שמופעל}}$$



דוגמה: נתון: $r = 50\ cm$
$F = 6\times10^{5} dyne$

מהו מומנט הסיבוב?

ראשית, $\vec{F}$ וגם $\vec{r}$ נמצאים במישור הדף, לכן $\vec{N}$ יהיה בכיוון ניצב לדף. מכלל היד הימנית, כיוון $\vec{N}$ לתוך הדף.

גודלו של $\vec{N}$:

$$|N| = |r||F| \sin \underbrace{(\vec{r},\vec{F})}_{60°-30°=30°} = 50\ cm \cdot 6\times10^{5}\ dyne \cdot 1/2 = 1.5\times10^{7}\ dyne\cdot cm$$

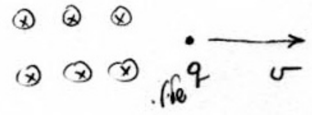
* **כח לורנץ** : הכח שמופעל שדה מגנטי. על חלקיק הוא דוגמה נוספת לשימוש במכפלה וקטורית:

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad (c.g.s)$$

$$\left(\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad (m.k.s)\right)$$

דוגמה. במערכת בציור, לאיזה כיוון יהיה הכח אם החלקיק כאן מטען שלילי?

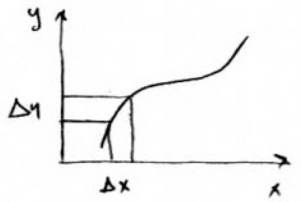
שדה $\vec{B}$ לתוך הדף.



$v\times B$ יהיה בכיוון ↑ אולם המטען הוא שלילי ולכן $\vec{F}$ יהיה כלפי ↓

נגזרות

* נגזרת של פונקציה סקלרית:

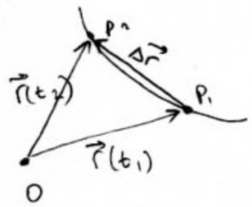


$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

* נגזרת של פונקציה וקטורית:

נסתכל על המסלול שיוצר וקטור המקום $\vec{r}$ כתלות בפרמטר t (למשל זמן!). ז"א בזמן t נתון ערך: $\vec{r}(t)$, ואולם ערך זה משתנה עם t.

נסתכל על שני זמנים: t_1 ו-t_2. $\Delta\vec{r}$ יהיה המיתר המחבר בין שתי הנקודות P_1 ו-P_2 (כמתואר בציור)



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

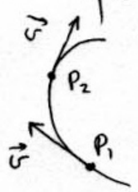
בדומה למקרה החד מימדי של נגזרת של סקלר, מגדירים:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad ; \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

זוהי הנגזרת של וקטור. במידה ומדובר בוקטור ההסטה (displacement) והפרמטר הוא אכן הזמן t, הוקטור המתקבל נקרא מהירות וקטורית (להבדיל מ"גודל המהירות" שהוא הגודל של אותו הוקטור). כיוון הוקטור הזה הוא המשיק למסלול בכל נקודה, וגודלו הוא גודל המהירות בה נע "החלקיק" דהיינו, המרחק אותו היה עובר החלקיק ביחידת זמן.

סימון סטנדרטי לנגזרת לפי הזמן

המהירות: $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$



את הוקטור $\vec{r}$ ניתן לפרק לרכיבים: $\vec{r} = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$

וכמו כן את Δr: $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y} + \Delta z\,\hat{z}$

בעזרת Δr ניתן כעת לרשום את הנגזרת בעזרת רכיבי $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{y} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{z} \right)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

דהיינו, רכיבי המהירות הם:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

שימו לב! הגזירה הנ"ל נכונה רק מפני ש- $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ הם קבועים בזמן. אחרת היינו חייבים לגזור גם את וקטורי הכיוון $\hat{e}$ של מערכת הצירים.

גזירה של מכפלת סקלר בוקטור:

$$\frac{d}{dt}(a\vec{b}) = \frac{d}{dt}\left(ab_x\hat{x} + ab_y\hat{y} + ab_z\hat{z} \right) =$$

$$= \frac{da}{dt} b_x\hat{x} + a\frac{db_x}{dt}\hat{x} + \frac{da}{dt} b_y\hat{y} + a\frac{db_y}{dy}\hat{y} + \cdots$$

$$= \frac{da}{dt}\vec{b} + a\frac{d\vec{b}}{dt}$$

כלל הגזירה דומה לכלל הגזירה של מכפלת שני פונקציות סקלריות.

הכלל מתקיים גם עבור גזירת מכפלה סקלרית ווקטורית:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

וקטור <u>תאוצה</u>: הנגזרת בזמן של $\vec{r}$ נותנת את $\vec{v}$
הזמן של $\vec{v}$ נותנת את התאוצה $\vec{a}$.

סימן סטנדרטי לנגזרת בזמן.

נגזרת שניה.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

וקטורים שונים ניתן לגזור לפי פרמטרים שונים. וקטור המיקום $\vec{r}$ והזמן t הם רק מקרים פרטיים.

תרגיל:

* נתון המסלול:

מטר, שניה

$$r=\left(3\exp(-t/_{1sec}),\ 2\sin(t/_{1s}),\ -5(t/_s)^2\right)m$$

מה המהירות, התאוצה, וגם גודל המהירות?

המהירות:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\left(3m\exp(-t/_{1s})\right)}{dt}\hat{x}+\frac{d\left(2m\sin(t/_s)\right)}{dt}\hat{y}-\frac{d\left(5(t/_s)^2m\right)}{dt}\hat{z}$$

$$=-3\frac{m}{s}\exp(-t/_s)\hat{x}+2\frac{m}{s}\cos(t/_s)\hat{y}-10\frac{m}{s}(t/_s)\hat{z}$$

והתאוצה:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=+3\frac{m}{s^2}\exp(-t/_s)\hat{x}-\frac{2m}{s^2}\sin(t/_s)\hat{y}-\frac{10m}{s^2}\hat{z}$$

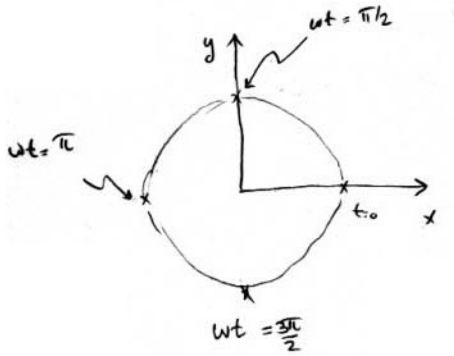
גודל המהירות:

$$|\vec{v}|=\sqrt{9\exp(-2t/_s)+4\cos^2(t/_s)+100(t/_s)^2}\cdot\frac{m}{s}$$

שימו לב כי אנו דנים בגדלים פיסיקליים לכן יש לשמור על היחידות במידה והללו קיימים. כמו כן, פונקציות כמו $\sin(x)$, $\exp(y)$ מקבלים ארגומנט חסר יחידות (אין משמעות ל- $\sin(17m)$. לכן, אם t הוא עם יחידות (למשל זמן...) לא יכול להיות $\sin(t)$. ביטויים אפשריים הם $\sin(t/t_0)$, $\sin(\omega t)$ באשר ω עם יחידות של 1/זמן וכו'...

* תנועה מעגלית: נתון המסלול

$$\vec{r}=\left(r_0\cos(\omega t),\ r_0\sin\omega t,\ 0\right)$$



התנועה המתוארת ע"י מסלול זה הוא מעגל: זאת ניתן לראות מכך שגודלו של $\vec{r}$ הוא קבוע:

$$|\vec{r}|=\sqrt{r_0^2\cos^2(\omega t)+r_0^2\sin^2(\omega t)}=r_0$$

כיוון הסיבוב הוא נגד כיוון השעון.

מהי המהירות?

$$v = \frac{dr}{dt} \Rightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} = -r_0\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r_0\omega\cos(\omega t)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0$$

גודל המהירות:

$$|\vec{v}| = \sqrt{r_0^2\omega^2\sin^2(\omega t) + r_0^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = r_0\omega$$

ז.א.

$$v = \omega r_0$$

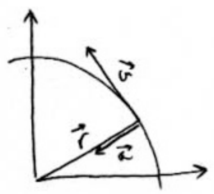
ניתן לראות שווקטור $\vec{v}$ ניצב לווקטור $\vec{r}$:

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = \overbrace{-r_0\omega_0\sin(\omega t)}^{v_x}\,\overbrace{r_0\cos(\omega t)}^{r_x} + \overbrace{r_0\omega\cos(\omega t)}^{v_y}\,\overbrace{r_0\sin(\omega t)}^{r_y} = 0$$

בדרך דומה למהירות, ניתן לחשב את התאוצה:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -r_0\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 r_x \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -r_0\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 r_y \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{a} = -\omega^2\vec{r} \quad (a = -\omega^2 r \text{ או})$$

אפשר גם לרשום: $\omega = \frac{v}{r}$ ולכן: $a = v^2/r$.



$\vec{v}$ ניצב ל- $\vec{r}$ ו- $\vec{a}$ בתנועה מעגלית. $\vec{a}$ פונה פנימה.

ω נקרא התדירות הזוויתית (= קצב שינוי הזווית ברדיאנים): $\frac{rad}{sec}$

P הוא הזמן מחזור. ימדד ב- sec. במחזור אחד, הארגומנט משתנה ב- 2π ולכן:

$$\omega \cdot P = 2\pi \longrightarrow P = 2\pi/\omega$$

f נקרא התדירות, שזה כמה מחזורים (ולא רדיאנים) לשניה, הוא נמדד ב- $1/sec$.

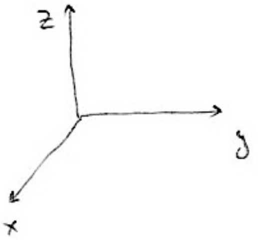
$$f = 1/P$$

את ה $1/s$ מגדירים כ- Hz (הרץ) או כותבים cps (cycles per second).

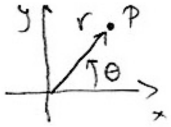
הערה: היות וזווית היא חסרת יחידות, הרדיאן הוא חסר יחידות גם ולכן יכול להופיע או להעלם בלי שיפריע. (למשל, ניתן לרשום $\omega = 17\frac{rad}{sec}$ או $\omega = 17\frac{1}{sec}$, הכוונה בשניהם זהה).

מערכות צירים שימושיות:

א. <u>מערכת קרטזית:</u> המערכת הרגילה עם $\hat{x}$ $\hat{y}$ ו-$\hat{z}$. לפעמים מסמנים $\hat{i}, \hat{j}. \hat{k}$ או רכיב של וקטור r_y או r_j.



ב. <u>מערכת צירים פולרית 2D:</u>

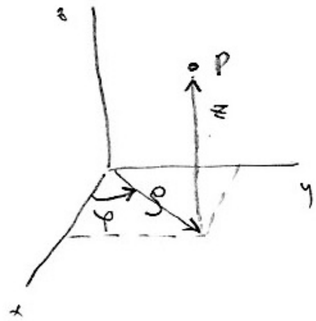


הקשר בין מערכת פולרית לקרטזית דו-ממדית:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

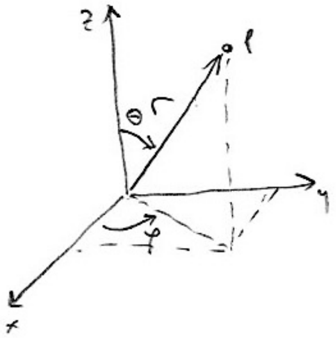
הערה: עבור $x<0$ ישנה בעיה עם ה-$\tan^{-1}$ הזאת ופונקציה זו מחזירה רק $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, ולכן יש להוסיף ל-$\theta$ את π אם $x<0$. (במחשבים יש לרוב פונקציה $\tan^{-1}(x,y)$ שמאפשרת להחזיר θ בתחום הנכון).

ג. <u>מערכת צילינדרית קרטזית:</u>



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

<u>מערכת צירים כדורית:</u>



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

דוגמא: נתונים שני וקטורים במערכת קואו' כדורית:

$\vec{a}_1=(r_1,\theta_1,\varphi_1)$

$\vec{a}_2=(r_2,\theta_2,\varphi_2)$

בקואורדינטות כדוריות, למה שווה $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$? מהי הזווית ביניהם?

פתרון: נבצע את ההכפלה בקואו' קרטזיות ונקבל:

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 = r_1 r_2\left(\sin\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\varphi_2+\sin\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\sin\varphi_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

$$= r_1 r_2\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\underbrace{\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

$$= r_1 r_2\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

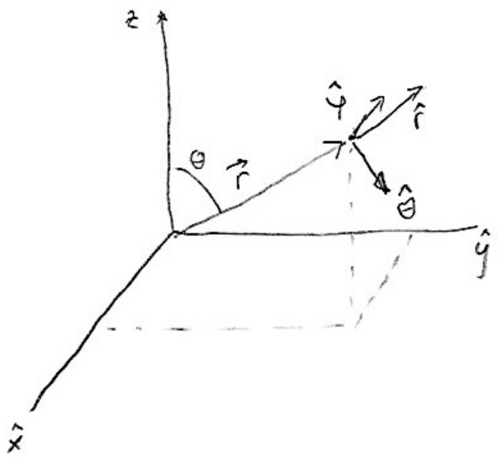
הזווית תהיה:

$$\theta_{12}=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|a_1||a_2|}\right)=\cos^{-1}\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

אגב, בדרך דומה ניתן למצוא ביטוי עבור $\sin\theta_{12}$ ע"י הכפלת $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$ בעזרת "כתיב קרטזי"

וקטורי יחידה בקואורדינטות כדוריות:

במערכת שאינה קרטזית כיוון וקטורי היחידה תלוי במקום!



מהירות ותאוצה בקואורדינטות פולריות:

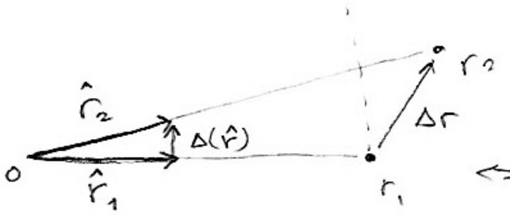
את וקטור המקום ניתן לרשום כ:

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

אם נגזור בזמן:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

מה זה $\frac{d\hat{r}}{dt}$? המשמעות של זה היא קצב השינוי של הכיוון של הוקטור $\hat{r}$:



$$\Longleftrightarrow \quad \Delta(\hat{r}) = \Delta\theta\,\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \lim_{\Delta\hat{r}\to 0}\frac{\Delta(\hat{r})}{\Delta t} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\hat{\theta}\,\Delta\theta}{\Delta t} = \hat{\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

ולכן:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

וקטור התאוצה:

בקואורדינטות קרטזיות:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{z}$$

במערכת פולרית:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\right)$$

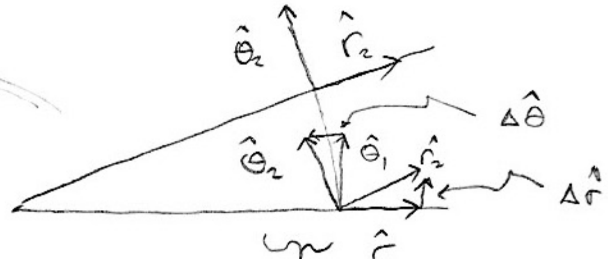
$$= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\theta}}{dt}.$$

למה שווה $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$? הואיל ו- $\hat{r}\perp\hat{\theta}$ ברור ש- $\left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\hat{\theta}}{dt}\right|$

וגם $\frac{d\hat{r}}{dt} \perp \frac{d\hat{\theta}}{dt}$, ז.א.:

$$\Delta\hat{\theta} = \Delta\theta(-\hat{r})$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\hat{r}$$



המשולשים דומים אך מסובבים ב- 90°.

כעת ניתן להציב בביטוי עבור $\vec{a}$ ולקבל:

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\theta}$$

<u>תנועה מעגלית:</u>

$$r = r_0 = const$$

$$\theta = \omega t$$

$$v = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{0}\hat{r} + r_0\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\hat{\theta} = r_0\omega\hat{\theta}$$

$$a = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\underbrace{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\omega^2}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\overbrace{\left[\frac{d}{dt}\underbrace{\left(r^2\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\right)}_{\text{אינו תלוי בזמן.}}\right]}^{=0}\hat{\theta} = -r\omega^2\hat{r}$$

<u>אינטגרציה</u>: הפעולה ההפוכה לנגזרת.

$$\vec{r} = \int\vec{v}\,dt$$

ניתן לבצע אינטגרציה של רכיב בנפרד:

$$x = \vec{r}\cdot\hat{x} = \int\vec{v}\cdot\hat{x}\,dt = \int v_x\,dt$$

<u>דוגמא</u>:

$$\vec{a} = -g\hat{z}$$

$$\vec{v} = \int\vec{a}\,dt \Rightarrow v_x = \int\underbrace{a_x}_{0}dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{קבוע אינטגרציה.}}}{C_1} \equiv v_{x,0}$$

$$v_z = \int a_z\,dt = -\int g\,dt = -gt + C_2 = -gt + v_{z,0}$$

$$x = \int v_x\,dt = \int v_{x,0}\,dt = v_{x,0}t + C_3 = v_{x,0}t + x_0$$

$$z = \int v_z\,dt = \int(-gt + v_{z,0})\,dt = -\frac{gt^2}{2} + v_{z,0}t + \overbrace{C_4}^{z_0}$$

$v_{x,0}, v_{z,0}$ הם המהירות של הגוף ב- $t=0$ והם קבועי האינטגרציה המתקבלים במשוואה עבור המהירות. x_0, z_0 הם המיקום של הגוף ב- $t=0$ והם מתקבלים באינטגרציה עבור x,z. וכך קבלנו את המשוואות של נפילה חופשית.