מבוא לתורת היחסות הפרטית

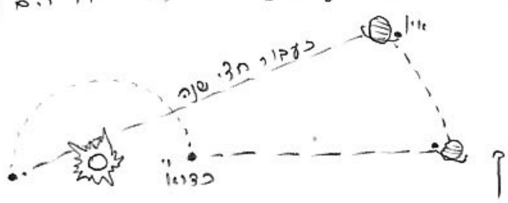
ישנן שתי עובדות תצפיתיות שהובילו לתורת היחסות הפרטית. הן:

1) מהירות האור היא סופית.

2) לאור אין תווך הכרחי על מנת להעביר אותו (כלומר אור אינו כמו גל קול הדורש אוויר או גל ים הדורש שפת מים וכו'..) ולכן אין משמעות למהירות אבסולוטית שלו ואין למה להשוות!

מהירות האור הסופית

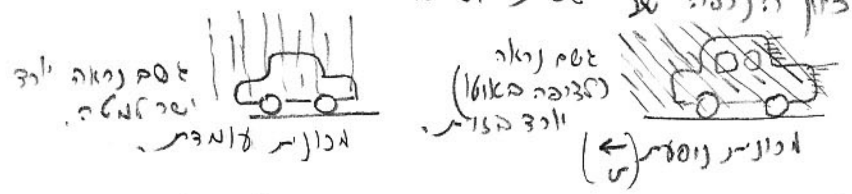
* מעט היסטוריה. הראשון שמדד את מהירות האור והסיק היות שהיא סופית היה הדני Ole Roemer. הוא מדד שהליקויים של איו (הקרוב לצדק מבין ארבעת הירחים הגדולים של צדק) מאחרים ב- 22 דקות (הערך האמיתי הוא 17 דקות) כאשר כדוה"א וצדק נמצאים בצדדים הפוכים של השמש לעומת המצב בו הם באותו הצד. הוא הסיק שפיגור זה נובע מכך שלאור לוקח יותר זמן להגיע מצדק לכדוה"א היות והמרחק גדול יותר כאשר כוכבי הלכת בצדדים השונים של השמש. הפרש המרחקים הוא פעמיים המרחק מכדוה"א אל השמש. ולכן:



$$\underbrace{C}_{\text{מהירות האור}} = \frac{\text{פעמיים מרחק כדוה"א-שמש}}{\text{פיגור זמן}}$$

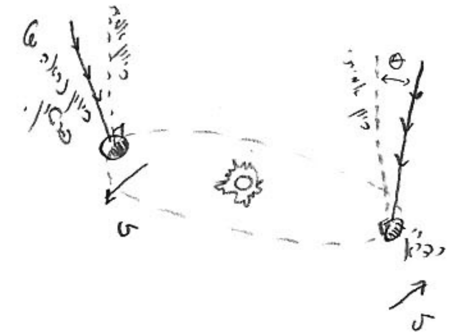
למזלו של רומר, שפרסם את תוצאות מדידותיו ב- 1676, המרחק אל השמש היה כבר ידוע על-ידי קסיני (שמדד ב- 1672 את המרחק אל השמש ע"י כך שמדד את המרחק אל מאדים ע"י מדידת פרלקסה - כלומר, שמשתי נקודות על כדוה"א מאדים נראה בדיוק באותו הכיוון), ובכן, קיבל מהירות אור הקטנה בפקטור של כ- $\frac{22}{17}$, מערכה הידוע היום.

* ב- 1726 מדד האנגלי ג'ימס ברדלי (James Bradley) את מהירות האור ע"י תופעה הקרויה "אברציה" (aberration) בה האור אינו מגיע מהכיוון "האמיתי" שלו. הדבר דומה לכיוון הנראה של טיפות גשם.



בעת נסיעה במכונית (או בריצה בגשם) אני רואה את הגשם נופל בזוית יחסית למאונך (גם אם אין רוח). וזאת מפני שיחסית אלינו לטיפות יש מהירות אופקית בניגוד למהירות האנכית שלהם.

מה שברדלי מדד היא שהאור המגיע מכוכב צפוני (דהיינו ניצב לכיוון התנועה שלנו סביב השמש) משנה את מיקומו



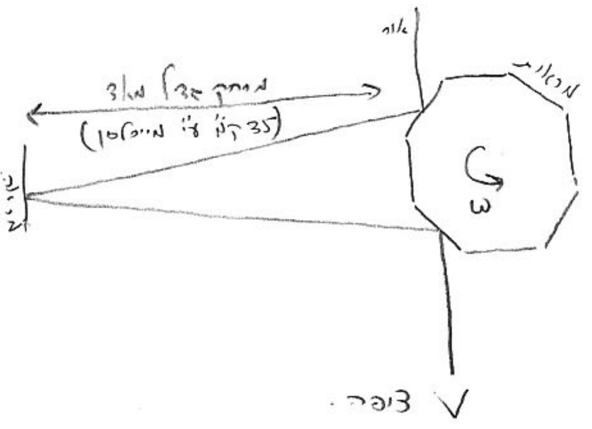
יחסית לקוטב הצפוני, הכוכב נראה נע באליפסה (כמעט מעגל) בקוטר של 40 שניות קשת.

הוא העריך את מהירות האור כי:

$$c = \frac{v(\text{כדה"א})}{\theta} \cong \frac{30\ km/s}{\underbrace{20/(3600\cdot\frac{180}{\pi})}_{\text{20 שניות קשת ברדיאן}}} \simeq 300{,}000\ \frac{km}{sec}$$

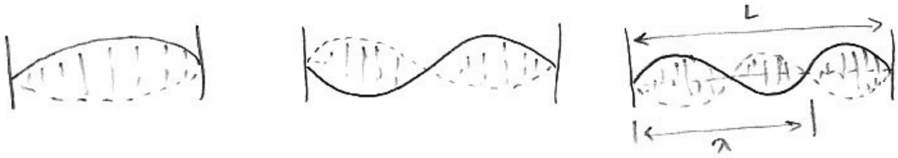
* המדידה הראשונה על כדה"א נעשתה ע"י פיזו (Fizeau) הצרפתי. ב- 1849 הוא בנה מערכת המורכבת מגלגל שיניים מסתובב. קרן אור עוברת דרך הגלגל עוברת מרחק גדול (5 ק"מ במקרה הראשון) וחוזרת חזרה. אם הגלגל שיניים מסתובב במהירות מאוד נמוכה האור יעבור דרך אותו המרווח בין השניים. במהירות גבוהה יותר, הקרן אור החוזרת תפגע בשן ולא תראה. אם הגלגל מסתובב מספיק מהר, הקרן תעבור דרך המרווח הבא. ע"י ידיעת המרחק והמהירות, חישב כי מהירות האור היא: 2.98×10^{10} cm/sec.

* יותר מאוחר, פוקו פיתח שיטה דומה (ששופרה אחר כך ע"י מייקלסון) והיא התבססה על מראות מסתובבות:



במערכת זו, צופה יראה קרן אור רק אם בעת הפגיעה הראשונה והשניה המראות ב- 45° לציר האופקי/אנכי שבמערכת. אם הגלגל מסתובב עליו לעשות בדיוק כפולה של 45° בזמן מעבר האור את המרחק למראה ובחזרה.

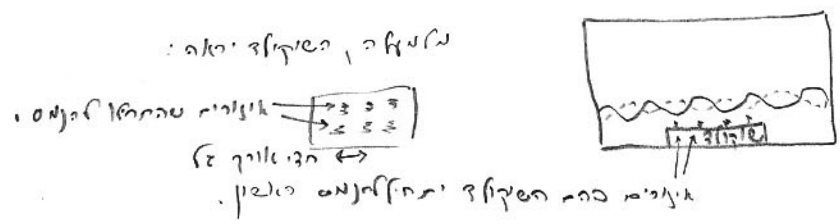
* בשיטות נוספות למדידת c מודדים את התדירות f הדרושה על מנת לקבל גל עומד בגלב. לדוגמא, אם מסתכלים על מיתר קשור בקצותיו, הגלים העומדים נראים:



ואורכי הגל המותרים הם $\lambda=2L$, $\lambda=L$, $\lambda=\frac{2L}{2}$ וכו'... (או $\lambda=\frac{nL}{2}$) אם יודעים את האורך גל א- L (ו- n) ויודעים את התדירות f, מהירות הגל תהיה:

$$c=\lambda f$$

דוגמא מודרנית למדידת c היא מדידת c בעזרת מיקרוגל וחתיכת שוקולד. שמים את השוקולד במיקרוגל (מוציאים את הצלחת המסתובבת אם יש כזו). מחממים את השוקולד עד שמתחיל להנמס. המרחק בין הנקודות הנמסות יהיה חצי אורך הגל.
(כ- 20 שניות)



אנו רואים כי בעזרת אורך וזמן (תדירות) מוגדרים אנו יכולים למדוד את מהירות האור. למעשה, משנות השבעים, מדידות אלו הרבה יותר מדויקות מהדיוק בו אנו יודעים את האורך! ולכן, כיום, מהירות האור מוגדרת (ולא מדודה!) כ-

$$c = 2.99792458 \times 10^{10}\ cm/sec$$

ויחידת האורך (למשל מטר) מוגדרת בעזרת מהירות זו של האור ויחידת הזמן (השניה שהיא מוגדרת ככפולה מסוימת של מעבר אטומי בצזיום).

בכל מקרה, מסקנה ראשונה:

* <u>מהירות האור היא סופית</u>

כעת נדון בשאלה האם ישנה מערכת אבסולוטית למעבר האור.

מערכת אבסולוטית לאור?

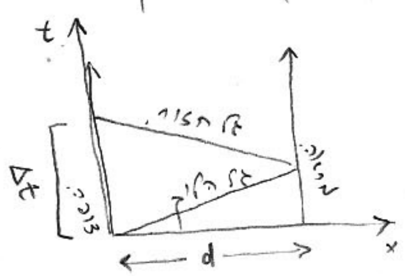
לפי הפיסיקה הקלסית, צפו כי ישנו מדיום המעביר את גלי האור ושיחסית למדיום זה מהירות האור היא c. כך הדבר בגלי קול למשל. הקול צריך את האוויר שיעביר אותו. אם האוויר במנוחה, מהירות הגלים הם מהירות הקול. אם האוויר נע, או לחילופין אנו נעים יחסית לאוויר, מהירות הגלים יחסית לנו יהיה מהירות המדיום (האוויר) + מהירות הגלים במדיום.

המדיום שאמור היה להעביר את גלי האור נקרא אתר (Aether) וצפו שהוא ימלא גם את הריק שמחוץ לכדוה״א ואור עובר דרך התווך הזה!

נחשב מה המשמעות של תנועה יחסית לתווך לגבי זמן מעבר הגל במערכת המורכבת מצופה ומראה הנעים במהירות v יחסית לתווך.

צופה פולט גל ← הגל פוגע במראה ← הגל חוזר אל הצופה.

אם הצופה והמראה במנוחה יחסית לתווך, התהליך יראה בדיאגרמת "מרחק-זמן" כך:

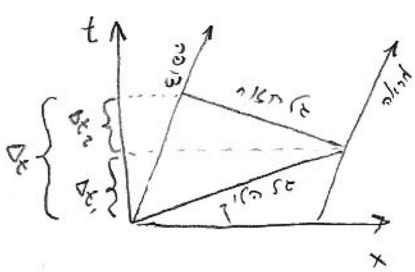


זמן המעבר של הגל יהיה

$$\Delta t = d/V$$

כאשר V הוא המהירות של הגל בתווך (למשל $V=v_s$ אם גל זה הוא גל קול). אם המערכת מתארת אור, $V=c$.

מה קורה אם הצופה והמראה נעים במהירות v יחסית לתווך? הדיאגרמה נראית הפעם:



בגלל שהמראה מתרחקת כל הזמן, המרחק שהגל לעבור עד הפגיעה הוא לא d אלה $\Delta x_1 = d + \Delta t_1 v$ כי בזמן המעוף Δt_1, המראה התרחקה מרחק $\Delta t_1 v$.

באותה דרך, בזמן שהגל חוזר, הצופה מתקרב אל נקודת הפליטה, כך שבזמן המעוף Δt_2, הצופה התקרב במרחק $\Delta t_2 v$ כך שהדרך הכוללת אותה צריך לעבור הגל בדרך חזרה היא רק: $\Delta x_2 = d - \Delta t_2 v$. הזמן שיקח לגל בהלוך הוא:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{V} = \frac{d + \Delta t_1 v}{V} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{d}{V - v}$$

ואילו בחזור:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{V} = \frac{d - \Delta t_1 v}{V} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{d}{V + v}$$

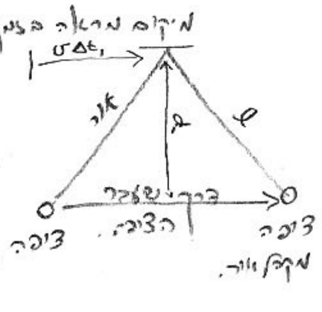
זמן המעוף הכולל הוא אם כן:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{d}{V-d} + \frac{d}{V+d} =$$

$$= d\left(\frac{(V+v)+(V-v)}{(V-v)(V+v)}\right) = \frac{2dV}{V^2 - v^2} = \frac{2d}{V}\frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

ז.א. אם האור נע על תווך (כמו אתר), זמן המעוף של האור אמור להתארך בפקטור של $\frac{1}{1-(v/c)^2}$.

לעומת זאת, מה היה קורה אילו תנועת הצופה והמראה היו בניצב לתנועת התווך?
במקרה כזה, יחסית לתווך העומד, המראה והצופה נעים אנו נראה:



במקרה זה, הלוך Δt_1 וחזור Δt_2 יהיו שווים. הדרך אותה עובר הגל היא:

$$\ell = \sqrt{d^2 + v^2 \Delta t_1^2}$$

ולכן יקח לו זמן שהוא:

$$\Delta t_1 = \frac{\ell}{V} = \frac{\sqrt{d^2 + v^2 \Delta t_1^2}}{V} \Leftarrow V^2 \Delta t_1^2 = d^2 + v^2 \Delta t_1^2$$

ולכן: $\Delta t_1 = \frac{d}{\sqrt{V^2 - v^2}}$

הזמן הכולל שיקח לגל (אור) לעבור את הדרך הוא:

$$\Delta t = 2\Delta t_1 = \frac{2d}{V}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}}$$

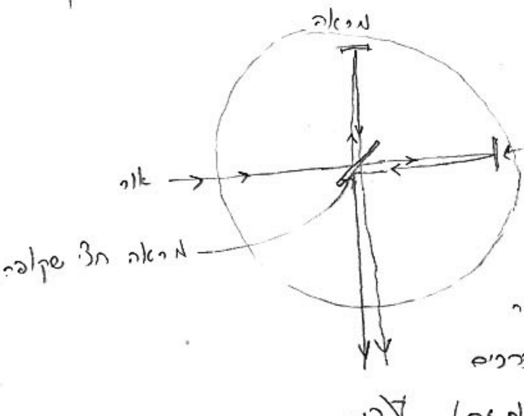
ז.א. גם אם התנועה היא בניצב, יקח לגל יותר זמן לעבור את הדרך וחזרה, אולם ההגדלה הזו בפקטור מההגדלה אם התנועה היא בכיוון תנועת האור.

נחשב את הפרש הזמנים :

$$\Delta(\Delta t) = \underbrace{\Delta t_{\parallel}}_{\text{כשהגל חולף בכיוון התנועה}} - \underbrace{\Delta t_{\perp}}_{\text{כשהגל בניצב לתנועה יחסית לאתר}} = \frac{2d}{V}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right)$$

$$\underset{\text{בעזרת טיילור}}{\cong} \frac{2d}{V}\left[\left(1+\left(\frac{v}{V}\right)^2\right) - \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\right] = \frac{2d}{V}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2$$

מייכלסון ומורלי ניסו למדוד אפקט זה עבור האור. כלומר, אם האור נע על אתר אזי תנועת כדור הארץ יחסית לאתר תגרום לכך שאור העובר מרחק בכיוון התנועה יעבור אותו בזמן אחר מאשר אותו המרחק בכיוון ניצב. היות וקשה ליצור שני מרחקים השווים בדיוק רב מאוד, מייכלסון ומורלי בנו את המערכת שלהם על שולחן מסתובב.



כיוון המסתכל על הקרן שעברה את שתי הדרכים יכול להשוות את הפרש הדרכים ע"י תופעה שנקראית התאבכות (גלים בפאזה הפוכה מתחברים באופן זהה ואילו אם נוצר הפרש פאזה של π - דהיינו שהפרש הדרכים הוא $\lambda/2$, הגלים המתחברים הורסים זה את זה) עבור.

אם מסובבים את השולחן ב- 90° אזי במקום שדרך אחת תהיה ארוכה יותר (בזמן) ב- $\frac{dv^2}{V^3}$, היא תהיה קצרה יותר באותה מידה, ותמונת ההתאבכות תשתנה.

מייכלסון ומורלי גילו ב- 1879 שאין הפרש זמנים בין שתי הדרכים - דהיינו, כשמסובבים את השולחן, תמונת ההתאבכות נשארת זהה.

בהנחה שהאתר אינו נגרר ביחד עם כדוה"א (אם כן, והוא נמשך גרביטציונית אז הוא לא אמור למלא את החלל בין כוכבי הלכת) - המסקנה המתבקשת היא שאין אתר ואין מערכת אבסולוטית יחסית לה ניתן למדוד את מהירות הגל. במילים אחרות בכל המערכות מודדים בהכרח את אותה מהירות האור c. תוצאה זו ביחד עם מהירות האור הסופית הובילו את איינשטיין לתורת היחסות הפרטית שבבסיסה:

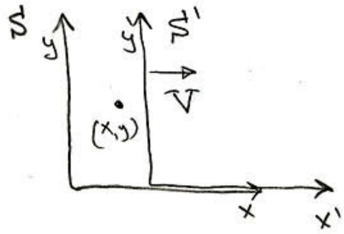
- מהירות האור סופית.
- כל המערכות האינרציאליות אקוויוולנטיות מבחינת חוקי הפיסיקה. בפרט, מהירות האור שנמדדת בניסוי כל שהוא תמיד תהיה c. (ולכן גם אין משמעות למהירות אבסולוטית, רק למהירות יחסית בין שתי מערכות - ומכאן השם תורת היחסות).

טרנספורמצית לורנץ

נראה כעת מה ניתן לומר על הטרנספורמציה בין מערכות המקיימות את הנחות היסוד של יחסות פרטית. דהיינו, מה יראה צופה במערכת S' הנעה במהירות v יחסית לצופה הנמצא במערכת S? כיצד מקשרים בין אירועים כפי שנראים בשתי המערכות?

טרנספורמצית גלילי (מערכות קלסיות - לא יחסותיות)

לפני שנדון בטרנספורמציות יחסותיות, נדון תחילה במערכות קלסיות לא יחסותיות.



ארוע המתרחש בנקודה (x,y,z) ובזמן t במערכת S, יראה במערכת S' באותו הזמן $t=t'$ (השעונים מטקטקים זהה ללא קשר למהירות של המערכת). הקואורדינטות y' ו-z' יהיו זהות ל-y ו-z. אם מניחים שהמערכות התלכדו בזמן $t=0$, אזי הנקודה (x,y,z) תמדד ע"י צופה ב-S' בנקודה $(x'=x-vt,y,z)$. ז.א. טרנספורמצית גלילי נותנת:

$$x'=x-vt,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t$$

ניתן גם לתאר את הקשר בין המהירות הנמדדת ב-S למהירות הנמדדת ב-S':

$$u=\frac{dx}{dt}\quad ; \quad u'=\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-V=u-V$$

$\Leftarrow$ בטרנספורמצית גלילי, מהירות מסתכמות (או מתחסרות) בצורה פשוטה. במערכות יחסותיות קשר זה יהיה יותר מורכב!

טרנספורמצית לורנץ

כדי לקבל קשר בין מערכות המקיימות את הנחות היסוד של תורת היחסות הפרטית, נבחר טרנספורמציה כללית בין ארוע (דהיינו x,y,z ו- t) במערכת S ובמערכת S', ונבדוק מה צריכה להיות הטרנספורמציה הנ"ל כדי שמהירות האור תהיה זהה בשתי המערכות ושתנועת המערכות אחת לשניה תהיה V נתון.

אם בזמן $t=t'=0$ נפלט גל אור מראשית הצירים של מערכת S ומערכת S' (דהיינו ראשית הצירים של המערכות התלכדה ב- $t'=t=0$) אזי האור, בשתי המערכות, יראה כאילו ומתפשט בצורה כדורית, במהירות c. חזית הגל אור מקיימת:

במערכת S:

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\text{רדיוס הכדור}}=\underbrace{c^2t^2}_{\text{המרחק שעבר האור}}$$

במערכת S' יתקיים: $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$

זאת מפני שהצופה ב- S' יראה את האור מתפשט גם במהירות c. אבל הזמן אותו ימדוד הצופה לאותו האירוע לא חייב להיות זהה! ולכן אנו מאפשרים את האפשרות ש- $t\neq t'$ (אילו לא היינו מאפשרים אפשרות זו, לא היינו יכולים לקיים את העקרון שבכל המערכות האור נראה כמתפשט במהירות c זהה).

כאמור, אנו מחפשים טרנספורמציה בין S ל- S' שתקיים את הקשר הנ"ל ואת הקשר בסעיף הקודם וכמו כן, שתקיים $x=x'+vt$ דהיינו, שראשית הצירים של S' נעה במהירות V יחסית ל- S.

מהי הטרנספורמציה המקיימת דרישות אלו ??

נחפש טרנספורמציה מהצורה:

$$x'=\alpha x+\varepsilon t \quad (1)$$
$$y'=y \quad (2)$$
$$z'=z \quad (3)$$
$$t'=\delta x+\eta t \quad (4)$$

* עקרונית, היינו יכולים לחפש טרנספורמציה בה גם y' וגם z' אינם שווים ל- y ו- z אולם נראה ש- $y'=y$ ו- $z'=z$ כן יקיימו את הדרישות שלנו מהטרנספורמציה.
* שנית, הסבה שלא השתמשנו ב- β ו- γ היא שבאותיות אלו נשתמש עוד מעט והרבה!
- מה התנאים על המקדמים $\eta,\delta,\varepsilon,\alpha$ של הטרנספורמציה (הלינארית) הנ"ל?
* לגבי צופה במערכת S' הראשית של S' נשארת בנקודה $x'=0$ כל הזמן. אולם, צופה ב- S רואה את O' (ראשית הצירים של S') נעה ימינה במהירות V, כך שבזמן t של הצופה ב- S היא נמצאת במיקום $x=Vt$. ממשוואה מס' (1) למעלה, נקבל:

$$\underbrace{x'}_{0}=\alpha \underbrace{x}_{Vt}+\varepsilon t \Rightarrow 0=\alpha Vt+\varepsilon t \Rightarrow V=-\varepsilon/\alpha$$

* באותה צורה, צופה ב- S' רואה את ראשית הצירים O של S נעה שמאלה במהירות $-V$, כך שבעבור זמן t' היא תמצא ב- $x'=-Vt'$. ממשוואה מס' (1) נקבל:

$$\underbrace{x'}_{-Vt'}=\alpha \underbrace{x}_{0}+\varepsilon t \Rightarrow t'=-\frac{\varepsilon}{V}t$$

נציב במשוואה (4) ונקבל:

$$\underbrace{t'}_{-\frac{\varepsilon}{V}t}=\delta \underbrace{x}_{0}+\eta t \Rightarrow V=-\frac{\varepsilon}{\eta}$$

מהמשוואה - $V=-\frac{\varepsilon}{\alpha}$ נקבל מיד: $\alpha=\eta$.

* נציב כעת את הקשרים כאילו שמהירות האור נראית c ב- S':

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \Rightarrow \alpha^2x^2+2\alpha\varepsilon xt+\varepsilon^2t^2+y^2+z^2=c^2(\delta^2x^2+2\delta\alpha xt+\alpha^2t^2)$$

נכנס איברים יחדיו ונקבל:

$$x^2(\alpha^2-c^2\delta^2)+xt(2\alpha\varepsilon-2c^2\delta\alpha)+$$
$$+x^2+y^2=c^2t^2(\alpha^2-\varepsilon^2/c^2)$$

אנו דורשים מהטרנספורמציה שהביטוי הנ"ל יראה כמו:

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

לכן, חייב להתקיים כי:

$$\begin{cases}\alpha^2-c^2\delta^2=1\\ 2\alpha\varepsilon-2c^2\delta\alpha=0\\ \alpha^2-\varepsilon^2/c^2=1\end{cases}$$

נציב את הקשר: $\varepsilon=-V\alpha$:

$$\begin{cases}\alpha^2-c^2\delta^2=1\\ -2\alpha^2V-2c^2\delta\alpha=0\\ \alpha^2-\frac{\alpha^2V^2}{c^2}=1\end{cases}$$

מהמשוואה האחרונה נקבל:

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

נציב במשוואה השנייה

$$\delta=-\frac{\alpha V}{c^2}=\frac{-V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

כמו כן:

$$\varepsilon=-V\alpha=\frac{-V}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$\eta=\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

לשם נוחות, נגדיר:

$$\beta\equiv\frac{V}{c}\quad;\quad\gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

עבור מהירויות נמוכות: $\beta\ll1$ ו- $\gamma\simeq1$ ואילו עבור מהירויות גבוהות המתקרבות למהירות האור, $\beta\to1$ ו- $\gamma\gg1$. (נראה בהמשך שלא ניתן להגיע (להאיץ גוף מסה) למהירות האור.

הטרנספורמציה שקיבלנו, נקראת טרנספורמצית לורנץ:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

או בעזרת β ו- γ:

$$\left[\; x' = \gamma(x - \beta c t) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right) \;\right]$$

כדי לקבל את הטרנספורמציה ההפוכה, נחלץ את t מהמשוואה האחרונה:

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \beta\frac{x}{c}$$

ונציב במשוואה של x':

$$x' = \gamma\left(x - \frac{\beta c}{\gamma} t' - \beta^2 x\right) \Rightarrow x\left(\gamma(1 - \beta^2)\right) = x' + \beta c t'$$

אבל:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot (1 - \beta^2) = \frac{1}{\gamma}$$

ולכן: $x = x' + \beta c t'$ באותה צורה ניתן לקבל $t = \gamma\left(t' + \beta\frac{x'}{c}\right)$

לכן, הטרנספורמצית לורנץ ההפוכה היא:

$$\left[\; x = \gamma(x' + \beta c t'), \; y = y', \; z = z', \; t = \gamma\left(t' + \beta\frac{x'}{c}\right) \;\right]$$

תוצאה זו אינה מפתיעה כלל. זאת מפני שהיא מתקבלת מהחלפת הקואורדינטות ב- S עם הקואורדינטות ב- S' והחלפת β ב- $-\beta$

היות ואין מערכת אבסולוטית, שתי המערכות אקוויוולנטיות והטרנספורמציה המתקבלת זהה פרט לכך שהמהירות של האחת יחסית לשניה היא $+V$ ואילו של השניה יחסית לראשונה היא $-V$! ← אם לא היתה הסימטריה הזו הרי אז היינו בבעיה.

שימושים בטרנספורמצית לורנץ

נהוג להגדיר את המרחב + זמן כמרחב 4 מימדי. ∴ נקודה + זמן = אירוע המיוצג ע"י וקטור ארבע מימדי: (x,y,z,t). הערה: לפעמים כותבים (t,x,y,z), בד"כ, שהרכיב הראשון הוא t.

טרנס' לורנץ היא טרנס' בה משנים את תאור המערכת, דהיינו, המשמשים לתאור 4-וקטור שוני, ממערכת אחת למערכת שניה. אם התנועה למשל בכיוון ציר x, אז טרנס' זו מערבבת את רכיבי x ו-t. למה הדבר דומה? אם מסובבים את המערכת סביב ציר $\hat{z}$ למשל, טרנס' הסיבוב תערבב בין רכיבי x ו-y. ההבדל הוא שסיבוב סביב ראשית הצירים משמר את המרחק לראשית הצירים:

$$x^2+y^2 = x'^2+y'^2$$

ואילו טרנס' לורנץ משמרת את הגודל: $x^2-c^2t^2 = x'^2-c^2t'^2$

למעשה בכלל: ניתן להראות שטרנס' לורנץ אקוויולנטית לסיבוב בזוית מדומה!

התכווצות האורך.

דוגמא ראשונה שנבחן היא התופעה הנקראת התכווצות האורך.
נתון מוט באורך L. במערכת S' הצמודה למוט, קצוות המוט נמצאים ב:

$$S': \ (\underset{x}{0},\underset{y}{0},\underset{z}{0},t') \ \text{ו-} \ (L,0,0,t')$$

דהיינו, הקואורדינטות אינן משתנות, פרט לזמן שמתקדם לו.

כיצד יראו קצות המוט במערכת S, אם המוט (מערכת S') נעים במהירות v יחסית לצופה במערכת S?

לשם כך נשתמש בטרנס' לורנץ:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta c t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \beta \frac{x'}{c}) \end{cases}$$

נסתכל על הנקודה הראשונה:

במערכת S היא תהיה:

$$x = \gamma\beta c t' = \frac{vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y=0 \qquad z=0$$

$$t = \gamma t' = \frac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \xrightarrow{\text{הצבת } t'} x = vt$$

ואילו הנקודה השניה:

$$x = \gamma L + \gamma\beta c t = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y=0 \qquad z=0$$

$$t = \gamma t' + \beta\frac{x'}{c}\gamma = \frac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{vL/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

הפעם כשנציב את $\gamma t'$ מהמשוואה האחרונה בראשונה נקבל:

$$x = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + vt - \frac{\frac{v^2}{c^2}L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,L + vt$$

כלומר ב- S יראה מוט שקצותיו הם: $S: (vt,0,0,t)$

$$\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\,L + vt, 0, 0, t\right)$$

⇐ הצופה ב- S ימדוד אורך קצר יותר בפקטור $\sqrt{1-v^2/c^2}$!

⇐ פרט מעניין נוסף: שני אירועים המתרחשים בו זמנית במערכת S' בקצוות המוט בזמן t' נתון אינם נצפים במערכת S באותו הזמן. האירוע ב $x'=0$ מתרחש ב- $t = t'/\sqrt{1-\beta^2}$

ואילו האירוע ב $x'=L$ מתרחש ב- $t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{vL/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

כלומר, אירועים סימולטניים במערכת אחת אינם בהכרח סימולטניים במערכת אחרת הנעה ביחס למערכת הראשונה.

טרנספורמציה של מהירות

בעזרת טרנספורמצית לורנץ ניתן לענות על שאלה נוספת. לנושא, אם גוף נע במהירות v' במערכת S', הנעה בעצמה במהירות V יחסית למערכת S, מה תהיה מהירותו של הגוף במערכת S? בעיקרון, מעניין אותנו כעת לבדוק כיצד מהירויות עוברות טרנספורמציה בין שתי מערכות אינרציאליות.

כדי לפתור בעיה זו, נחזור להגדרה של מהירות: מהירותו ב-S' היא: $\quad S': \; v'_x = \frac{dx'}{dt'}$

ואילו מהירותו במערכת S: $\quad S: \; v_x = \frac{dx}{dt}$

כדי למצוא את הקשר, נכתוב את המהירות כדלהלן:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \underset{\uparrow}{=} \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\Big/\frac{dt'}{dt}$$

כלל השרשרת.

נשתמש כעת בטרנספורמצית לורנץ:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x-\beta ct) \\ t' = \gamma\left(t-\beta\frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

נגזור לפי t ונקבל:

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma\frac{dx}{dt} - \gamma\beta c \qquad \frac{dt'}{dt} = \gamma - \frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt}$$

נציב בקשר עבור v ונקבל:

$$v'_x = \frac{\gamma\frac{dx}{dt} - \gamma\beta c}{\gamma - \frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt}}$$

נצמצם ב-γ ונרשום ש- $v_x = \frac{dx}{dt}$ ונקבל:

מהירות S' ביחס ל-S

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1-\beta v_x/c} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}$$

עבור ציר y, (או ציר z), נקבל

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\Big/\frac{dt'}{dt}$$

וכעת נציב את הביטויים:

$$\begin{cases} y' = y \\ t' = \gamma\left(t-\beta\frac{x}{c}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \;;\; \frac{dt'}{dt} = \gamma - \frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt}$$

נחלק ונקבל:

$$v_y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma - \frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt}} = \overbrace{\sqrt{1-\underbrace{\beta^2}_{V^2/c^2}}}^{1/\gamma}\ \frac{v_y}{1-v_xV/c^2}$$

באותה דרך:

$$v_z' = \sqrt{1-\beta^2}\ \frac{v_z}{1-v_xV/c^2}$$

עבור מהירויות נמוכות $v \ll c$, V מקבלים $\left\{ v_x = v_x' - V,\ v_y = v_y',\ v_z = v_z' \right.$

שהן טרנספורמציות גלילאו (בין מערכות אינרציאליות לא יחסותיות)

היות והמערכות אקוויוולנטיות, ניתן לקבל את הטרנספורמציה ההפוכה באופן מיידי ע"י החלפת גדלים עם ' בגדלים ללא ' ולהפך והחלפת V ב- $-V$

ונקבל:

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x'V/c^2} \qquad v_y = \frac{v_y'}{1 + v_x'V/c^2}\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

$$v_z = \frac{v_z'}{1 + v_x'V/c^2}\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

נראה כעת שהמשוואות שפיתחנו אינן סותרות את העיקרון לפיו בכל המערכות, מהירות האור תהיה c.

נניח כי $v_x = c$ ב- S, במערכת S', מהירות הפוטון (חלקיק האור) תהיה:

$$v_x' = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = \frac{c(c-V)}{c-V} = c$$

כלומר, גם במערכת S' יהיה לפוטון מהירות c

טרנספורמצית לורנץ - עוד דוגמאות

התרחבות הזמן של שעונים נעים.

נסתכל על חלקיק שאינו מאיץ, ונצמיד לו מערכת (למשל S). במערכת זו, החלקיק ישאר בראשית. כמו כן, לצופה במערכת זו מוגדר זמן t. הוא וזהו הזמן שהחלקיק ימדוד בעצמו, קוראים לזמן זה "הזמן העצמי" של החלקיק (proper time).

נראה כעת מה ימדוד צופה הנע במהירות v יחסית לחלקיק, דהיינו, כיצד ימדוד צופה את הזמן העובר t' של החלקיק?

(הערה: נהוג לסמן את הזמן העצמי של חלקיק או גוף כלשהו ב- τ).

כיצד נפתור בעיה זו? נסתכל על זה בצורה דומה לבעיית המוט. דהיינו, נגדיר שני ארועים במערכת החלקיק S ונראה כיצד הצופה שנע ב- S' ימדוד אותם.

הואיל והחלקיק נמצא בראשית של S, שני "הארועים" יהיו:

$$S: \quad (0,0,0,t_1) \quad \text{ו-} \quad (0,0,0,t_2)$$

כיצד ימדדו ארועים אלו במערכת S'?

נשתמש בטרנספורמצית לורנץ:

$$x' = \gamma(x - \beta c t)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

(כאשר β מוגדר כרגיל חיובי כאן)

במערכת S' שני הארועים יהיו:

$$S': \left(-\gamma\beta c t_1, 0, 0, \gamma t_1\right) \quad \text{ו-} \quad \left(-\gamma\beta c t_2, 0, 0, \gamma t_2\right)$$

האיבר של x' מתאר את העובדה שהחלקיק נע שמאלה במהירות v במערכת S' (בעזרת t', האיברים הינם $-vt_1'$ ו- $-vt_2'$ כפי שצפוי).

אולם מה שמעניין אותנו כעת הם הזמנים. הזמן שחלף בין שני הארועים במערכת S העצמית הוא:

$$\Delta t \equiv \Delta\tau \equiv t_2 - t_1$$

לעומת זאת, במערכת S', הזמן בין האירועים הוא:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma t_2 - \gamma t_1 = \gamma \Delta t$$

כלומר, הזמן המדוד בין שני האירועים יתארך אם האירועים אינם נמדדים במערכת בה האירועים מתרחשים באותו המקום.

המשמעות של תוצאה זו היא שהשעון שיתקתק הכי מהר במערכת מסוימת הוא השעון הנמצא במנוחה. כל שעון שנע יחסית למערכת מסוימת, יראה באותה המערכת כמתקתק יותר לאט!

<u>דוגמה: זמן החיים של החלקיק $\pi^{\pm}$</u>

חלקיקי ה-π^+ וה-π^- הם חלקיקים והמורכבים מקווארקים כמו הנויטרון והפרוטון. חלקיקים אלה אינם יציבים. הם חיים (במערכת המנוחה שלהם) כ-2.6×10^{-8} שניות בקירוב (זהו הזמן שבו מספר הפיונים יקטן בפקטור e, ואחרי זמן זהה נוסף המספר יקטן בפקטור e נוסף וכן הלאה). הם נוצרים בטבע כתוצאה מאינטראקציה בין קרינה קוסמית (חלקיקים מאוד אנרגטיים, כמו פרוטונים, המגיעים אל כדוה"א מחוץ למערכת השמש) ובין האטמוספירה שלנו, בגבהים גבוהים.

לו לא היתה התופעה של התארכות הזמן וחלקיקים אלו היו נעים בערך במהירות האור הם יכלו היו לעבור מרחק של:

$$\Delta X \simeq c\cdot\Delta t \simeq 3\times10^{10}\,\frac{cm}{sec}\cdot 2.6\times10^{-8}\,sec \simeq 800\,cm = 8\,m$$

אולם, ניתן לגלות בפני השטח של כדוה"א פיונים שנוצרו במרומי האטמוספירה. ניתן להראות נסיונית שחלקיקים אלו לא יכולים לנוע במהירות גבוהה יותר ממהירות האור, כך שההסבר הוא שצופה במערכת המעבדה יראה את הפיון חי הרבה יותר זמן ממה שהפיון רואה את עצמו!

כדי שהפיון יוכל לעבור 8 ק"מ במקום 8 מטר לפני שהוא מתפרק, אנו רוצים:

$$\Delta t' = 1000\,\Delta t = \gamma\Delta t \;\rightsquigarrow\; \gamma = 1000$$

ז.א.:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1000$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = 10^{6} \;\rightsquigarrow\; \frac{v}{c} = \sqrt{1-10^{6}} \simeq 1-5\times10^{-7}$$

נשאלת אז השאלה, במערכת המעבדה אנו רואים התארכות הזמן מחצית חיים של החלקיק המסבירה כיצד הפיון שנוצר בגובה של 10 ק"מ יכול להגיע לפני הקרקע, אך,

אם מסתכלים מ-G הבציר מנקודת המבט של הפיון, החלקיק במערכת שלו חי 2.6×10^{-8} שניות ובכל זאת עובר את ה- 10 ק"מ של האטמוספירה. הכיצד?!

התשובה היא כמובן התכווצות האורך אותה ראינו בשעור הקודם. אמנם אנו רואים חלקיק חי הרבה זמן והעובר 10 ק"מ, הפיון רואה שעובר זמן קצר אך גם ה- 10 ק"מ במערכת שלנו יראו כ- $\frac{10km}{\gamma}$ במערכת G הפיון, כי הפיון רואה את כדוה"א נע במהירות מאוד קרובה למהירות האור!

<u>דוגמה נוספת</u>: האברציה של האור

תופעת האברציה היא התופעה אותה ראה ברדלי במאה ה- 18 הגורמת לאור להראות כמגיע מכיוון התלוי במהירות הצופה.

נניח שכוכב נמצא במנוחה בראשית O במערכת S (הוא פולט) אור בכיוון ציר y שלו. מה יהיה מסלול קרני האור המערכת S' הנעה במהירות $V\hat{x}$ יחסית ל- S ?

רכיבי המהירות של הקרניים ב- S הם: $v_x=0,\ v_y=c,\ v_z=0$

נציב ערכים אלה במשוואות שקבלנו לטרנספורמציה של מהירויות ונקבל:

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = -V$$

$$v_y' = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} = c\sqrt{1-V^2/c^2}$$

$$v_z' = \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} = 0$$

ואפשר לבדוק ש- $v_x'^2 + v_y'^2 = (V^2) + c^2\left(1-V^2/c^2\right) = c^2$

בהחלט, עדיין גודל האור הוא מהירות האור...

הזוית שיוצרת הקרן מציר y' היא:

כי אין רכיב v_z'

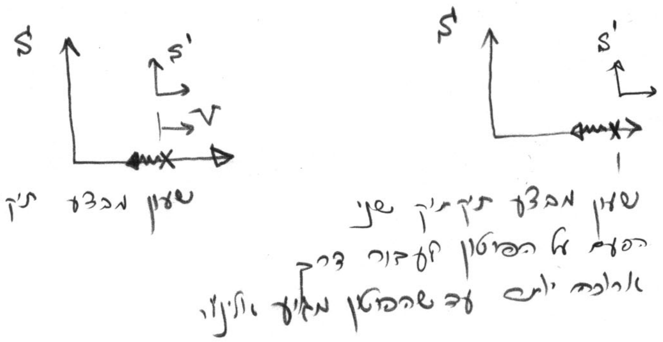
$$\sin\alpha = \frac{v_x'}{|v'|} = \frac{-V}{c}$$

(התוצאה הקלאסית של ברדלי היא: $tg\alpha = \frac{-V}{c}$ והן בקירוב של מהירויות קטנות, התוצאות זהות.)

חישוב אפקט דופלר בעזרת קינמטיקה

בהמשך נחשב את אפקט דופלר - בעזרת דינמיקה (טרנס' של אנרגיה של פוטונים וכו') אך האפקט הרבה יותר בקלות ... החישוב הקינמטי מובא מסיבות פדגוגיות)

הבעיה: ישנן שתי מערכות S ו- S'. במערכת S' ישנו שעון שמתקתק באינטרוול זמן $\Delta t'$. לפי מערכת הצירים ב- S האינטרוול $\Delta t'$ יראה תמיד יותר ארוך בפקטור γ כש- γ היא הע של התנועה בין המערכות.
גם אם הצופה שלנו אינו מסוגל להיות בכל המרחב בו זמנית (ורוב הצופים אינם מסוגלים...) אזי שאלה דומה תהיה כיצד יראה צופה ב- S את תקתוק השעון ב- S' אם לוקחים בחשבון את העובדה שלוקח לאור להגיע אל הצופה.



פתרון: נניח כי רגע התקתוק הראשון במערכת S' מתרחש ב- $(L,0,0,0)$ (x= , t=) והצופה שלנו נמצא ב- $x=0$. אירוע זה במערכת S יתקבל בעזרת טרנס' לורנץ:

S — S'

$$S:(L,0,0,0)\xrightarrow{\text{לורנץ}} S':\left(\gamma L,0,0,-\frac{\gamma\beta}{c}L\right)$$

כזכור:
$$x'=\gamma(x-\beta ct)\qquad t'=\gamma\left(t-\frac{\beta x}{c}\right)$$
$$x=\gamma(x'+\beta ct')\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{\beta x'}{c}\right)$$

אחרי זמן $\Delta t'$ מתבצע התקתוק השני

$$S':\left(\gamma L,0,0,-\frac{\gamma\beta}{c}L+\Delta t'\right)$$

לורנץ חזרה ל- S

$$S:\left(\gamma\left(\gamma L+\beta c\left(-\frac{\gamma\beta L}{c}+\Delta t'\right)\right),0,0,\gamma\left(-\frac{\gamma\beta L}{c}+\Delta t'\right)+\frac{\gamma\beta\gamma L}{c}\right)$$

אחרי פישוט הסוגריים, מתקבל:

$$S: \left(L\gamma^2(1-\beta^2) + \gamma\beta c\,\Delta t',\ 0,\ 0,\ \gamma\Delta t' \right)$$

כ.ל. האירוע השני אכן מתרחש בזמן $\gamma\Delta t'$ יש מאוחר כפי שציפינו.

האיבר הראשון היה: $L\gamma^2(1-\beta^2) = \frac{L}{1-\beta^2}\cdot(1-\beta^2) = L$

כמה זמן יקח לפוטון הראשון להגיע לראשית (לצופה)?

$$t_1 = \frac{L}{c}$$

ולפוטון השני:

$$t_2 = \underbrace{\frac{L}{c} + \gamma\beta\Delta t'}_{\text{זמן מעוף הפוטון}} + \overbrace{\gamma\Delta t'}^{\text{זמן יציאת הפוטון לדרך}}$$

הפרש הזמנים הוא:

$$\Delta t_{obs} = t_2 - t_1 = \gamma\beta\Delta t' + \gamma\Delta t'$$

$$= \Delta t'\left(\gamma(1+\beta)\right) = \Delta t'\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Delta t'\frac{1+\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}$$

$$= \Delta t'\sqrt{\frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}}$$

אם $\beta>0$ נקבל שהזמן Δt שימדוד הצופה יהיה גדול יותר מהזמן שעבר במערכת השעון. לעומת זאת אם $\beta<0$, כ.ל. שהשעון מתקרב אל הצופה, הזמן שימדוד הצופה קטן יותר מ-$\Delta t'$!

$\Leftarrow$ במערכת S, הזמן Δt הוא יותר ארוך בפקטור γ מ-$\Delta t'$ הזמן העצמי של השעון. אולם אם ישנו צופה נייח שעושה מדידה ע"י אור, היה יכול לראות זמן Δt_{obs} שהוא יותר קטן מ-$\Delta t'$ אם הצופה מתקרב.