פרק שני: חוקי ניוטון, משוואות תנועה ואודות כוחות

- חוקי ניוטון
- תנועה בליסטית (נפילה חופשית + תנועה אופקית)
- נפילה חופשית + כח גרר (חיכוך סטוקס)
- חיכוך בין מוצקים
- סטטיקה
- משוואות תנועה למערכות עם מספר אלמנטים (לדוגמא, מסות על גלגלת)
- על כוחות שונים בטבע

חוקי ניוטון

חוקי ניוטון וחוקי טבע אחרים אינם חוקים שניתן "להוכיח" כמו משפטים במתמטיקה. אלה, הם חוקים שלא הופרכו ע"י נסיונות.
לדוגמא, בתקופתו של אריסטו חשבו שמהירות נפילתו של גוף יחסית למשקלו - גוף כבד יותר נופל מהר יותר. כיום ידוע שגופים נופלים מאוצים באותו הקצב ללא קשר למשקל. או, בתקופתו של אריסטו חשבו כי על גוף חייב לפעול כח על מנת שהוא ימשיך לנוע. חוקים אלה של אריסטו אינם מתאימים לתיאור המציאות ולכן אינם נכונים אולם רק בתקופתו של גלילאו התחיל לחדור לתודעה הרעיון שנסיונות הם דבר חשוב כדי להבין את חוקי הטבע. עד אז "נסיונות מחשבתיים" היו מספיקים כדי "להוכיח" חוק זה או אחר.

חוקי ניוטון מבוססים על הנסיון שהיה קיים בתקופתו - חוקי תנועה של נפילה חופשית או תנועה בליסטית (חוקים אותם מצא גלילאו) וגם החוקים המתארים את תנועת גרמי השמים - חוקים שנוסחו ע"י קפלר.

ואלו הם החוקים:

חוק ראשון של ניוטון:

* ללא כוחות חיצוניים - גוף ימשיך לנוע באותה המהירות ובאותו הכיוון: $\vec{F}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{v}=0$

חוק זה מתקבל למעשה מהחוק השני.

החוק השני של ניוטון:

* קצב שינוי התנע של גוף יחסי לכח המופעל על הגוף

$$\vec{F} \underbrace{\propto}_{\text{יחסי ל-}} \frac{d}{dt}(\underbrace{m\vec{v}}_{\text{הגדרת התנע של הגוף}})$$

וקטור המהירות - $\vec{v}$

מסת הגוף - m

מגדירים את יחידות הכח כך שמקדם הפרופורציה הוא 1:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

אם המסה נמדדת ב- gr והתאוצה ב- cm/s^2 אז הכח
ימדד ביחידה הנקראת דין dyne

$$1dyn = dyne \equiv gr \cdot cm \cdot s^{-2}$$

אם המסה נמדדת ב- kg והתאוצה ב- m/s^2 נקבל את הניוטון:

$$\underline{1N} = Newton = kg \cdot m \cdot s^{-2} = (1000\,gr)\cdot(100\,cm)\cdot s^{-2} =$$
$$= 10^5\, gr\, cm\, s^{-2} = \underline{10^5\, dyn}$$

אם מסת הגוף קבועה, נקבל את החוק השני בניסוחו המוכר לנו:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0}\vec{v} + m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} = m\vec{a}$$

עבור מסה קבועה.

ישנם מקרים שלא ניתן לזנוח את האיבר dm/dt. לדוגמא, בתנועת טיל (מסתו קטנה עם שריפת הדלק והוצאת הדלק אחורה).

<u>החוק השלישי של ניוטון:</u>

כאשר שני גופים פועלים זה על זה, הכח אותו מפעיל גוף 1 על גוף 2 $(\vec{F}_{21})$ שווה בגודלו אך הפוך בכיוונו מהכח שמפעיל גוף 2 על גוף 1 $(\vec{F}_{12})$. דהיינו:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

בהמשך נראה שחוק זה ביחד עם החוק השני משמעותם שימור תנע

דוגמא פשוטה לשימוש בחוק השני:

חלקיק (בעל מסה קבועה) נע ללא השפעת כחות. מה יהיה מסלול תנועתו?

$$0 = \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{v} = \int \vec{0}\,dt = \vec{v}_0$$

קבוע האינטגרציה הוא וקטור השווה למהירות הקבועה של החלקיק.

$$\vec{x} = \int \vec{v}\,dt = \int \vec{v}_0\,dt = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

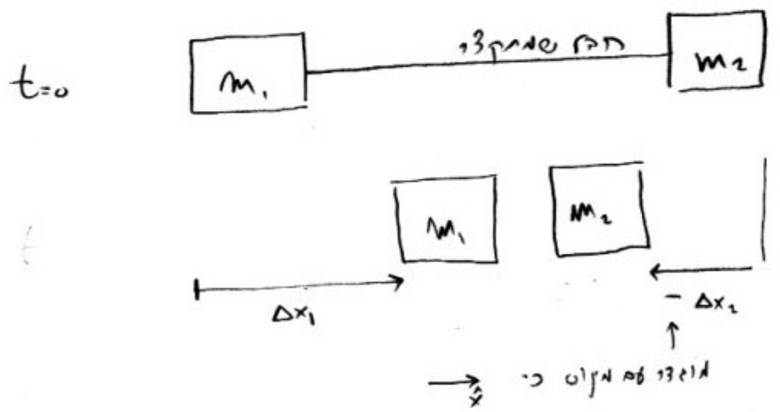
קבוע האינטגרציה. ב- $t=0$ החלקיק היה ב- $\vec{r}=\vec{r}_0$

ז.א. ללא כוחות חיצוניים, חלקיק ינוע על קו ישר במהירות קבועה (החוק הראשון).

ניסוי שתי עגלות

בכיתה ראינו ניסוי בו שתי עגלות משכו זו את זו. העגלה הכבדה יותר נעה פחות מהעגלה הקלה יותר. יחס התזוזות היה הפוך ליחס המסות.

כיצד זה מתקבל מהחוק השני והשלישי?



נחשב את המהירות:

חוק שני, רכיב $\hat{x}$.

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{F_{12}}{m_1} \quad \wedge \quad v_1 = \frac{1}{m_1}\int_{t=0}^{t} F_{12}\,dt$$

באופן דומה:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{F_{21}}{m_2} \quad \wedge \quad v_2 = \frac{1}{m_2}\int_{t=0}^{t} F_{21}\,dt$$

מהחוק השלישי:

$$\underset{\text{חוק III}}{v_2} = -\frac{1}{m_2}\int_{t=0}^{t} F_{12}\,dt \underset{\text{הגדרה של } v_1}{=} -\frac{m_1}{m_2}\,v_1$$

כלומר, יחס המהירויות פרופורציונלי הפוך ליחס המסות!

והעתקים Δx:

הגדרת התוצאה עבור המהירויות.

$$\Delta x_1 = \int_{t=0}^{t} v_1\,dt \quad ; \quad \Delta x_2 = \int_{t=0}^{t} v_2\,dt = -\frac{m_1}{m_2}\int_{t=0}^{t} v_1\,dt = -\frac{m_1}{m_2}\,\Delta x_1$$

הגדרת Δx_1

כלומר, גם ההעתקים יחס הפוך ליחס המסות.

תנועת חלקיק בשדה כבידה אחיד:

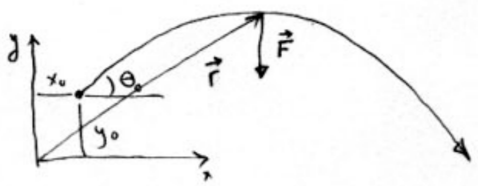
מה משוואת התנועה של חלקיק בשדה כבידה אחיד? שדה כבידה אחיד הוא כח קבוע הפונה כלפי מטה. הכח יחסי למסה כדי שהתאוצה תהיה בלתי תלויה:

$$\vec{F} = -mg\hat{y}$$

g - קבוע הגרביטציה המקומי: למעשה הוא שונה ממקום למקום על כדוה"א (גדול יותר בקטבים) ושווה בערך ל- $g \simeq 980\ cm/s^2$ או $g \cong 9.8\ m/s^2$.

כשהדיוק אינו חשוב, ניתן גם לקחת בקירוב: $g \approx 10\ m/s^2$.

כעת, אני רוצה לכתוב את המשוואות המתארות את מיקום החלקיק:



חוק II:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = \vec{F}/m = -g\hat{y}$$

אם נכתוב בעזרת רכיבים:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} \right) = -g\hat{y}$$

הואיל ו- $\hat{x}$ ו- $\hat{y}$ ניצבים זה לזה, כל רכיב מתקיים בנפרד (הדרך לראות: להכפיל את המשוואה פעם ב- $\cdot\hat{x}$ ופעם ב- $\cdot\hat{y}$) מקבל:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

ע"י אינטגרציה:

$$\frac{dx}{dt} = v_{0,x} = v_0\cos\theta_0 \qquad\qquad x = tv_0\cos\theta_0 + x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{0,y} - gt = v_0\sin\theta_0 - gt \qquad\qquad y = tv_0\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

זהו הפתרון של תנועת חלקיק בשדה כוח קבוע. ניתן לתאר אותו בעזרת קשר בין y ו- x ע"י חילוץ t:

$$t = \frac{(x - x_0)}{v_0\cos\theta_0}$$

נציב במשוואה של y ונקבל:

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)\frac{(x-x_0)}{v_0\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

ע"י מעט מתמטיקה ניתן להראות שביטוי זה שווה ל-

$$y - \underbrace{\left(y_0 + \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g}\right)}_{y_m} = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta_0}\left[x - \underbrace{\left(x_0 + \frac{V_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}\right)}_{x_m}\right]^2$$

זוהי פרבולה, הערך המקסימלי שלה מתקבל ב- (x_m,y_m):

$$x_m = x_0 + \frac{V_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} \qquad y_m = y_0 + \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

* את המקסימום של המסלול ניתן למצוא בדרך קלה יותר:

$$\underbrace{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_m} = 0}\quad\Rightarrow\quad V_0\sin\theta_0 - g t_m = 0 \;\Rightarrow\; t_m = \frac{V_0\sin\theta_0}{g}$$

שיא המסלול מתקבל כאשר החלקיק מגיע ל"מנוחה" בציר $\hat{y}$.

ע"י הצבה במשוואות עבור x ו- y מתקבל:

$$x_m = \frac{V_0\sin\theta_0}{g}V_0\cos\theta_0 + x_0$$

$$y_m = \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{g^2} + y_0 = \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g} + y_0$$

* נחשב את המרחק בציר x אותו יעבור החלקיק עד שיגיע שוב ל- y_0:

המשוואה שיש לפתור:

$$y = y_0$$

נציב את הביטוי עבור y:

$$y_0 + V_0\sin\theta_0\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0$$

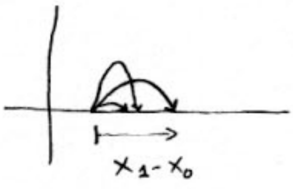
ולכן:

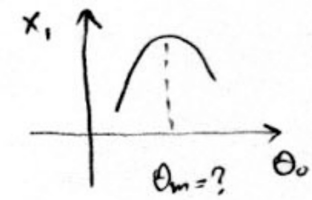
$$t = \frac{2V_0\sin\theta_0}{g}$$

והצבה בביטוי עבור x:

$$x = \frac{2V_0\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} + x_0$$

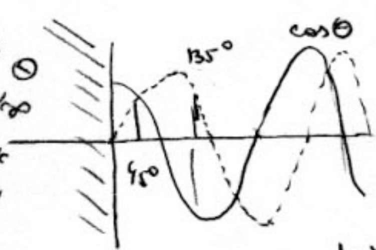
מהי הזוית θ בה יגיע החלקיק למרחק x_1 הגדול ביותר, בהנתן V_0 נתון.





אנו רוצים את הערך המקסימלי של $x_1(\theta_0)$. כדי לקבל אותו נגזור את x_1 לפי θ_0:

$$\left.\frac{dx_1}{d\theta_0}\right|_{\theta_0=\theta_m} = 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos^2\theta_m - \sin^2\theta_m\right) = 0$$



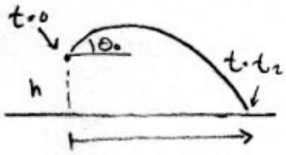
$$\cos\theta_m = \pm\sin\theta_m$$

$$\theta_m = \underline{45°},\ 135°$$

135° נותן לנו את המרחק המקסימלי בכיוון ההפוך!

<u>דוגמא נוספת</u>: אותה שאלה אך כעת החלקיק יוצא מגובה h

<u>פתרון</u>:



$$y = y_0 - h = y_0 + V_0\sin\theta_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$\hookrightarrow t_2 = \frac{V_0\sin\theta_0 \pm \sqrt{V_0^2\sin^2\theta_0 + 2gh}}{g}$$

הפתרון עם ה "-" אינו הגיוני כי הוא הזמן לפני הזריקה (t שלילי)
בו היה החלקיק אילו תנועתו התחילה קודם.

בדיקה שהפתרון עבור t_2 הגיוני: עבור $h=0$ נקבל: $t_2 = \frac{2V_0\sin\theta}{g}$ ✓
מה שקבלנו קודם. עבור $V_0=0$, זוהי נפילה חופשית ומתקבל:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

כפי שצריך להיות ✓

[פתרון נפילה חופשית: $y = -\frac{1}{2}gt^2$, $y=-h$, $\hookrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$]

ה- x המתקבל עבור $t=t_2$ הוא:

$$x_2=\left(\frac{V_0\sin\Theta_0}{g}+\sqrt{\frac{V_0^2\sin^2\Theta_0}{g^2}+\frac{2h}{g}}\right)V_0\cos\Theta_0$$

ערכו המקסימלי יתקבל עבור $\frac{dx_2}{d\theta_0}=0$

אולם זה יתן משוואה לא טריוויאלית עבור $\cos\theta_0$ ו- $\sin\theta_0$. דרך אחת לפתור אותה היא להציב: $\xi=\sin\Theta_0$ (האות היוונית קסי xi). ואז:

$$x_2=V_0\left(\frac{V_0\xi}{g}+\sqrt{\frac{V_0^2\xi^2}{g^2}+\frac{2h}{g}}\right)\sqrt{1-\xi^2}$$

המשוואה $\frac{dx_2}{d\Theta_0}=0$ תתן:

$$\frac{dx_2}{d\Theta_0}=\frac{dx_2}{d\xi}\frac{d\xi}{d\Theta_0}=0$$

כלל השרשרת.

ולכן גם $\frac{dx_2}{d\xi}=0$. אחרי גזירה וסידור איברים:

$$\frac{dx_2}{d\xi}=\frac{V_0\left(V_0\xi+g\sqrt{\frac{2h}{g}+\frac{V_0^2\xi^2}{g^2}}\right)\left(V_0(\xi^2-1)+g\xi\sqrt{\frac{2h}{g}+\frac{V_0^2\xi^2}{g^2}}\right)}{g^2\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{\frac{V_0^2\xi^2}{g^2}+\frac{2h}{g}}}=0$$

הסוגריים הראשונים לא יכולים להיות שווים לאפס, ואילו הסוגריים השניים יתאפסו כאשר:

$$\xi_m=\sin\Theta_m=\frac{1}{\sqrt{2\left(1+\frac{gh}{V_0}\right)}}$$

* מי שמתנה: ישלים את האלגברה החסרה!!!

דוגמא לפתרון משוואות תנועה: נפילת גוף עם חיכוך יחסי למהירות

(נניח כי גוף נופל ושאת השפעת האוויר ניתן לתאר ככח חיכוך: $F_{drag} = -k\vec{v}$

כיצד תראה תנועתו של החלקיק?

פתרון: משוואות התנועה של החלקיק: (חוק II):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = +F_g + F_{drag}$$

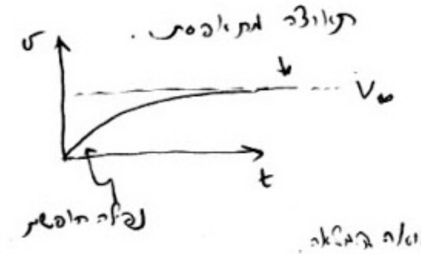
$$= m\vec{g} - k\vec{v} \quad (\text{מדוע})$$

כיצד מתנהגת משוואה זו? כאשר החלקיק נח מאוד (למשל, קרוב לרגע שיחרורו) האיבר $k\vec{v}$ נזנח ומשוואת התנועה היא:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$$

כלומר נפילה חופשית רגילה – החלקיק יתחיל להאיץ בכיוון המשיכה.

לאחר שהמהירות תגדל, יכנס למשחק האיבר $k\vec{v}$, כך שהמהירות גדלה כך השני גדל ומקטין את התאוצה הכוללת. ז"א החלקיק יאיץ פחות ופחות מהר עד שהמהירות תהיה כך שהכח הכולל מתאפס:



התאפסות התאוצה תקרא כאשר:

$$m\vec{g} = k\vec{v}_\infty \Rightarrow \vec{V}_\infty = \frac{m}{k}\vec{g}$$

כעת, כשמבינים מה מתרחש ננסה לפתור את המשוואה במלואה.

במקרה הכללי, ישנו:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}$$

נסתכל על ציר $\hat{y}$ ונגדיר $\hat{y}\downarrow$ כך - $\vec{g} = g\hat{y}$. (כך המהירות תהיה חיובית).

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{k}{m}v_y$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית עבור $v_y(t)$. סוג מסוים זה נקרא משוואה "פרידה" היות וניתן להפריד את האיברים התלויים מפורשות ב- t לצד אחד ואלה התלויים ב- v לצד השני: נעביר dt ימינה ואת $g-\frac{k}{m}v_y$ שמאלה:

$$\frac{dv_y}{g - \frac{k}{m}v_y} = dt$$

מה המשמעות של מה שקיבלנו?

מה שהמשוואה הנ"ל נותנת לנו הוא קשר בין שינוי בזמן dt לשינוי המתקבל במהירות dv_y.
במקרה ספציפי זה, הקשר הזה תלוי במהירות הרגעית של הגוף v_y אולם, הוא
יכול היה להיות תלוי גם בזמן ואף במקום (ואז היינו בצרה צרורה יותר...).

מה שמעניין אותנו הוא למצוא קשר $v_y(t)$ שמתקבל אם אנחנו סוכמים את ה-dv_y
הרבים המתקבלים - מה - dt-ים. היות ו-dt ו-dv_y הם קטנים, סכימה זו היא
אינטגרל:

$$\int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv_y}{g-\frac{k}{m}v_y} = \int_{t=0}^{t} dt$$

צד ימין נותן:

$$\underbrace{\text{r.h.s:}}_{\text{right hand side}} \quad \int_{t=0}^{t} dt = t\Big|_{t=0}^{t=t} = t-0=t$$

צד שמאל:

$$\text{l.h.s:} \quad \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv_y}{g-\frac{k}{m}v_y} = \frac{\ln\left(g-\frac{k}{m}v_y\right)}{-k/m}\Bigg|_{v_y=v_y(t=0)}^{v_y=v_y(t)}$$

אם נתון כי הגוף נופל ממנוחה, כלומר: $v_y(t=0)=0$ אז:

$$\text{l.h.s} = -\frac{m}{k}\left(\ln\left(g-\frac{k}{m}v_y\right)-\ln(g)\right) = -\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{kv_y}{mg}\right)$$

השוואה בין צד ימין לצד שמאל נותנת:

$$-\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{kv_y}{mg}\right) = t \quad \wedge \quad v_y = \frac{mg}{k}\left(1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)$$

ניתן לבצע אינטגרציה נוספת ולקבל את y:

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v_y\,dt = dy \Rightarrow y = \int_{y(t=0)}^{y(t)} dy = \int_{t=0}^{t} v_y\,dt = \int_{t=0}^{t} \frac{mg}{k}\left(1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)dt$$

$$= \left(\frac{mgt}{k} + \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\cdot\frac{mg}{k}\cdot\frac{m}{k}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=t}$$

$$= \frac{mgt}{k} + \frac{m^2 g}{k^2}\left(\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)-1\right)$$

הערות:

1) הפתרון שקיבלנו הוא הגיוני: בגבול ש-$t \to \infty$ ה-$\exp \to 0$ ואז! $v_y = \frac{mg}{k}$ זהו הערך הסופי v_∞ שקיבלנו מקודם.

בגבול של $kt \ll 1$ יש לפתח את האקספוננט. לשם כך, נשתמש בטור טיילור האומר

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \cdots$$

כלומר, ניתן לקרב את הפונקציה $\exp(x)$ ע"י:

$$\exp(x) \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad \longrightarrow \quad \exp(x) \simeq 1 + x \quad (x \ll 1)$$

עוד על טור טיילור תלמדו באינפי. בכל מקרה, במקרה שלנו ניתן לכתוב:

$$v_y = \frac{mg}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right) \simeq \frac{mg}{k}\left(1 - 1 + \frac{kt}{m} + \cdots\right) \stackrel{\sim}{=} gt$$

ז.א. עבור זמנים קטנים, המקיימים $\frac{kt}{m} \ll 1$, החיכוך אינו חשוב והמהירות מתנהגת כמו נפילה חופשית ללא חיכוך ✓. (וטוב מאד שכך!).

2) נניח לא היינו מפרידים בין t ל-v במשוואה. היינו מקבלים, למשל:

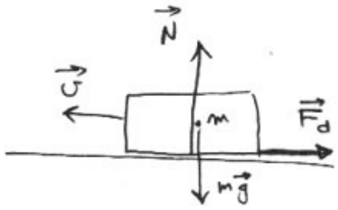
$$\int_{v_y(t=0)}^{v_y(t)} dv_y = \int_{t=0}^{t} \left(g - \frac{k}{m} v_y(t)\right) dt$$

היינו מסוגלים לעשות אינטגרציה על צד שמאל ולקבל: $v_y(t) - v_y(t=0)$ אולם עם צד ימין היינו נתקלים בבעיה. אנו לא יודעים מהי התלות של v_y ב-t ולכן לא נוכל לחשב את האינטגרל $\int v_y(t)dt$! כעת ניתן לראות מדוע אם ניתן להפריד בין המשתנים, עושים זאת.

חיכוך מגע

אחד מהכוחות הנפוצים ביותר בחיי היום יום הוא כוח החיכוך מגע בין שני משטחים. מבדילים בין הכוח המתקבל כאשר יש תנועה יחסית בין המשטחים וכאשר אין תנועה יחסית.

* כשיש תנועה: כוח החיכוך מנוגד לתנועה היחסית, נמצא כי הוא יחסי ל-N, לכוח הנורמלי המפעילים המשטחים זה על זה.
כ.ו. כוח החיכוך $\vec{F}_d$ אינו תלוי בגודל המהירות ואינו תלוי בשטח המגע בין המשטחים.



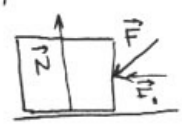
$$F_d = \mu_k N$$

ניתן לכתוב:
μ_k הוא מקדם החיכוך הקינטי (שיש תנועה).

* כשאין תנועה: כוח החיכוך מבטל את הרכיב האופקי של הכוחות הנוספים הפועלים על המסה m כל עוד הם קטנים מ-

$$F_d < \mu_s N$$

כאשר μ_s הוא מקדם החיכוך הסטטי. דהיינו, אם מפעילים כוח $\vec{F}$ על המסה



היא תשאר במנוחה כל עוד הרכיב $\vec{F}_\parallel$ המקביל למשטח (וניצב ל-$\vec{N}$)
מקיים: $|F_\parallel| < \mu_s N \iff$ תנאי להשאר במנוחה.

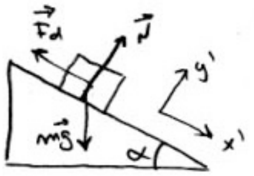
ברגע שהגוף יתחיל לנוע, כוח החיכוך יקטן מ-$\mu_s N$ ל-$\mu_k N$ כי $\mu_k \le \mu_s$.

חשוב להבין שהביטויים לכוח החיכוך הם אמפיריים (קירוב לתוצאות נסיוניות) ולא מבוססים על תאוריה כזו או אחרת. מה גם שישנם מקרים בהם התיאור הנ"ל אינו מתקיים ואם אם כן מתאים, לא מדויק, ביחוד בגבול בין גוף נח לגוף נע.

מקדמי חיכוך אופייניים:

	μ_k	μ_s
פלדה על פלדה	0.57	0.79
עץ על עץ	0.2	0.25-0.5
זכוכית על זכוכית	0.4	0.94
גלגל שעווה על קרח (זמנים - "שלג יבש")	0.04	0.1
על "שלג רטוב"	0.1	0.14
קרח על קרח (ב-0°C)	0.03	0.1
טפלון על טפלון	0.04	0.04

זוית הטיה מקסימלית:



מסה נמצאת על מישור משופע בזוית α, מה הזוית המקסימלית α שמעליה המסה תחליק?

פתרון: כשהמסה במנוחה, סכום הכוחות מתאפס $\sum \vec{F}_i = 0$. הכוחות המופעלים בגוף: $\vec{N}$, $m\vec{g}$ ו-$\vec{F}_d$.

בכיוון y':
$$y': \quad N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$$

ובכיוון x':
$$x': \quad mg\sin\alpha - F_d = 0 \Rightarrow F_d = mg\sin\alpha$$

התנאי הסטטי:
$$F_d \le \mu_s N$$

נציב את F_d ו-N:
$$mg\sin\alpha \le \mu_s mg\cos\alpha$$

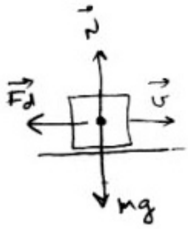
(חלוקה ב- $\cos\alpha$):
$$tg\,\alpha \le \mu_s$$

זהו התנאי על הזוית כדי שהמסה לא תחליק במדרון.

מרחק עצירה:

* מסה נעה על משטח במהירות התחלתית v_0 עד איזה מרחק יכולה להגיע?
* מהו ההספק (האנרגיה ליח' זמן) שיש להשקיע על מנת שהמסה תמשיך לנוע במהירות קבועה v_0?

פתרון:



דרך I: בעזרת כוחות (והחוק השני)

בציר y:
$$-mg + N = 0 \rightarrow N = mg$$

בציר x:
$$\sum F_x = m\ddot{x}$$
$$-\mu_k N = m\ddot{x}$$
$$\ddot{x} = -\frac{\mu_k N}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g$$

אינטגרציה:
$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \int_{t=0}^{t} -\mu_k g\, dt = \underbrace{\dot{x}_0}_{v_0} - \mu_k g t$$

ואינטגרציה נוספת:
$$x = x_0 + \int_{t=0}^{t} (\dot{x}_0 - \mu_k g t)\, dt =$$
$$= x_0 - \dot{x}_0 t - \frac{1}{2}\mu_k g t^2$$

נקודת עצירה מתקבלת ב- $\dot{x} = 0$ או:
$$\dot{x}_0 - \mu_k g t\Big|_{stop} = 0 \Rightarrow t_{stop} = \frac{\dot{x}_0}{\mu_k g}$$

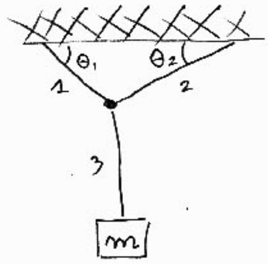
מרחק העצירה:
$$x\Big|_{t=t_{stop}} - x_0 = \dot{x}_0 t_{stop} - \frac{1}{2}\mu_k g t_{stop}^2 =$$
$$= \dot{x}_0 \frac{\dot{x}_0}{\mu_k g} - \frac{1}{2}\mu_k g \left(\frac{\dot{x}_0^2}{\mu_k g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}_0^2}{\mu_k g}$$

סטטיקה

אם אין כל תנועה במערכת אזי מדובר במערכת סטטית בה משוואות התנועה נהיות משוואות כוחות. אם מסתכלים על מסה m_i כאשר שהיא חלק מהמערכת, משוואות התנועה היו $\sum_j \vec F_{ij} = m_i \vec a_i$ כאשר $\vec F_{ij}$ הוא הכח שגוף j מפעיל על הגוף i. אם אין תאוצה המשוואות תנועה נהיות משוואות סטטיקה:

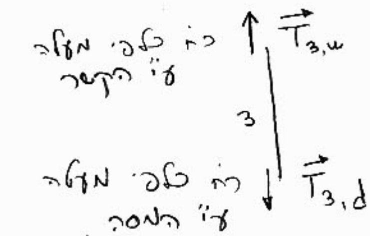
סטטיקה: $\boxed{\sum_j \vec F_{ij} = 0}$

דוגמא:



למשל, אם מסתכלים על המערכת הבאה:
ניתן להסתכל על מספר רכיבים, על המסה m, על כל אחד מהחבלים, על הקיר, ועל הקשר שמחבר את החבלים.

* נסתכל על חבל 3. מצד אחד, הקשר מפעיל עליו כח כלפי מעלה. מצד שני המסה m מפעילה כח כלפי מטה.



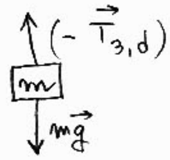
היות והחבל מתוח והיות ואני מניח כי משקלו זניח, סכום הכוחות הללו חייב להתאפס:

$$\vec T_{3,u} + \vec T_{3,d} = 0$$

לכן: $\vec T_{3,u} = -\vec T_{3,d}$ $\Longleftrightarrow$ הכוחות הללו (שנקראים מתיחות) שווים בגודלם אך מנוגדים בכיוונם.

ובגודל: $T_{3,u} = T_{3,d}$

* נסתכל על המסה m:



כלפי מטה פועל עליה הכח $m\vec g$. כלפי מעלה פועל הכח ההפוך ל- $\vec T_{3,d}$ (מהחוק השלישי, אם פועל על החבל כח $\vec T_{3,d}$ כלפי מטה, יפעל על המסה כח זהה כלפי מעלה, דהיינו $-\vec T_{3,d}$. סטטיקה: $\sum_i F_{m,i} = 0 \Rightarrow m\vec g + (-\vec T_{3,d}) = 0$ } סכום על הכוחות על m.

ובגודל: $mg = T_{3,d}$

* על החבלים 1 ו-2 פועלים כוחות כמו על חבל 3:

משוואת כוחות:

$$\vec T_{1,u} + \vec T_{1,d} = 0 \Rightarrow \vec T_{1,u} = -\vec T_{1,d}$$

מסה נוספת שיש להתייחס היא "הקשר". מהחוק השלישי, פועלים על הקשר $-\vec{T}_{1,d}$, $-\vec{T}_{2,d}$ ו- $-\vec{T}_{3,u}$. לכן, מתקיים:

$$-\vec{T}_{1,d}-\vec{T}_{2,d}-\vec{T}_{3,u}=0$$

בגודל

$$(T_1\equiv)\ T_{1,d}=T_{1,u}$$
$$(T_2\equiv)\ T_{2,d}=T_{2,u}$$
$$(T_3\equiv)\ T_{3,d}=T_{3,u}$$

⇐ פתרון המשוואות. משוואות כוחות על החבלים מתקבל
(למשל, למה שווה T_1?)

כמו כן מקבלים:

$$T_3\equiv T_{3,d}=T_{3,u}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{משוואה של } m}}{=}mg$$

המשוואה הוקטורית חשבון כוחות על הקשר היא למעשה שתי משוואות סקלריות. רכיב x נותן:

$$-T_1\cos\theta_1+T_2\cos\theta_2=0$$

רכיב y נותן:

$$T_1\sin\theta_1+T_2\sin\theta_2-\underbrace{T_3}_{mg}=0$$

ממשוואה הראשונה:

$$T_2=T_1\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

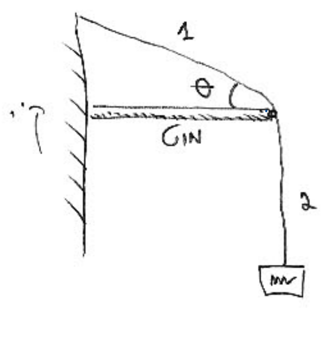
נציב בשניה:

$$T_1\sin\theta_1+T_1\sin\theta_2\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}=mg$$

סה"כ:

$$T_1=\frac{mg\cos\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1}=\frac{mg\cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

אנו רואים כי התוצאה הגיונית. רואים יחידות – פונקציה חסרת יחידות של הזוית כפול mg שהוא כוח. כמו כן, במצב $\theta_1=90^\circ$ ו- $\theta_2=0$ מקבלים $T_1=mg$ כמו שצריך (המשקל כולו על חבל 1. במצב ההפוך $T_1=0$ כי החבל רפוי.



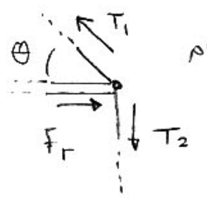
דוגמא 2: מה המתיחות בחבל 1 ו-2?

משוואת כוחות על m:

$$T_2=mg$$

המשוואה המעניינת היא המשוואה על אזור החיבור בין החבלים והמוט.

באיור זה:



הכוחות שפועלים על החיבור:

F_r הינו הכוח שמופעל ע"י המוט על החבלים.
הוא חייב להיות קיים כי אחרת לא היה מה שיאזן את המתיחויות.

בכיוון ציר $\hat{x}$, שוויון כוחות נותן:
$$F_r - T_1 \cos\theta = 0$$

בכיוון ציר $\hat{y}$, נקבל:
$$T_1 \sin\theta - T_2 = 0$$

לכן:
$$T_1 = \frac{T_2}{\sin\theta}$$

מערכות מורכבות עם תנועה.

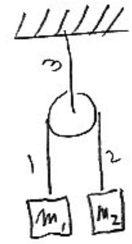
כשיש תנועה במערכת כבר לא מתקיים כי שוויון הכוחות על כל אלמנט מתאפס.
במקום זאת, יש להשתמש במשוואות החוק השני על כל אלמנט:

$$\underbrace{\sum_j \vec{F}_{ij}}_{\text{סך כל הכוחות על } m_i \text{ מאלמנט } j} = m_i \ddot{x}_i$$

אם האלמנט חסר מסה (דהיינו, בעל מסה זניחה לעומת האלמנטים האחרים במערכת) עדיין נקבל שסך כל הכוחות מתאפס: את החוק השני נכתוב:

$$\ddot{x}_i = \frac{\sum_j \vec{F}_{ij}}{m_i}$$

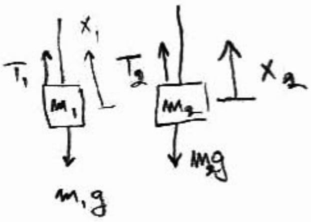
ו- $m_i \to 0$ אז כדי שתאוצת האלמנט תהיה סופית סך כל הכוחות עליו צריך להתאפס.



דוגמא: נתונה גלגלת חסרת חיכוך עליה מחליק חבל הקשור לשתי מסות m_1, m_2.
למה שווה המתיחות T_3 בחבל שמחזיק את הגלגלת?

הפעם ישנה תנועה במערכת. נכתוב את המשוואות שמתארות את תנועת m_1 ו- m_2:

$$\sum_i F_{1i} = m_1 a_1$$



נגדיר את הקואורדינטה של מסה 1 כ- x_1 ואז: $a_1 = \ddot{x}_1$

סה"כ נקבל:

$$T_1 - m_1 g = m_1 \ddot{x}_1$$

T_1 מופיע עם פלוס כאן והוא רוצה להגדיל את x_2. לעומת זאת, $m\vec{g}$ רוצה להקטין את x_1 ולכן מופיע עם סימן מינוס.

באותה דרך: $T_2 - m_2 g = m_2 \ddot{x}_2$

המשוואה שמתארת את סך הכוחות על הגלגלת: $T_3 - T_1 - T_2 = 0$

לכן: $T_3 = T_1 + T_2$

המשוואות החסרות הן המשוואות המתקבלות מהחבל.

ראשית, אורך החבל קבוע, ולכן: $X_1 + X_2 = const$ הקבוע נקבע לפי המיקום בו אנו שמים את נקודות ה- $X_1=0$ ו- $X_2=0$. ערכו אינו ישפיע על משוואות התנועה.

הקשר האחרון אותו אנו צריכים הוא בין T_1 ל- T_2. כשנלמד תנועה סיבובית ומומנטים, נראה כי באופן טריוויאלי מתקבל ש: $T_1=T_2$ אם אין חיכוך בין החבל לגלגלת והחבל חסר מסה (במידה ויש חיכוך עם הגלגלת, $T_1=T_2$ אם הגלגלת חסרת מסה גם כן והחיכוך עם הציר זניח), זאת מפני שהגלגל אינו יכול להפעיל כוח שאינו רדיאלי על החבל אם אין חיכוך. (או, הציר על הגלגל, אם החבל מחובר לגלגל). במקרה כזה, המומנטים היחידים שפועלים על החבל הם rT_1 בכיוון אחד ו- rT_2 בכיוון השני. סך המומנטים מתאפס אם אין לגוף (חבל או חבל + גלגלת) מסה ומתקבל ש: $T_1=T_2$

שוב, נראה זאת עוד מספר שיעורים כשנלמד מומנטים.

מה מקבלים אם כן מהמשוואות?

$$T_1 = m_1 g + m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + m_1\ddot{x}$$

$$T_2 = m_2 g + m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - m_2\ddot{x}$$

$\ddot{x} \equiv \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$ היות ו-

שוויון בין המתיחויות נותן:

$$m_1 g + m_1\ddot{x} = m_2 g - m_2\ddot{x}$$

סה"כ:

$$\ddot{x} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

(יחידות בסדר. כמו כן, תוצאה הגיונית. $m_2 = m_1$ נותן שאין תנועה. $m_1 = 0$ נותן ש $\ddot{x} = g$ (נפילה חופשית של x_2) $m_2 = 0$ נותן את ההפך).

למה שווה המתיחות T_3?

$$T_1 + T_2 = T_3$$

$$T_3 = m_1 g + m_1\ddot{x} + m_2 g - m_2\ddot{x}$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)} g = 4\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

חוק הכבידה של ניוטון

* כח הכבידה הפועל בין שני גופים פרופורציוני ישר למסותיהם M_1 ו-M_2 ופרופורציוני הפוך למרחק בין שני הגופים:

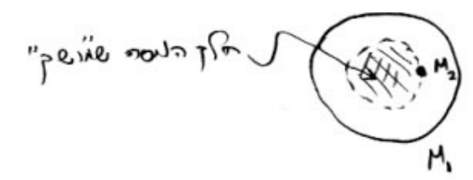
$$\vec{F} = -\frac{G M_1 M_2}{r^2}\hat{r}$$

G - קבוע הגרביטציה:

$$G = 6.67\times10^{-8}\ dyn\cdot cm^2\, gr^{-2}$$
$$= 6.67\times10^{-11}\ N\cdot m^2\, kg^{-2}$$

אנו הנחנו שהמסות נקודתיות. למעשה אם המסה אינה נקודתית, יש לבצע אינטגרל מרכב הסוכם את הכח מכל אלמנט במסה. ניתן להראות כי אם נמצאים מחוץ למסה בעלת סימטריה כדורית - ניתן להניח כי כל המסה מרוכזת בנקודה במרכז הכדור.

לעומת זאת, אם נמצאים בתוך מסה בעלת סימטריה כדורית, כי אז ניתן לתאר את המסה המושכת כמסה נקודתית עם מסה ששווה לחלק מהמסה הכדורית הנמצא ברדיוס קטן יותר מ-M_2:



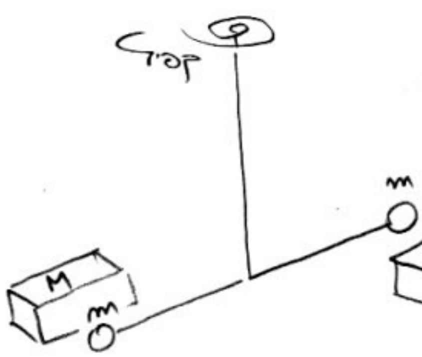
את התוצאה הנ"ל ניתן לקבל בעזרת חוק גאוס אותו תלמדו בהמשך הסמסטר.

הקשר בין g ל-G:

$$\vec{F} = -mg\vec{r} = -\frac{G M_\oplus m}{R_\oplus^2}\hat{r} \Rightarrow g = \frac{G M_\oplus}{R_\oplus^2}$$

ניוטון לא ידע את G, רק את $M_\oplus G$. כיצד מוצאים את G עצמו?

את G ניתן למצוא בעזרת ניסוי שנעשה לראשונה ע"י קוונדיש:



המסות m נמשכות ל-M.
כח המשיכה מנוגד ע"י כח ה"פיתול" של הקפיץ. מצב שיווי המשקל תלוי במסות, בקפיץ וב-G.

<u>עקרון האקוויולנטיות:</u>

המסה המופיעה ב- $F = \frac{GM_2M_1}{r^2}$ והמסה המופיעה ב- $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

הן אותן המסות. נראה אין סיבה להניח כי המסה "האינרציאלית" המופיעה בחוק ה-II

תהיה זהה למסה המופיעה בחוק הכבידה (למשל, המטען החשמלי אינו זהה

למסה של גוף). השוויון בין המסות נקרא עיקרון האקוויולנטיות. כיום ידוע

שהוא מתקיים לפחות עד כדי 5×10^{-13}.

<u>מסלול מעגלי של לוויין:</u>

במסלול מעגלי ($\dot{\theta} = \omega = const$) מתקבל: $\vec{a} = -\omega r^2 \hat{r}$

כדי להישאר על תאוצה זו, יש להשתמש בכוח, במקרה שלנו

(של לוויין) זהו כח הכבידה:

$$\vec{F} = -\frac{GM_\oplus m}{r^2}\vec{r}$$

לכן:

$$\frac{GM_\oplus m}{r^2} = m\omega^2 r$$

ומתקבל:

$$r^3 = \frac{GM_\oplus}{\omega^2} \quad \text{או} \quad \omega = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r^3}}, \quad v = r\omega = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}$$

נניח שאני רוצה לוויין עם מחזור של 24h (כלו', לוויין גיאוסינכרוני, השומר

מקום מעל נקודה קבועה על פני כדור הארץ.)

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

$$r^3 = \frac{GM_\oplus P^2}{(2\pi)^2} = \frac{6.67\times10^{-8}\,dyn\cdot cm^2\,gr^{-2}\,(5.98\times10^{27}\,gr)\,(24\cdot3600)^2\,s^2}{(2\pi)^2}$$

$$r = 4.2\times10^9\,m = 4.2\times10^4\,km$$

זאת ו- $r_\oplus$ הוא כ- 6400 ק"מ, מספר זה רדיוס הכדור פי 6.6.

דרך אחרת להציב, ללא ידיעת G:

הכח החשמלי והמגנטי

בכל נקודה במרחב יכול להיות "שדה" $\vec{E}$ ו- $\vec{B}$ (חשמלי ומגנטי).

בדומה לאנלוגית הניוטון לגרביטציה, בה קיים שדה $\vec{g}$ נקבל:

גרביטציה: שדה: $\vec{g}$ כח: $F=m\vec{g}$

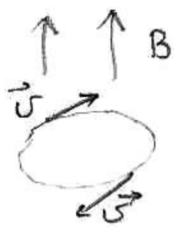
שדה חשמלי: שדה: $\vec{E}$ כח $\vec{F}=q\vec{E}$

לכן תנועה של חלקיק טעון ($q\neq 0$) בשדה חשמלי תהיה כמו תנועה של חלקיק מסיבי ($m\neq 0$) בשדה כבידה. אחד מההבדלים העקרוניים בין הכח החשמלי והכבידתי הוא שברושון, המקדם q שמקשר בין השדה לכח אינו קשור למסת החלקיק m שמופיעה בחוק ה-II של ניוטון, ובכבידה ה"מטען" הוא המסה האינרציאלית שמופיעה בחוק השני. ניסויית שוויון זה (שנקרא עקרון האקוויולנטיות) מתקיים עד כדי דיוק המדידה הרב. בתורת היחסות הכללית שוויון זה בנוי כחלק מהתורה.

הכח המגנטי יותר מורכב: $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ (m.k.s)

($\vec{F}=\frac{q}{c}v\times\vec{B}$ (c.g.s))

דהיינו, הכח המגנטי ניצב גם ל- $\vec{B}$ וגם ל- $\vec{v}$. התנועה שמקיימת $\vec{a}\,(\propto\vec{F})\perp\vec{v}$ היא כמובן התנועה המעגלית.



$$a \overset{\text{בגודל}}{=} \underbrace{\omega^2 r}_{\text{תנועה מעגלית}} \overset{\text{מחוק שני}}{=} \frac{F}{m} = \frac{qvB}{cm} = q\frac{r\omega B}{mc}$$

$\omega=\frac{qB}{mc}$) תדירות קבועה.