האנרגיה הקינטית

האנרגיה הקינטית של חלקיק בעל מסה m מוגדרת כ-

$$E \equiv \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

אם המערכת מכילה מספר חלקיקים בעלי מסות m_i ומהירויות v_i:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

התנע הוא וקטור ואילו האנרגיה הקינטית היא סקלר.

שימור אנרגיה ועבודה במימד אחד

* למה שווה שינוי האנרגיה בין זמן 1 לבין זמן 2 ?

את ההפרש באנרגיה ניתן לכתוב כ-

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m v^2)\, dt$$

למה שווה הנגזרת בזמן? נניח כי החלקיק נע במימד אחד z. המסה קבועה.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m v^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m v_z^2) = \underbrace{m v_z \frac{d v_z}{dt}}_{m a_z} = v_z F_z$$

כלומר:

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} v_z F_z\, dt = \int_{t_1}^{t_2} F_z \frac{dz}{dt}\, dt = \int_{z(t_1)}^{z(t_2)} F_z\, dz \equiv W$$

(כתיבת v_z מפורש.

(עבור למשתנה אינטגרציה z.

אנו מגדירים את אותו זה כעבודה שנעשית ע"י הכוח F_z.

מה שקיבלנו ⇐ שינוי האנרגיה הקינטית = עבודה: $\Delta E = W$

אם F_z ניתן לכתיבה כ- $F_z = -\frac{dU}{dz}$ ⇐ אזי $\left[U = -\int_{z_0}^{z} F_z\, dz \right.$ של הכוח F.

מגדירים כאנרגיה הפוטנציאלית

z_0 ← נקודת יחוס שרירותית (בחירת על-ידינו)

ואז:

$$\Delta E + \Delta U = 0$$

[או $\left(E(z_2)-E(z_1)\right)+\left(U(z_2)-U(z_1)\right)=0$]

להלן חוק שימור האנרגיה שאומר שסה"כ האנרגיה (קינטית + פוטנציאלית) נשמר

אם הכוח סטטי ניתן לכתיבה כ- $F_z=-\frac{dU}{dz}$.

כוח כזה נקרא <u>כוח משמר</u>.

<u>דוגמא לכוח משמר:</u>

כוח הכובד: $F=-mg\hat{z}$

$$U=-\int F_z\,dz = mgz$$

<u>דוגמא לכוח לא משמר:</u>

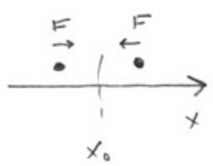
כל כוח חיכוך. כוחות שתלויים במהירות וכדומה.

$F=F(v)$ $U=???$

<u>דוגמא לפוטנציאל חד מימדי: הפוטנציאל ההרמוני.</u>

ראינו בעבר כי הכוח של קפיץ, "הכוח ההרמוני" נתון ע"י: $F=-k(x-x_0)$

x_0 היא נקודת שיווי המשקל. אם מזיזים את החלקיק ימינה מ-x_0 (כלומר $x>x_0$) נקבל $F<0$, דהיינו, כוח שרוצה להקטין את x. לעומת זאת, אם אנו מזיזים את x שמאלה מ-x_0, הכוח פועל ימינה (חיובי) ורוצה להחזיר את החלקיק שוב לכיוון x_0. ב- x_0, לא פועל כוח לכן נקודה זו נקראת נקודת שיווי משקל. היות ופועל כוח שרוצה להחזיר נקודה <u>אל</u> x_0 (תחת הרחק מ-x_0) נאמר: זו נקודת שיווי משקל <u>יציבה</u>.

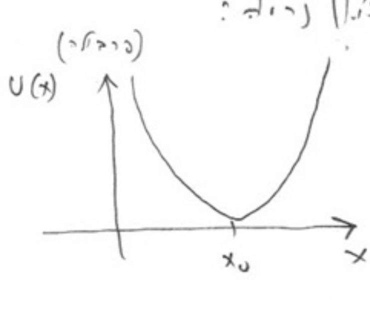


היות ו- F היא רק פונקציה של המקום (לא המהירות או הזמן מפורשות), ניתן לבצע אינטגרציה ולקבל פוטנציאל:

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F\,dx = -\int_{x_0}^{x} (-)k(x-x_0)\,dx = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

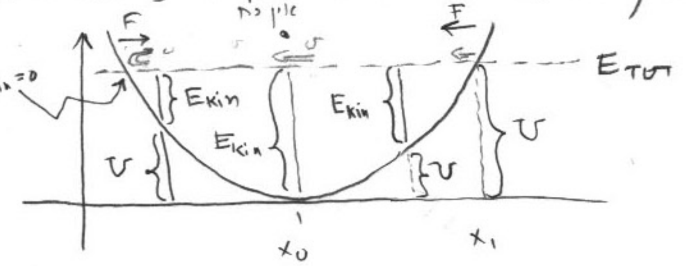
נקודת הייחוס היא שרירותית אנו בוחרים לשם נוחות את $x=x_0$ כנקודת הייחוס של הפוטנציאל)

באופן גרפי, הפוטנציאל נראה:



אם משחררים את החלקיק מ- $x=x_1$ נתון, בעת השחרור, אין לו אנרגיה קינטית. לכן, האנרגיה הכוללת תהיה: $E_{TOT}=\frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2$, אחרי רגע קט, הוא יפול שמאלה יקטין את x. האנרגיה הפוטנציאלית תקטן. היות והאנרגיה הכוללת נשמרת תהיה לחלקיק אנרגיה קינטית השווה לשינוי באנרגיה הפוטנציאלית. בהגיע החלקיק ל- x_0, כל האנרגיה הפוטנציאלית הפכה לאנרגיה קינטית. בגלל המהירות, החלקיק ימשיך. הוא ימשיך עד שהמהירות תתאפס. אז יחזור החלקיק ויעשה את התנועה ההפוכה.

$E_{kin}=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow$ כיוון תנועה מתחלף.



<u>דוגמא</u>, חלקיק מתחיל מנוחה בפוטנציאל הרמוני, $\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$, מנקודה x_1. למה שווה מהירותו בהגיעו לנקודה x_0?

<u>פתרון</u>: עצם העובדה שמוגדר פוטנציאל אומרת כי ישנו שימור אנרגיה מכנית - אנרגיה קינטית + אנרגיה פוטנציאלית. נסתכל על האנרגיות לפני ואחרי:

לפני: $$E_{TOT}=\underset{\text{קינטי}}{0}+\frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2$$

אחרי: $$E_{TOT}=\frac{1}{2}mv^2+\overset{\text{פוטנציאל}}{0}$$

שיוויון $\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2$

$$\Leftarrow v=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,|(x_1-x_0)|$$

הערך המוחלט הופיע כי אנו מוציאים שורש והמהירות יכולה להיות חיובית או שלילית, בלי קשר ל: x_1-x_0

אנרגיה יחידות:

יחידת האנרגיה ב- c.g.s היא הארג (erg):

$$1\,erg = gr\,\frac{cm^2}{sec^2}$$

יחידת האנרגיה ב- m.k.s היא הג'אול (Joule)

$$1J = kg\,\frac{m^2}{sec^2} = 10^7\,erg$$

יחידה נפוצה נוספת: קלוריה: (כמות האנרגיה הדרושה לחימום גרם מים ב-4^0C במעלה אחת)..

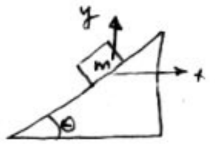
$$1C = 4.2\,J$$

קלוריה "של אוכל" היא קילוקלוריה:

$$1kC = 1000\,C$$

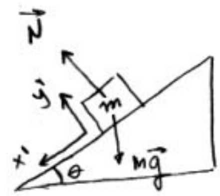
(מאה גרם שמן מכילים 900 קילוקלוריות של אנרגיה...)

שתי דוגמאות לשימוש באנרגיה לעומת שימוש בכוחות:



* מסה על מדרון: ⇐ מהו $v(y)$?

⇐ מהו המרחק $x'(t)$ לאורך המדרון?



פתרון בעזרת כוחות:

שני הכוחות אשר "מרגישה" המסה m הם $\vec{N}$ - הכח הנורמל (ניצב) למישור המונע מהמסה לעבור דרך המישור. ו- $m\vec{g}$, שהוא הכח הכבידה המושך את המסה כלפי כדור הארץ.

לשם נוחות, נעבוד במערכת צירים מסובבת x',y' כך שהתנועה מאולצת לנוע בציר x' ואילו הכח הנורמלי היה בציר y'.

ציר y': כח נורמלי $\vec{N}$, אבל אין תאוצה ⇐ סכום הכוחות שווה לאפס:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \hat{y}': \quad N - mg\cos\theta = ma_{y'} = 0$$

$$\Downarrow$$

ציר x':

$$\hat{x}': \quad mg\sin\theta = ma_{x'}$$

$$a_{x'} \equiv \frac{d^2x'}{dt^2} \equiv \underbrace{\ddot{x}' = g\sin\theta}_{\text{משוואת תנועה מסדר שני (בזמן!)}} \rightarrow v_{x'} = v = g(\sin\theta)t$$

מתחיל ממנוחה ←

$$x' = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$$

מתחיל מ-$x'=0$ ←

כדי לקבל $v(y)$, אנו צריכים קשר בין x' ל- y:

$$y = -x'\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}gt^2\sin^2\theta$$

בדיקה: (אם $\theta=0$ אין תנועה ב- y ו- x').

לכן:

$$t=\sqrt{\frac{2(-y)}{g\sin^2\theta}}$$

ולכן:

$$v=gt\sin\theta=\sqrt{2(-y)g}$$

כעת נחזור ל- a ונפתור בעזרת שימור אנרגיה:

אנרגיה קינטית: $E=\frac{1}{2}mv^2$

אנרגיה פוטנציאלית: $U=+mgy$

שימור אנרגיה נותן:

$$E+U=const \Rightarrow \Delta E+\Delta U=0$$

$$\left(\frac{1}{2}mv^2-\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{0}\right)+\left(mgy-\underbrace{mgy_0}_{0}\right)=0$$

מניחים כי מתחיל ממנוחה.

0 לשם נוחות

$$v=\sqrt{2g(-y)}$$

כדי למצוא את הדרך x', נגדיר משתנה x':

$$x'=-\frac{y}{\sin\theta}$$

ולכן:

$$v=\frac{dx'}{dt}\equiv\dot{x}'=\sqrt{2gx'\sin\theta}$$

משוואת תנועה מסדר I בזמן

כדי לבצע אינטגרציה, נבצע הפרדת משתנים:

$$\frac{dx'}{x'^{1/2}}=\sqrt{2g\sin\theta}\,dt$$

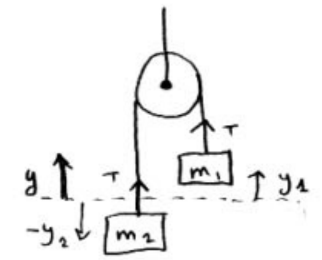
$$\int_{x'=0}^{x'}\frac{dx'}{x'^{1/2}}=\int_{t=0}^{t}\sqrt{2g\sin\theta}\,dt$$

$$2x'^{1/2}=\sqrt{2g\sin\theta}\,dt$$

$$x'=\frac{1}{2}gt^2\sin\theta$$

אם משתמשים בדרך שימור האנרגיה – מתקבלת משוואת תנועה מסדר ראשון ולא מסדר שני בזמן כפי שמתקבל אם משתמשים בכוחות.

דוגמא שניה: "מכונת אטווד" (Atwood Machine)



שתי מסות תלויות על חבל המונח על גלגלת חסרת חיכוך.

א. מה משוואת התנועה המתקבלת ע"י כוחות וע"י שימור אנרגיה?

ב. מה הפתרון אם הגלגלת מתחילה ממנוחה.

פתרון ע"י כוחות: הכח על מסה m_1:

$$\sum_i F_{1i} = m_1\ddot{r}_1$$

סך הכוחות ← i

הכוחות הם:

$$\vec{T} + m_1\vec{g} = m_1\ddot{\vec{r}}_1$$

נסתכל על רכיב $\hat{y}$:

$$T - m_1 g = m_1\ddot{y}_1$$

באותו אופן מסה 2:

$$T - m_2 g = m_2\ddot{y}_2$$

אותה מתיחות T.

היות והחבל לא נמתח - אורכו נשמר, כמו כן, (נבחר את המצב ההתחלתי כ- $y_1=y_2=0$) ונקבל:

$$y_1 = -y_2 \Rightarrow \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$

ע"י השוואת ה-T בין המשוואות, נקבל:

$$m_1\ddot{y}_1 + m_1 g = T = m_2\ddot{y}_2 + m_2 g$$

$$= -m_2\ddot{y}_1 + m_2 g$$

לכן:

$$\ddot{y}_1 = \left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g \xrightarrow[\text{אינטגרציה}]{} y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g t^2$$

+ מהירות התחלתית=0

בדיקה: אם המסות שוות אין תאוצה ✓ אם $m_2=0$, המסה m_1 נופלת נפילה חופשית ✓

פתרון ע"י שימור אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_1^2$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = (m_1-m_2) g y_1$$

$y_1=-y_2$; $\dot{y}_1=-\dot{y}_2$ אילוץ

שימור אנרגיה:

$$E+U = const \rightarrow \Delta E + \Delta U = 0$$

=0 אם מגדירים מצב התחלתי $y_1=0$.

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{y}_1^2 + \underbrace{\dot{y}_1^2(0)}_{}\right) + (m_2-m_1)\, g\, (y_1 - \overline{y_1(0)}) = 0$$

=0 אם מתחיל ממנוחה

כאמור:

=0 אם מגדירים מצב התחלתי $y_1=0$

$$\dot{y}_1^2 = \overline{\dot{y}_1^2(0)} + 2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g\,(y_1 - \overline{y_1(0)})$$

זהו משוואת התנועה משימור אנרגיה

נציב $\dot{y}_1(0)=0$, $y_1(0)=0$ ונקבל:

$$\frac{dy_1}{dt} = \sqrt{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g\, y_1}$$

ע״י הפרדת משתנים ואינטגרציה:

$$\int_{y_1=0}^{y_1} \frac{dy_1}{y_1^{1/2}} = \sqrt{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g} \int_{t=0}^{t} dt$$

ולכן:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g t^2$$

אנרגיה, עבודה וכוחות משמרים ב- 3D

כעת ברצוננו להכליל את הגדרת האנרגיה והעבודה במרחב תלת מימדי.

הגדרת האנרגיה $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$

השינוי באנרגיה בין שני מצבים $1 \to 2$ יהיה נתון ע"י:

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\cdot\underbrace{\frac{d(m\vec{v})}{dt}}_{\vec{F}\text{ מחוק II.}}\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

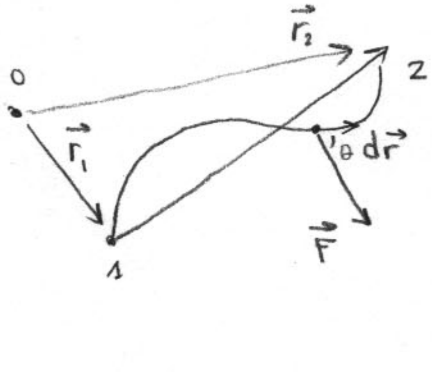
הביטוי $\vec{F}\cdot\vec{v}$ הוא קצב שינוי האנרגיה ע"י הכח F. לכן זהו ההספק (עבודה ליח' זמן) של העבודה של כח F. הואיל ו- $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ נקבל:

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt \underset{\text{החלפת משתנים}}{=} \int_{r(t_1)}^{r(t_2)} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \underbrace{W}_{\text{העבודה שעושה כח } \vec{F} \text{ על המסה.}}$$

העבודה מוגדרת ע"י אינטגרל מסלולי. מה זה אינטגרל מסלולי?

באינטגרל זה אנו הולכים על דרך נתונה (יש לכן לציין איזה מבין אינסוף הדרכים בין 1 ל-2 מבוצע האינטגרל) וסוכמים את האינטגרנד, במקרה שלנו:

על כל צעד $d\vec{r}$ לאורך הדרך, אנו סוכמים את $\vec{F}\cdot d\vec{r}$, ז.א. הולכים dr וסוכמים את $\vec{F}\cdot d\hat{r}$ - הרכיב של $\vec{F}$ בכיוון המסלול.



כוחות משמרים:

העבודה שכח עושה על חלקיק (נתונה ע"י):

$$W=\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\cdot d\vec r$$

ז"א אנו בוחרים את המסלול של החלקיק במסלול האינטגרל. לאורך המסלול אנו צריכים לסכום את הרכיב של $\vec F$ בכיוון המסלול. דוגמא פשוטה ביותר: כח קבוע:

$$W\Big|_{\vec F=const}=\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\cdot d\vec r=\vec F\cdot\underbrace{\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}d\vec r}=\vec F\cdot(\vec r_2-\vec r_1)$$

אם $\vec F$ קבוע הוא יכול לצאת מהאינטגרל.

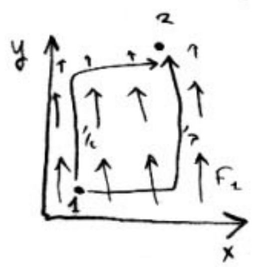
לסכום את כל קטעי הדיוק $d\vec r$ $=(\vec r_2-\vec r_1)$

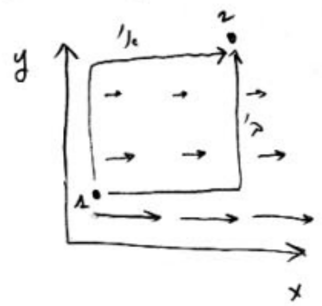
דוגמא נוספת, כח התלוי רק בקואורדינטה אחת והוא מכוון אותה קואורדינטה:

$$\vec F_1=F_y(y)\hat y$$

כח התלוי בקואורדינטה אחת וניצב לקואורדינטה הזו:

$$\vec F_2=F_x(y)\hat x$$

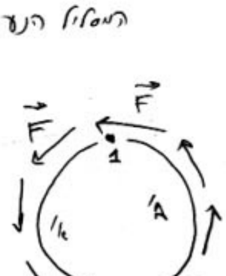




כאן ברור שהתרומה ל-W זהה בשני המסלולים: בחלק הראשון של מסלול ב' ובחלק השני של מסלול א' התרומה ל-W אפס. בחלקי המסלול האחרים, התרומה זהה.

כאן W גדל במסלול ב' - מהתרומה מהחלק הראשון של המסלול. במסלול א' לעומת זאת התרומה בחלק המסלול העליון ימינה היא קטן.

דוגמא נוספת:



עבור הכח המתואר בציור - ברור כי W חיובי עבור מסלול א' ואילו W שלילי עבור מסלול ב'. לחילופין, ניתן לראות שעבור מסלול סגור $W=\oint\vec F\cdot d\vec r\neq 0$

אינטגרל על מסלול סגור.

ז"א במקרה זה ברור כי המסלול חשוב לערך האינטגרל והכן אי אפשר לרשום אותו כהפרש של פונקציה בקצוות האינטגרל.

כדי לראות מה קורה בשני המקרים הראשונים, אנו צריכים לתאר את המסלול
באופן שהוא צורה; (נבחר לעשות זאת עם פרמטר s):

$$x = x(s),\quad y = y(s),\quad z = z(s)$$

כך ש- $\vec{r}_1$ מתקבל מ- $s=s_1$ ו- $\vec{r}_2$ מ- $s=s_2$. איך יראה האינטגרל?

$$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} = \left(\frac{dx}{ds}\hat{x} + \frac{dy}{ds}\hat{y} + \frac{dz}{ds}\hat{z}\right)ds$$

ולכן:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(F_x\frac{dx}{ds} + F_y\frac{dy}{ds} + F_z\frac{dz}{ds}\right)ds$$

* במקרה הראשון:

$$\vec{F}_1\cdot d\vec{r} = F_y(y)\frac{dy}{ds}\,ds$$

נבחר את הפרמטר s כ- y (זאת זכותנו!):

$$= F_y(y)\,dy$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}_1\cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2}F_y(y)\,dy \underset{\uparrow}{=} -(U_2 - U_1)$$

$$F_y(y) \equiv -\frac{dU(y)}{dy}$$

את האינטגרל הזה ניתן לכתוב
בעזרת פוטנציאל!

* במקרה השני:

$$\vec{F}_2\cdot d\vec{r} = F_x(y)\frac{dx}{ds}\,ds = F_x(y)\frac{dx}{dy}\,dy$$

הכוח והפונקציה הם פונקציה של y, נבחר שוב $s=y$:

לכן:

$$W = \int_{y_1}^{y_2}F_x(y)\frac{dx}{dy}\,dy$$

אולם כעת, האינטגרנד מכיל את $\frac{dx}{dy}$, שהוא תלוי
בדרך ולא ניתן יהיה לכתוב אותו, בהכרח, כהפרש ערכים של פוטנציאל בקצה.

כוח נשמר באופן כללי - ב- 3D:

כוח משמר הוא כוח שניתן לכתובה בעזרת פוטנציאל:

$$U = U(x,y,z)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

״נגזרת חלקית״
← בגזירה לפי x
ושמירה על הפרמטרים
האחרים קבוע.

במקרה כזה:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)}\,ds$$

אולם, הביטוי בסוגריים הוא כלל השרשרת לפונקציה עם מספר משתנים:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\frac{dU}{ds}}\,ds$$

(נגזרת ״שלמה״ של U לפי s -
נגזרת $U(x,y,z)$ לפי כל מה
שתלוי ב- s.

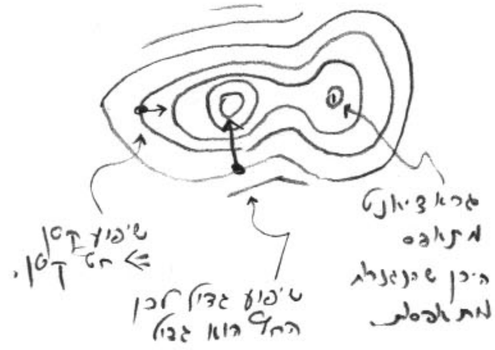
ולכן, במקרה זה:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{s_1}^{s_2}\frac{dU}{ds}\,ds = -\left(U(s_2) - U(s_1)\right)$$

כלומר, גם ניתן לכתוב זאת:

$$\vec F = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat x - \frac{\partial U}{\partial y}\hat y - \frac{\partial U}{\partial z}\hat z \equiv -\vec\nabla U$$

ואז העבודה תלויה רק בערכי הקצה של הפוטנציאל U. הפעולה $\vec\nabla U$ המוגדרת כאן נקראת הגרדיאנט של U. היא נותנת וקטור שכיוונו כיוון הגדילה המקסימלי של U וגודלו גודל הנגזרת. ניתן להבין זאת אינטואיטיבית ע״י ״מפה טופוגרפית״ של U. ב-2D U יכול להיראות למשל:



על המפה ניתן לסמן וקטורים שהם הגרדיאנט של U

האופרטור $\vec\nabla$ נקרא נַבְּלָה (nabla)

(זה שם כלי הנגינה שמגיע מהמילה נבל בעברית או שפות שמיות מערביות אחרות!).

וניתן לתאר אותו כ״וקטור״ הבא:

$$\vec\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat x + \frac{\partial}{\partial y}\hat y + \frac{\partial}{\partial z}\hat z$$

* כיצד נדע כי כח הוא אכן כח משמר?

אם כח הוא כח משמר, העבודה תהיה תלויה רק בערכי הקצה. לכן העבודה על כל מסלול סגור תהיה בהכרח שווה ל-0:

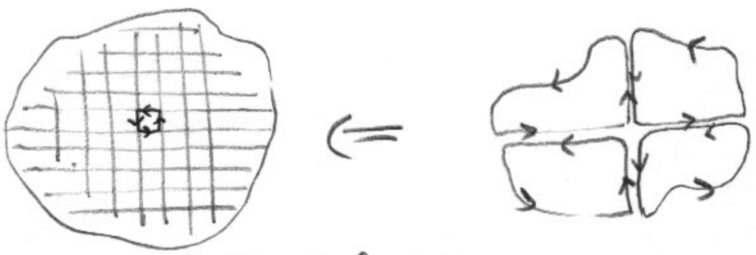
על מסלול סגור $\oint \vec F\cdot d\vec r = 0$

נסתכל ב-2D, על מסלול כלשהו:

את המסלול הזה ניתן לחלק לשני מסלולים:

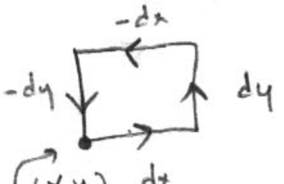
זאת מפני שהקטע המשותף מתקזז - פעם עוברים עליו בכיוון אחד, ופעם בכיוון השני. כך ש- $\vec F\cdot d\vec r$ הפוך בשני הכיוונים.

ואפשר לחלק עוד ועוד:



אני יכולה לחלק את האינטגרל להמון אינטגרלים קטנים.

אם הכח משמר אזי בכל מסלול ניתן לפרק לאוסף של אינטגרלים קטנים. לכן אם האינטגרל על כל מסלול קטן מתאפס, בהכרח גם האינטגרל על המסלול הגבול, מאידך גיסא, אם אחד מהאינטגרלים הקטנים אינו מתאפס אז ישנו מסלול שאינו משמר (גם אם הוא קטן) ולכן הכח לא משמר. לכן כח משמר יתקבל אם ורק אם האינטגרל על כל מסלול קטן מתאפס.



נסתכל על מסלול קטן (אינפיניטסימלי).

נחלק את האינטגרל לארבע קטעים:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(x,y)}^{(x+dx,y)} F_x(x,y)\,dx \; +$$

$$+ \int_{(x+dx,y)}^{(x+dx,y+dy)} F_y(x+dx,y)\,dy + \int_{(x+dx,y+dy)}^{(x,y+dy)} F_x(x,y+dy)\,dx + \int_{(x,y+dy)}^{(x,y)} F_y(x,y)\,dy$$

נחבר כעת את האינטגרלים לזוגות ונזכור אם dx,dy הם קטנים. כי, אם הופכים את כיוון האינטגרל, הסימן מתהפך!

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_x^{x+dx} \Big(F_x(x,y) - F_x(x,y+dy)\Big)\,dx \; +$$

$$+ \int_y^{y+dy} \Big(F_y(x+dx,y) - F_y(x,y)\Big)\,dy$$

$$\cong \big(F_x(x,y) - F_x(x,y+dy)\big)\,dx + \big(F_y(x+dx,y) - F_y(x,y)\big)\,dy$$

$$\int_x^{x+dx} f\,dx \approx f\cdot dx$$

אולם לפי ההגדרה של נגזרת:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

ולכן:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{\partial F_x}{\partial y}\,dy\,dx + \frac{\partial F_y}{\partial x}\,dx\,dy$$

נקבל שהאינטגרל הקטן יתאפס אם הנגזרות המעורבות שוות:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} \end{cases}$$

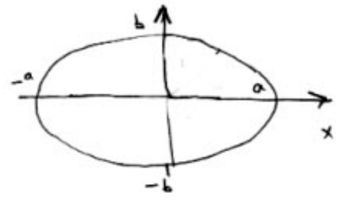
באופן כללי, בשלושה מימדים, יתקבלו תנאים נוספים.
אם שלושתם מתקיימים אזי $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$ על כל מסלול מתאפס והשדה היה שדה משמר רק שניתן להגדיר בו(1.3).

$$\Updownarrow$$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U \Leftrightarrow$$ שדה משמר.

דוגמא:

נתון הכח $\vec{F}=(2x+3y)\hat{x}+(4y-3x)\hat{y}$. למה שווה העבודה לאורך המסלול הסגור המתואר ע"י האליפסה:



פתרון: האם הכח משמר?

נחשב את רכיב $\hat{z}$ של הרוטור: $\vec{\nabla}\times\vec{F}$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = -3-3=-6 \neq 0$$

הכח אינו משמר ולכן: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$.·. נחשב את האינטגרציה מפורשות לכן.

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy = (2x+3y)\,dx + (4y-3x)\,dy$$

נתאר את המסלול בעזרת הזוית θ

$$x = a\cos\theta \qquad y = b\sin\theta$$

$$dx = -a\sin\theta\, d\theta \qquad dy = b\cos\theta\, d\theta$$

המסלול מתואר ע"י $\theta = 0 \to 2\pi$. העבודה היא לכן:

$$W = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[(2a\cos\theta + 3b\sin\theta)(-a\sin\theta) + (4b\sin\theta - 3a\cos\theta)\,b\cos\theta\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{(a^2-2b^2)\sin(2\theta)}_{\text{אינטגרל מתאפס!}} - 3ab\Big)\, d\theta = -6\pi ab \neq 0$$

דוגמאות לכוח משמר - כוח מרכזי

כוח מרכזי היא כוח בעל כיוון רדיאלי בלבד וגודלו תלוי ברדיוס בלבד.

פורמלית, ניתן לכתוב את הכוח כ- $\vec{F} = f(r)\hat{r}$

נראה כי הוא כוח משמר. דרך אחת היא לכתוב את הרוטור בקואורדינטות ספריות, אולם אנו לא יודעים לעשות זאת עדיין! אז נכתוב את הכוח בקואורדינטות קרטזיות ונפעיל את הרוטור עליו.

ראשית, הוקטור $\hat{r}$ למה הוא שווה?

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{|\vec{r}|} = \frac{x}{|\vec{r}|}\hat{x} + \frac{y}{|\vec{r}|}\hat{y} + \frac{z}{|\vec{r}|}\hat{z}$$

לכן:

$$\vec{F} = \frac{f(r)x}{|\vec{r}|}\hat{x} + \frac{f(r)y}{|\vec{r}|}\hat{y} + \frac{f(r)z}{|\vec{r}|}\hat{z} = g(r)x\hat{x} + \underbrace{g(r)y}_{F_y}\hat{y} + \underbrace{g(r)z}_{F_z}\hat{z}$$

נגדיר לשם נוחות: $g(r) = \frac{f(r)}{r}$

למה שווה רכיב $\hat{x}$ של הרוטור?

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial(g(r)z)}{\partial y} - \frac{\partial(g(r)y)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial(g(r))}{\partial y}z - \frac{\partial(g(r))}{\partial z}y = \underbrace{\frac{dg(r)}{dr}}_{=g'(r)}\frac{\partial r}{\partial y}z - \frac{dg(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}y =$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$= g'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot z - g'(r)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}y = 0$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

בדרך דומה, מתאפסים רכיבי $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$ של $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

היות ו- $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ ניתן לכתוב את $\vec{F}$ בעזרת גרדיאנט של פוטנציאל:

$\vec{F} = -\nabla U$, U הוא הפוטנציאל וניתן לראות שהוא יהיה תלוי רק ברדיוס r:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{x} - \frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{y} - \frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{z}$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$= -\frac{dU}{dr}\frac{x}{r}\hat{x} - \frac{dU}{dr}\frac{y}{r}\hat{y} - \frac{dU}{dr}\frac{z}{r}\hat{z}$$

$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{\ }} = \frac{y}{r}$

מהשוואה לביטוי עבור $\vec{F}$ למעלה רואים: $f(r) = -\frac{dU}{dr}$

כלומר:

$$U(r) \Longleftrightarrow \vec{F} = f(r)\hat{r} = -\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

<u>מהירות בריחה</u> :

כדי לחשב את מהירות הבריחה, נשתמש באנרגיות. נגדיר אנרגיה פוטנציאלית. לשם נוחות, נגדיר את נקודת האפס ב- $r=\infty$. לכן :

$$U(r) = \underbrace{-\int_{r=\infty}^{r} F\,dr}_{\text{הגדרה.}} = -\int_{r=\infty}^{r} \underbrace{(-)}_{\text{כי פונה פנימה.}}\frac{GM_1M_2}{r^2}\,dr = -\frac{GM_1M_2}{r}$$

האנרגיה הקינטית על פני כדור הארץ + אנרגיה פוטנציאלית שווה לאנרגיה קינטית מינימלית ב- $r=\infty$ + אנרגיה פוטנציאלית ב- $r=\infty$. האנרגיה הקינטית המינימלית היא 0. (כל אנרגיה התחלתית גדולה יותר תיתן מהירות סופית ב- $r=\infty$):

$$\Delta(E+U)=0$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2}_{=0} + \left(-\frac{GM_\oplus m}{r_0} + \frac{GM_\oplus m}{r_\infty}\right) = 0$$

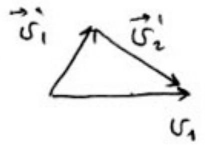
$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{r_0}}$$

מהירות הבריחה גדולה בפקטור $\sqrt{2}$ מהמהירות הדרושה לתנועה מעגלית באותו הרדיוס.

מה קורה בהתנגשות אלסטית?

נסתכל על התנגשות בין שני חלקיקים בעלי אותה מסה, כאשר אחד מהם במנוחה.
מה ניתן לומר על המהירויות לאחר ההתנגשות?

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1+\underbrace{0}_{\text{חלקיק 2 במנוחה לפני}} = \vec{p}_1{}'+\vec{p}_2{}' = m_1\vec{v}_1{}'+m_2\vec{v}_2{}'$$



$m_1=m_2$ לכן:

$$\vec{v}_1=\vec{v}_1{}'+\vec{v}_2{}'$$

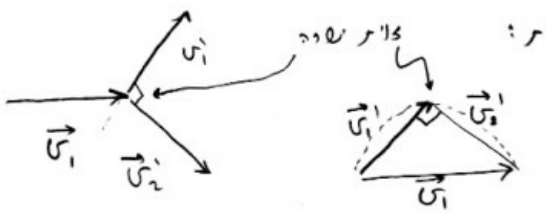
נניח כעת כי ההתנגשות גם אלסטית:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

משוויון מסות:

$$\vec{v}^2=\vec{v}_1{}'^2+\vec{v}_2{}'^2$$

הלא זהו משפט פיתגורס עבור משולש ישר זוית:



גרפית מתקיים:

הזוית פיזור בין $\vec{v}_1{}'$ ו- $\vec{v}_2{}'$ היא 90°.

דוגמא נוספת: התנגשות חד מימדית

אם המערכת חד מימדית יהיו לנו שני נעלמים v_1' ו-v_2' ושתי משוואות - תנע ואנרגיה.
נסתכל על מסה m_2 במנוחה לפני ההתנגשות (אולם הפעם $m_1\neq m_2$).

כשיש שימור אנרגיה:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

מהמשוואה הראשונה:

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2'$$

נציב במשוואה לשימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2' \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - m_1 v_1 \frac{m_2}{m_1} v_2' + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 v_2'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

נחלק ב- v_2' ונעביר את v_1 לצד השני:

$$v_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{2 v_1}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}$$

והאנרגיה הקינטית של חלקיק 2:

$$K_2' = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{4 v_1^2}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^2} = \frac{4 \frac{m_2}{m_1}}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{K_1}$$

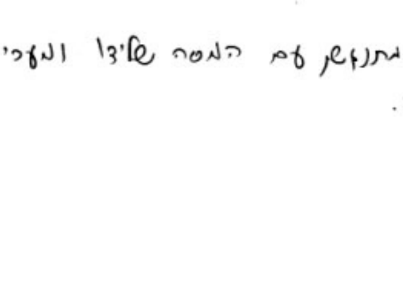
ננסה מה קורה במספר מקרים:

<u>$m_1 = m_2$</u> במקרה כזה $K_2' = K_1$ ולכן:

אנרגיה התחלתית.

$$K_1' = \overbrace{K_1} - K_2' = 0$$

ז.א. החלקיק הפוגע נעצר!



זה גם מסביר את המשחק המשרדי של מסות תלויות

כל מסה מתנגשת עם המסה שלידה ומעבירה לה את התנע.

<u>נסתכל בגבול</u> $\underline{m_1 \ll m_2}$:

$$v_2 = \frac{2v_1}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)} \simeq \underbrace{2\frac{m_1}{m_2}v_1 \ll v_1}$$

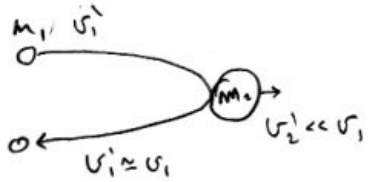
הרבה יותר גדול מ-1

החלקיק הנפגע m_2 כמעט לא יזוז!

השינוי באנרגיה הקינטית של חלקיק 2:

$$K_2' = \frac{4\frac{m_2}{m_1}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2}K_1 \simeq \frac{4\frac{m_2}{m_1}}{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}K_1 = \underbrace{4\left(\frac{m_1}{m_2}\right)K_1}$$

מעט אנרגיה עוברת ל-m_2.



<u>נסתכל בגבול $m_1 \gg m_2$</u> :

הפעם המהירות של v_2 גדולה פי שניים מ-v_1.

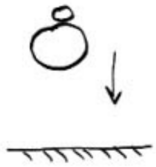
$$v_2 = \frac{2v_1}{1+\frac{m_2}{m_1}} \simeq 2v_1$$

אבל האנרגיה עדיין קטנה מאוד.

$$K_2' = \frac{4\frac{m_2}{m_1}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2}K_1 \approx 4\frac{m_2}{m_1}K_1$$

מסקנה - כדי שחלקיקים יוכלו להעביר אנרגיה זה מזה באפקטיביות, ההתנגשות
על המסה שהם חייבת קרובה. (כשאלקטרון מתנגש בפרוטון יגיע
העברת אנרגיה קטנה מאוד מהפרוטון).

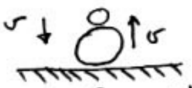
כעת ניתן להבין גם את הדגמת שני הכדורים:



לפני פגיעה בקרקע

כששני הכדורים נופלים, הם נופלים נפילה חופשית.

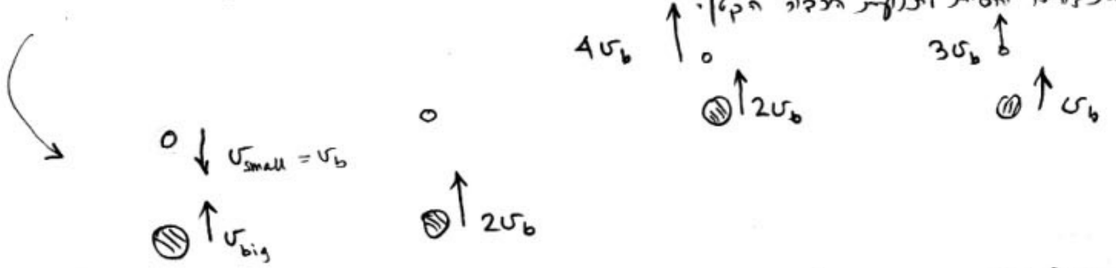
כשהכדור הגדול פוגע בקרקע הוא מתנגש במסה גדולה מאוד ולכן, אם ההתנגשות אלסטית, יחזור באותה מהירות כלפי מעלה.



מעט אחרי שכדור גדול פוגע בקרקע אך לפני שהקטן פוגע בגדול

הכדור הגדול מיד יתנגש בכדור הקטן ונניח שגם ההתנגשות שלהם אלסטית.

נסתכל על הכדורים יחסית לתנועת הכדור הקטן:



לפני התנגשות. צופה במערכת

יחסית לכדור הקטן, יש לנוע למעלה ב- v

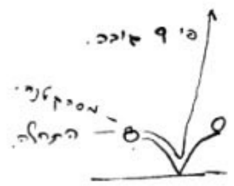
אחרי ההתנגשות במערכת שהיא עם הכדור הקטן במנוחה.

חזרה למערכת המעבדה, יש להוסיף $v_b = 3v$

לכן, הכדור הקטן יקבל מהירות שהיא פי שלוש מהמהירות הנפילה של הכדור הגדול).

היות ו- $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$ ← הגדלת המהירות פי 3 תגדיל את הגובה

בסופו פי 9.



מקדם התקומה   Coefficient of restitution

בהתנגשויות שהן לא אלסטיות, נהוג להגדיר את מקדם התקומה - שהוא היחס בין המהירות היחסית אחרי התנגשות חזיתית למהירות היחסית לפני ההתנגשות. היות והפרש המהירויות נכנס להגדרה, המהירות של המערכת (או אם מחשבים במערכת המעבדה או מרכז המסה) אינה נכנסת למקדם התקומה!

$$\epsilon = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad \begin{matrix} \} \text{ אחרי} \\ \} \text{ לפני} \end{matrix}$$

ההתנגשות.

* מה הקשר בין מקדם התקומה לאנרגיה הקינטית?

היות והמהירות היחסית אינה נכנסת, נסתכל על התנגשות במערכת מרכז המסה. האנרגיה הקינטית הקשורה לתנועת מרכז המסה אינה משתנה בהתנגשות. נראה מה קורה לאנרגיה הקינטית של התנועה יחסית למרכז המסה.

היות ותנועת החלקיקים במרכז המסה מקיימת שמרכז המסה עומד, נקבל:

לפני: $v_2 = -v_1 \frac{m_1}{m_2}$ אחרי: $v_2' = -v_1' \frac{m_1}{m_2}$

האנרגיה הקינטית (שהיא יחסית למרכז המסה כי אין תרומה של תנועת מרכז המסה אם עובדים במערכת מ.מ.) אחרי ההתנגשות:

$$E_k' = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} v_1'^2$$

$$= m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1'^2$$

אולם, בעזרת מקדם התקומה:

$$v_2' - v_1' = -\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1' \overset{\downarrow}{=} \epsilon\,(v_1 - v_2) = \epsilon\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1$$

$$v_1'^2 = \epsilon^2 v_1^2$$

וכו':

לכן:

מהמצה $\qquad$ מ-$v_1'^2 = \epsilon^2 v_1^2$

$$E_k' = m_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)v_1'^2 = \epsilon^2\left(m_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\right)v_1^2 = \epsilon^2 E_k$$

ז"א. האנרגיה הקינטית של התנועה היחסית למרכז המסה קטנה בפקטור ϵ^2 (וכאמור, האנרגיה הקינטית של מרכז המסה אינה יכולה להשתנות בהתנגשות).

דוגמא: מה המרחק הכולל אותו עובר כדור-סל הנופל מגובה h ועד לעצירתו?

כדור הארץ הוא מערכת מרכז המסה. לכן:

$$\underbrace{mgh}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית התחלתית}} \longrightarrow \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{\text{אנרגיה קינטית שהיא יחסית למרכז המסה!}} \longrightarrow \underbrace{\epsilon^2\tfrac{1}{2}mv^2}_{\text{אחרי ההתנגשות}} = \tfrac{1}{2}mv'^2 \rightarrow$$

לכן:

$$\rightarrow mgh' = \epsilon^2 mgh \Rightarrow h' = \epsilon^2 h$$

באותו אופן, h'', אחרי שתי פגיעות בקרקע: $h'' = \epsilon^4 h$

לכן, המרחק הכולל הוא:

$$d = \underbrace{h}_{\text{רק מהגובה ההתחלתי הכדור נוסע פעם אחת.}} + 2h' + 2h'' + 2h''' + \dots$$

$$= h + 2(\epsilon^2 + \epsilon^4 + \epsilon^6 + \dots)h$$

$$= h\left(1 + \frac{2\epsilon^2}{1-\epsilon^2}\right) = \left(\frac{1+\epsilon^2}{1-\epsilon^2}\right)h$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

עבור כדורסל: $\epsilon \sim 0.6$ לכן:

$$d = \left(\frac{1+0.36}{1-0.36}\right)h \approx 2.1h$$

יותר מפעמיים הגובה ההתחלתי.