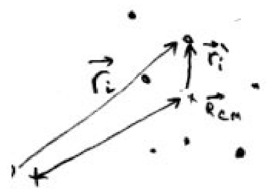
אנרגיה קינטית במרכז המסה

נחזור שוב להגדרה שלמערכת מרכז המסה, ונסתכל על הביטוי עבור האנרגיה שבה.

$$\underbrace{\vec{r}_i}_{\text{מיקום חלקיק}} = \underbrace{\vec{R}_{cm}}_{\text{מיקום מרכז המסה}} + \underbrace{\vec{r}_i\,'}_{\text{מיקום יחסי למרכז המסה.}}$$



$\vec{r}_i\,'$ מתאר את מיקום החלקיק i יחסית למרכז המסה.

* ראינו כי התנע מקיים:

$$m_i\dot{\vec{r}}_i = m_i\dot{\vec{R}}_{cm} + m_i\dot{\vec{r}}_i\,'$$

ואחרי סיכום:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}}_{cm} + \sum m_i\dot{\vec{r}}_i\,'$$

ז.א. התנע הכולל של המערכת הוא התנע של מרכז המסה + התנע של כל החלקיקים יחסית למרכז המסה.

אולם אם המסות m_i קבועות:

$$\sum m_i\dot{\vec{r}}_i\,' = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum m_i\vec{r}_i\,'}_{=M\vec{R}\,'_{cm}}\Big) = 0$$

כאשר $\vec{R}\,'_{cm}$ הוא וקטור מרכז המסה במערכת מרכז המסה ולכן שווה לאפס!

ולכן:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}}_{cm}$$

$\Leftarrow$ התנועה של החלקיקים במערכת מרכז המסה אינה תורמת לתנע הקווי הכולל ואם היא היתה תורמת - היא היתה עושה זאת דרך שינוי ב- $\dot{\vec{R}}_{cm}$.

* אנרגיה קינטית:

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i\dot{r}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{\vec{R}}_{cm} + \dot{\vec{r}}_i\,'\right)\cdot\left(\dot{\vec{R}}_{cm} + \dot{\vec{r}}_i\,'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum m_i}_{M}\dot{R}_{cm}^2 + \underbrace{\sum m_i\dot{\vec{r}}_i\,'}_{=0}\cdot\dot{\vec{R}}_{cm} + \frac{1}{2}\sum m_i\dot{\vec{r}}_i\,'^2$$

מהגדרה של מרכז המסה!

ז.א. קיבלנו שהאנרגיה הקינטית היא:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \sum\frac{1}{2}m_i(v_i')^2$$

במילים: האנרגיה הקינטית שווה לאנרגיה הקינטית של חלקיק נקודתי הנע במרכז המסה ועוד סכום האנרגיות של החלקיקים הנעים יחסית למרכז המסה.

$$K = K_{cm} + K'$$

הביטוי לא היה נכון אילו לא היינו עובדים במרכז המסה.

התנע הזויתי

התנע הזויתי עבור חלקיק יחיד, מוגדר כ:

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

למה שווה השינוי שלו בזמן?

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{=0 \text{ כי } \vec{v}\parallel\vec{v}} + \vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r}\times\vec{F} \equiv \vec{N}$$

את $\vec{r}\times\vec{F}$ מגדירים כ<u>מומנט כח</u> ביחס לראשית הצירים. אנו רואים כי:

$$\underbrace{\dot{\vec{P}} = \vec{F}}_{\text{קוי}} \qquad \underbrace{\dot{\vec{l}} = \vec{N}}_{\text{סיבובי}}$$

* <u>דוגמא</u>: מומנט הכח על מערכת בנוכחות שדה הכבידה.

$$\underbrace{\vec{F}_i = m_i\vec{g}}_{\text{הכח על החלקיק } i.}$$

מומנט הכח יהיה:

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times(m_i\vec{g}) =$$

$$= -\vec{g}\times\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}_{M\cdot R_{cm}} = MR_{cm}\times\vec{g}$$

המומנט השקול אקויולנטי לכך שכל המסה נמצאת במרכז המסה והיא נקודתית.

* התנע הזויתי של N מסות במרכז המסה:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\vec{l}_i = \sum_i m_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i(R_{cm}+\vec{r}_i')\times(\dot{R}_{cm}+\dot{\vec{r}}_i') =$$

$$= R_{cm}\times M\dot{R}_{cm} + \sum m_i\vec{r}_i'\times\dot{\vec{r}}_i' + \vec{R}_{cm}\times\underbrace{\sum m_i\dot{\vec{r}}_i'}_{=0} + \underbrace{\sum m_i\vec{r}_i'}_{=0}\times\dot{\vec{R}}_{cm}$$

כי סוכמים במערכת מרכז המסה

לכן, ניתן לכתוב:

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{L}_{cm}}_{\text{תנע זויתי של מרכז המסה}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_i'}_{\text{תנע זויתי יחסית למרכז המסה.}}$$

לא ניתן לעשות כאלו אם עוברים יחסית לנקודה שונה ממרכז המסה

* מה קורה לתנע זויתי בכוח מרכזי ?

$$\vec r\times\vec F=0 \iff \vec r\parallel\vec F$$

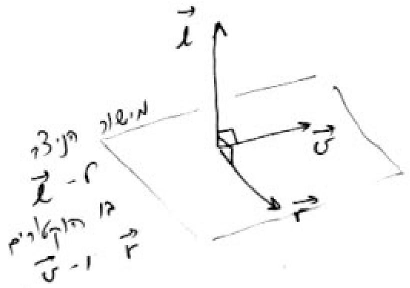
אם בוחרים את מערכת הצירים במרכז הכוח אזי $\vec r$ ו- $\vec F$ באותו כיוון.

והתנע הזויתי לכן קבוע:

$$\frac{d}{dt}\vec l=\frac{d}{dt}(\vec r\times m\vec v)=\vec r\times\vec F=0$$

$$\vec l=\vec r\times m\vec v=const$$

מסקנה ראשונה: התנועה המקיימת $\vec r\times\vec F=0$ (כי $\vec r\parallel\vec F$) היא במישור קבוע המוגדר ע"י $\vec l$ הניצב למישור:



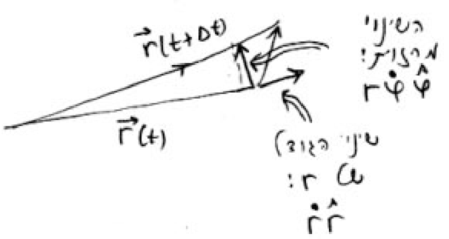
לכן, כדאי לעבוד בקואורדינטות קטביות במישור (או מישור של גלינדרי או מישור של כדורי).

במקרה כזה:

$$\vec r(t)=r(t)\hat r(t)$$

לכן:

$$\dot{\vec r}=\dot r\hat r+r\dot\varphi\hat\varphi$$ משביע ראשון או שני



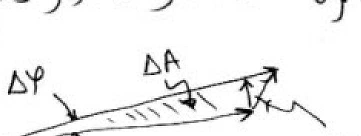
התנע הזויתי הוא לכן:

$$\vec l=m\vec r\times\dot{\vec r}=mr\hat r\times(\dot r\hat r+r\dot\varphi\hat\varphi)$$

$$=mr^2\dot\varphi\,(\underbrace{\hat r\times\hat\varphi}_{\hat z})=mr^2\dot\varphi\,\hat z$$

$\hat r\times\hat r=0$

זהו למעשה החוק השני של קפלר האומר כי הוקטור "מצייר" ביחידת זמן שטח קבוע:



$$\Delta A=\frac{r\Delta\varphi}{2}\cdot r=\frac{r^2\Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{l}{2m}=const$$

תנע זוויתי במערכת חלקיקים

נסתכל על אוסף של N חלקיקים, כאשר על כל חלקיק פועל כח $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}$

$F_i^{(ext)}$ הוא הכח החיצוני על חלקיק i ואילו $\vec{f}_{ij}$ היו הכח שחלקיק j מפעיל על i.

מומנט הכח הכולל שפועל על המערכת:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$$

את הסכום ניתן לפרק כסכום על $j>i$ ואז לסכום זוגות (i,j) יחדיו:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \sum_{j>i} \left((\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}) \right)$$

מהחוק השלישי של ניוטון: $\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$ ולכן:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i,j>i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}$$

את הביטוי הנ"ל ניתן לפשט אם הכח $\vec{f}_{ij}$ הוא בכיוון הוקטור המחבר את שני החלקיקים i ו- j. זה לא מתחייב מן המשוואות במקרה הכללי, אולם עבור כוחות מרכזיים (כבידה, אלקטרוסטטי), זה מתקיים:

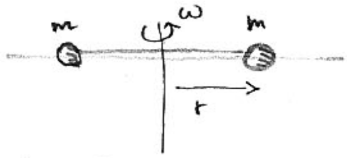
$$\vec{f}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

ואז המכפלה הוקטורית ביניהם מתאפסת והמומנט יהיה רק מהכוחות החיצוניים:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

(במקרה והכח החיצוני הוא מכבידה אז: $\vec{F}_i^{ext} = \vec{g} m_i$ ואז
$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{g} m_i = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times g = M\vec{R}_{CM} \times \vec{g}$$
אולם במקרה הכללי לא ניתן לפשט את הביטוי הנ"ל)

דוגמאות לשימור תנע זויתי



* שתי מסות m מחוברות בחוט על מוט חסר מסה היכול להסתובב סביב ציר חופשי: בהתחלה, המערכת מסתובבת בתדירות ω. מקצרים את החוט (למשל, כדוגמת ההדגמה בכיתה) למה שווה ω_1 כאשר המרחק נהיה r_1?

← תנע זויתי נשמר (הכוחות שפועלים על החוט הם רדיאליים ולכן לא יכולים להפעיל מומנט: כוחות רדיאליים $\Rightarrow N=0 \Rightarrow L=\text{const}$).

תנע זויתי לפני: $L_0 = 2m\omega_0 r_0^2$

תנע זויתי אחרי: $L_1 = 2m\omega_1 r_1^2$

שוויון נותן: $L_1 = L_0 \Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_0\left(\frac{r_0^2}{r_1^2}\right)$

כלומר, אם הרדיוס קטן התדירות תגדל!

* מה קורה במערכת דומה בה הרדיוס משתנה בצורה נתונה: $r(t) = r_0 + \alpha t$ ובנוסף פועל מומנט $\vec{N}$ הרוצה להגדיל את סיבוב המערכת? מה תהיה המשוואה שתתאר את $\omega(t)$

← תנע זויתי אינו נשמר. המשוואה שתתאר את שינויו: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$

לכן:

$$\frac{d(2m\omega r^2)}{dt} = N$$

ניתן לבצע אינטגרציה:

$$\int_{t=0}^{t} \frac{d(2m\omega r^2)}{dt}\,dt = \int_{t=0}^{t} N\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 2m\omega r^2 - 2m\omega_0 r_0^2 = Nt$$

$$\omega = \frac{Nt + 2m\omega_0 r_0^2}{2m(r_0+\alpha t)^2}$$