בעיית שני הגופים (בעיית קפלר)

נסתכל על שני גופים הפועל ביניהם כח משמר לאורך הקו המחבר אותם זה לזה. ברצוננו לראות כי ניתן לכתוב את הבעיה בצורה פשוטה יותר.

נתחיל במשוואות התנועה לשני החלקיקים:

$$m_1\ddot{r}_1 = F_1^{(ext)} + \vec{f}_{12}$$

$$m_2\ddot{r}_2 = F_2^{(ext)} + \vec{f}_{21}$$

מחבור שתי המשוואות מקבל:

$$\underbrace{m_1\ddot{r}_1 + m_2\ddot{r}_2}_{\text{מהגדרה של מרכז מסה}} = \overbrace{F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)}}^{\text{הכח החיצוני הכולל שפועל על המערכת}} + \underbrace{\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}}_{=0}$$

$= (m_1+m_2)\ddot{R}_{cm}$ מהחוק השלישי של ניוטון.

$(R_{cm} \equiv \frac{1}{M}\sum m_i r_i)$

ז.א. מרכז המסה נע בהשפעת הכח החיצוני על המערכת.

כעת נחלק את המשוואות ב-"m_1" ו-"m_2" ונחסרן זו מזו:

$$\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2 = \underbrace{\frac{1}{m_1}F_1^{(ext)} - \frac{1}{m_2}F_2^{(ext)}} + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{f}_{12}$$

אם אין כוחות חיצוניים או אפילו אם יש שדה כבידה קבוע, האיבר האמצעי מתאפס:

$$\frac{1}{m_1}F_1^{(ext)} - \frac{1}{m_2}F_2^{(ext)} = 0$$

(ונניח...).

(לדוגמה, שני חלקיקים טעונים כשהחלקיק הקרוב הפועל רחוק מאד מהמרחק בין שני החלקיקים או למשל זוג כוכבים וכו'...). בשדה הכבידה קבוע ($\vec{g} \equiv \vec{g}$) $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$ ואז צדדים מקבלים אפס.

במקרה כזה, מקבלים:

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{f}_{12}$$

נגדיר את μ (הנקרא "מסה מצומצמת") כ- $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

ואת $\vec{r}$ הוקטור המחבר את 2 ל-1: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

ונקבל משוואה עבור $\vec{r}$:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(r)$$

מה המשמעות של מה שקיבלנו?

את הבעיה של שני גופים ניתן לתאר כתנועה של מרכז המסה + תנועה של הוקטור המחבר את שתי המסות כאילו והיתה לנו מסה יחידה עם מסה m הנעה בפוטנציאל מרכזי עם אותו הכח הפועל בין חלקיקים 1 ו-2, ומרחק $\vec{r}$ מהראשית.

* למה שווה המסה המצומצמת במערכת כדו"ה - שמש?

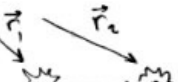
$$\mu = \frac{m_{\oplus} m_{\odot}}{m_{\oplus} + m_{\odot}} \simeq m_{\oplus} \qquad m_{\odot} \gg m_{\oplus}$$

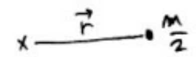
כדו"א, שמש

כלומר בבעיה הזו אנו יכולים להניח בקירוב כי ישנה את מסת כדו"ה הנעה מסביב למרכז.

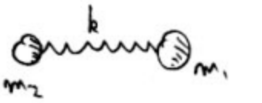
* אם יש שתי מסות m שוות - למשל שני כוכבים דומים:

$$\mu = \frac{m \cdot m}{m + m} = \frac{m}{2}$$

כלומר הבעיה של  אקוויוולנטית לבעיה:



* דוגמא נוספת: שתי מסות m_1 ו- m_2 על קפיץ, היכולות לנוע במרחב ללא כוחות חיצוניים.



את הבעיה ניתן לתאר כתנועה של מרכז המסה + תנועה של וקטור r המחבר את שתי המסות, כאילו ו-

נקודה קבועה.

כאשר: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

מה שעשינו למעשה היה לעבור מתיאור של הבעיה ע"י הקואורדינטות $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_2$ ל- $\vec{R}_{cm}$ ו- $\vec{r}$, הנתונים ע"י הקשר:

$$\begin{cases} \vec{R}_{cm} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

את הקשר הזה ניתן להפוך ולקבל:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

מה האנרגיה הקינטית במערכת החדשה? אנו אמורים לקבל $K = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$

היא והבעיה אקוויולנטית לבעית גוף עם מסה μ. נראה זאת:

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + 2\frac{\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}}_{CM}^2 - \frac{2\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \underbrace{\frac{\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,(m_1m_2 - m_2m_1)}{m_1+m_2}}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}}_{=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}=\mu}\dot{\vec{r}}^2$$

$$= \frac{\overbrace{M}^{(m_1+m_2)}}{2}\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$$

באותה צורה ניתן לקבל:

$$\vec{L} = M\vec{R}_{CM}\times\dot{\vec{R}}_{CM} + \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

<u>תנועה בשדה כבידה (והכח האלקטרוסטטי גם! - באותו המחיר</u>).

כוחות אלו מקיימים שהכח בין שני חלקיקים

$$\vec{f}(r) = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$$

ה- α תלוי בכח עצמו:

עבור כבידה: $\alpha = -Gm_1m_2$

אלקטרוסטטי: $\alpha = q_1q_2$ (c.g.s) $= kq_1q_2$ (m.k.s)

(ב- c.g.s הקבוע k [קולון] בלוע בתוך היחידות של המטען).

הפוטנציאל הוא:

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}$$

משימור אנרגיה, מתקיים:

$$K + U = const$$

או:

$$K_{CM} + K' + \frac{\alpha}{r} = const$$

ללא כוחות חיצוניים, K_{cm} הוא קבוע ולכן:

$$E' = K' + U = const$$

(נצרוך את ה' מה- E' - ונסתכל רק על התנועה ב- $\vec{r}$).

ונקבל:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2+\frac{k}{r}=E=const.$$

אבל, את $\dot{\vec{r}}^2$ ניתן לכתוב כ: $\dot{\vec{r}}^2=(\dot r\hat r+r\dot\varphi\hat\varphi)^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2$

כפי שראינו כבר מקודם! לכן, שימור אנרגיה נותן:

$$\frac{1}{2}\mu\dot r^2+\frac{1}{2}\mu r^2\dot\varphi^2+\frac{k}{r}=E$$

אולם, משימור תנע זויתי: $\mu r^2\dot\varphi=\ell=const$, לכן, נכתוב את הביטוי בעזרת הקבוע ℓ:

$$\frac{1}{2}\mu\dot r^2+\frac{\ell^2}{2\mu r^2}+\frac{k}{r}=E$$

עכשיו, המשוואה הנ"ל עבור $\frac{dr}{dt}$ ניתנת לפתרון ע"י הפרדת משתנים:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{\ell^2}{2\mu r^2}-\frac{k}{r}\right)$$

האינטגרל הזה מגעיל!

$$\int_{r(t=t_0)}^{r(t)}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{\ell^2}{2\mu r^2}-\frac{k}{r}\right)}}=\int_{t_0}^{t}dt$$

ניתן לפתור אותו ע"י החלפת משתנים: $u=1/r \leftarrow dr=-1/u^2\,du$

רק שמתקבל האינטגרל:

$$-\int_{u(t=t_0)}^{u(t)}\frac{du}{u^2\sqrt{E-\frac{\ell^2}{2\mu}u^2-ku}}$$

לאינטגרל זה יש פתרון בספרי אינטגרלים.

אם משתמשים בפתרון, ניתן לקבל שאיזו שהיא פונקציה של u (ולכן גם של r) תלויה בזמן:

$$f(r)=t$$

זהו ביטוי סתום עבור $r(t)$. לא נחשב את זה וזה לא יותר מידי פדגוגי!

אותנו מעניין, כרגע, לקבל ביטוי עבור $r(\varphi)$. נראה כי ניתן לקבל ביטוי פשוט יחסית ע"י טריק מלוכלך או לחילופין ע"י אינטגרל דומה לזה הכתוב למעלה.

חישוב $r(\varphi)$ בבעיית קפלר:

אותי מעניין כעת למצוא ביטוי עבור $r(\varphi)$ בבעיית קפלר. סיבה אחת היא שניתן למצוא ביטוי פשוט!

על התנועה, אנו יודעים ש-

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

כשמוציאים שורש יש שתי פתרונות. המשמעות היא שעבור אותו מצב r, החלקיק יכול לנוע פנימה או החוצה.

אני יכול להחליף את t ע"י שימוש בשתי המשוואות:

$$\underbrace{\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi}}_{\text{חוק השרשרת}} = \frac{dr}{dt}\frac{1}{\dot{\varphi}} = \pm\frac{\mu r^2}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

ע"י הפרדת משתנים ניתן לפתור את הבעיה של $r(\varphi)$:

$$\pm\int_{r(\theta_0)}^{r(\theta_1)} \frac{dr}{\frac{\mu r^2}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi$$

כשעוברים ל-r-φ, המשמעות של $\pm$ היא שהחלקיק נע בכיוון השעון או הפוך

האינטגרל נראה פשוט יותר אם מחליפים משתנים:

$$u = 1/r \qquad du = -1/r^2\, dr$$

$$\mp\int_{u(\varphi_0)}^{u(\varphi_1)} \frac{du}{\frac{\mu}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu}u^2 - \alpha u\right)}} = \varphi_1 - \varphi_0$$

גם לאינטגרל זה, כמו לאינטגרל בעמוד הקודם יש פתרון בספר אינטגרלים:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

עבור $a<0$

לכן, עבור: $a = -\frac{l^2}{2\mu}$, $b = -\alpha$, $c = E$ מקבלים:

$$\pm\frac{l}{\sqrt{2\mu}}\left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{l^2}}\sin^{-1}\left(\frac{-\frac{l^2}{\mu}u - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2El^2/\mu}}\right)\right)\Bigg|_{u(\varphi_0)}^{u(\varphi_1)} = \varphi_1 - \varphi_0$$

$$\mp\left[\sin^{-1}\left(\frac{\frac{l^2}{\alpha\mu}u(\varphi_1) + 1}{\sqrt{1 + 2El^2/\mu\alpha^2}}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\frac{l}{\alpha\mu}u(\varphi_0) + 1}{\sqrt{1 - 2El^2/\mu\alpha^2}}\right)\right] = \varphi_1 - \varphi_0$$

נגדיר $\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\alpha^2\mu}}$. לגודל זה קוראים אקסצנטריות (eccentricity)

ונקבל:

$$\sin^{-1}\left(\frac{\frac{\ell^2}{\alpha\mu}u(\varphi_1)+1}{\varepsilon}\right) = \pm(\varphi-\varphi_0) + \underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{\frac{\ell}{\alpha\mu}u(\varphi_0)+1}{\varepsilon}\right)}$$

נגדיר כ- $\tilde{\varphi}$ דהיינו, במקום להשתמש ב- φ_0 כקבוע אינטגרציה, נשתמש בגודל המשולב.

המשוואה ההפוכה, דהיינו $u(\varphi)$ היא לכן:

$$\frac{1}{r} = u = \frac{(-\alpha\mu}{\ell^2}\left(1-\varepsilon\sin\left(\pm(\varphi-\varphi_0)\right)\right)$$

משמעות ה-"$\pm$" היא שהחלקיק (או כוכב) יכול לנוע בכיוון השעון או בכיוון ההפוך.

נחזור על הדריבציה במקום ע"י שימוש במשוואת שימור אנרגיה (שהיא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון) נשתמש במשוואה של כוחות (אפקטיביים במקרה זה).

אנו כותבים את משוואת האנרגיה בצורה:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu r^2} + \overbrace{\frac{\alpha}{r}}^{U(r)}}_{U_{eff}(r)} = E$$

אם נגזור את המשוואה הזו, נקבל:

$$\mu\dot{r}\ddot{r} - \frac{\ell^2}{2\mu r^3}\dot{r} - \frac{\alpha\dot{r}}{r^2} = 0$$

הואיל ואנו איננו מעוניינים במקרה של $\dot{r}=0$, נחלק בו ונקבל:

$$\mu\ddot{r} = \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

המשוואה הזו היא מהצורה: $\text{"m"}a = F_{eff}$

כאשר:

$$F_{eff} = -\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

עם אותו ה-U_{eff} שהוגדר למעלה.

משוואה זו היא משוואה דיפרנציאלית מסדר שני (היות ונגזרת שניה בזמן מופיעה).
לרוב, משוואות כאלו הן מסובכות יותר לפתירה מאשר משוואות מסדר ראשון (כמו המשוואה המתקבלת משימור אנרגיה) אולם, בעיקרה זה ניתן להחליף משתנים ולקבל משוואה פשוטה הרבה יותר.

ראשית, אנו רוצים להעביר את המשוואה למשוואה עבור $r(\varphi)$ שתתן לנו את הצורה הגיאומטרית של המסלול. כדי לעשות זאת, יש להחליף $\frac{d}{dt}$ ב- $\frac{d}{d\varphi}$ וכו'.

* משוואת תנע זויתי:
$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$$

לכן, נגזרת של פונקציה f כלשהי לפי t תהיה:
$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{df}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{df}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2}$$

ונגזור כעת שוב לפי הזמן:

מגדירים את g כ- $\frac{df}{dt}$

שימוש בתוצאה הקודמת

$$\frac{d^2f}{dt^2} \equiv \frac{dg}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dg}{d\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{df}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2}\right) \qquad \left(g = \frac{l}{\mu r^2}\frac{df}{d\varphi} \text{ כאשר}\right)$$

הצבה של g.

$$= \frac{l^2}{\mu^2 r^4}\frac{d^2f}{d\varphi^2} - \frac{2l^2}{\mu^2 r^5}\frac{df}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi}$$

פתיחת ה().

ונציב כעת $f=r$ ונקבל:
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{l^2}{\mu^2 r^4}\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2l^2}{\mu^2 r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

משוואתנו תראה לכן:
$$\frac{l^2}{\mu r^4}\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2l^2}{\mu r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

וכעת הניחוש לעבור למשתנה $u=1/r$. אם נבצע החלפה זו נקבל:
$$u = 1/r \Longrightarrow \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \Longrightarrow -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

גזירה לפי φ גזירה נוספת לפי φ

אם נכתוב את המשוואה הנ"ל בצורה קצת אחרת, נראה שהגדרה זו תועיל לנו!!:
$$\frac{l^2}{\mu r^2}\left(\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}_{-\frac{d^2u}{d\varphi^2}}\right) = \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

לכן, אנו מקבלים כי:

$$\frac{\ell^2}{\mu}u^2\left(-\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)=\frac{\ell^2}{\mu}u^3+\alpha u^2$$

(כזכור $1/r=u$!)

נחלק ב- u (לא מעניין אותנו הפתרון $u=0$) ונקבל:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=-\frac{\alpha\mu}{\ell^2}.$$

משוואה זו היא משוואה דיפרנציאלית (מכילה נגזרות של u) מסדר שני (נגזרת שניה ב- φ) לינארית (מופיע רק u או נגזרותיו בחזקה ראשונה או אפס בכל איבר). למשוואות כאלו ישנו פתרון סטנדרטי.

ראשית, יש לשים לב שהמשוואה אינה הומוגנית, כלומר ישנו איבר שאינו תלוי ב- u. הכלל הוא שיש לחפש פתרון u המורכב מפתרון פרטי (כלשהו!) למשוואה הלא הומוגנית + פתרון כללי למשוואה ההומוגנית.

$$u=u_h+u_p$$

$$u''+u=-a \qquad \left(a=\frac{\alpha\mu}{\ell^2}\right)$$

$$u_h''+u_p''+u_h+u_p=-a$$

ברור ש- $u_p=-a$ הוא פתרון כי $u_p''=0$ במקרה זה: $u_p''+u_p=-a$ נחסר משוואה זו ונקבל:

$$u_h''+u_h=0 \rightarrow u_h''=-u_h$$

כעת נשאל, איזו פונקציה אם גוזרים אותה פעמיים מקבלים את אותה הפונקציה עם סימן הפוך? התשובה: sin ו- cos, אך גם sin כפול בקבוע וכו'.

לכן, הפתרון הכללי שלנו לחלק ההומוגני:

$$u_h=A\cos\varphi+B\sin\varphi\equiv A\cos(\varphi-\varphi_0)$$

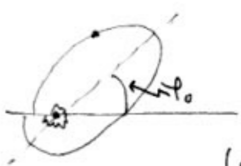
ניתן לכתוב זאת בצורה.

הפתרון הכללי למשוואה הלא הומוגנית:

$$u=u_h+u_p=A\cos(\varphi-\varphi_0)-\frac{\alpha\mu}{\ell^2}$$

הפתרון פותר את המשוואה הלא הומוגנית ומכיל שני קבועי אינטגרציה (A ו- φ_0). היות והמשוואה היא מסדר שני הפתרון הכללי צריך להכיל שני קבועי אינטגרציה ולכן הפתרון שמצאנו הוא הכי כללי.

מהם הקבועים A ו- φ_0? φ_0 פשוט קובע את ציר המסלול:



ומהו A? כדי למצוא את A, נמצא את ערכי הקיצון של המסלול (אם מדובר בפלנטה סביב השמש, הנקודה הקרובה ביותר (ה- u הגדול ביותר!) נקראת פריהליון (perihelion).

בנקודות קיצון של המסלול, מתקיים שהאיבר הקינטי $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ מתאפס:

$$E-\alpha u-\frac{l^2}{2\mu}u^2=0$$

$$u_{1,2}=-\frac{\mu\alpha}{l^2}\left[1\mp\underbrace{\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}\right]=-\frac{\mu\alpha}{l^2}\left[1\mp\varepsilon\right]$$

מגדירים כאקסצנטריות ε (eccentricity)

<u>מה קורה עבור כח גרביטציה ו- E<0</u>. במקרה כזה: $0<\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}<1$

כמו כן:

$$u_{max}-u_{min}=-\frac{2\mu\alpha}{l^2}\varepsilon$$

אולם ממשוואת המסלול שקבלנו:

$$u_{max}-u_{min}=2A$$

ולכן:

$$A=\frac{(-\alpha)\mu}{l^2}\varepsilon$$

ומשוואת המסלול היא:

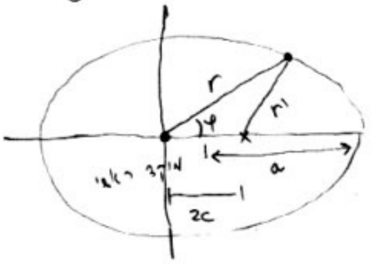
$$\frac{1}{r(\varphi)}=u(\varphi)=\frac{(-\alpha)\mu}{l^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

$$=\frac{Gm_1m_2\mu}{l^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

זוהי משוואה של אליפסה. (ראה ציור).

הוכחה כי המסלול שהתקבל הוא אכן בצורת אליפסה:

הגדרת אליפסה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משני מוקדים האליפסה הוא קבוע. נהוג לסמן סכום זה כ- $2a$. a נקרא semi-major axis (חצי הציר הראשי).



$$r + r' = 2a$$

נגדיר את המרחק בין המוקדים כ- $2c$.

לפי חוק הקוסינוסים

$$(2c)^2 + r^2 + 2(2c)r\cos\varphi = (r')^2 \quad (*)$$

מצד שני, לפי הגדרה של אליפסה:

$$r + r' = 2a \rightarrow (r')^2 = (2a-r)^2$$
$$= 4a^2 + r^2 - 4ar \quad (*)$$

(נחסר את שתי המשוואות (א', נציב $(r')^2$ ממשוואה שניה במשוואה ראשונה:

$$4c^2 + \cancel{r^2} + 4cr\cos\varphi = 4a^2 + \cancel{r^2} - 4ar$$

$$c^2 + cr\cos\varphi = a^2 - ar$$

$$ar\left(1 + \frac{c}{a}\cos\varphi\right) = a^2 - c^2$$

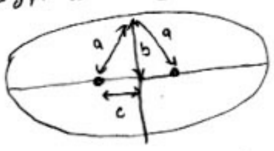
או:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{a^2-c^2}\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right)$$

כאשר $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$

מהגדרה של אליפסה:



לכן: $a^2 = b^2 + c^2$

$\Leftarrow$ מסלולי קפלר הם אליפסות עם אקסצנטריות:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu G^2 m_1 m_2}}$$

חוקי קפלר:

חוק ראשון: מסלולי כוכבי הלכת הם אליפסות כאשר השמש באחד המוקדים.
ראינו זאת בעמוד קודם:

$$\frac{1}{r} = \frac{(-\alpha)\mu}{\ell^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

חוק שני: כוכב לכת גורף שטחים שווים ביחידת זמן. ראינו זאת משימור תנע:

$$r^2\dot\varphi = const = \ell/2\mu$$

חוק שלישי: החוק השלישי אומר:

$$\underbrace{P^2}_{\text{זמן המחזור (סביב השמש).}} \propto \underbrace{a^3}_{\text{וחצי הציר הגדול בשלישית.}}$$

הוכחה:

מהחוק השני (של קפלר):

$$\frac{\pi ab \text{ שטח כולל}}{P \text{ זמן כולל}} = \frac{1}{2}r^2\dot\varphi = const = \ell/2\mu$$

לכן:

$$P^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2 4\mu^2}{\ell^2}$$

אולם ממשוואת המסלול:

$$\frac{a}{b^2} = \frac{Gm_1m_2}{\ell^2}\mu$$

$$\downarrow$$

ולכן:

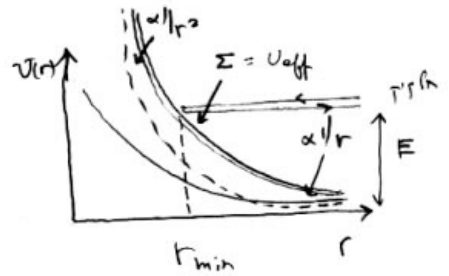
$$\frac{b^2}{\ell^2} = \frac{a}{Gm_1m_2\mu}$$

נציב זאת בביטוי עבור P^2:

$$P^2 = 4\pi^2a^2\mu^2\cdot\frac{a}{Gm_1m_2\mu} \underset{\mu=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}}{\uparrow}= \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\cdot a^3$$

Q.E.D.

כח דחייה חשמלי:



כעת נבחן את המקרה בו: $\alpha = q_1q_2 > 0$

המתאר דחיה בין מטענים עם מטען בעלי אותו הסימן.

במקרה זה, לפוטנציאל האפקטיבי אין מינימום.

י.ז. חלקיק יגיע מ-∞, עם כל האנרגיה E הקינטית הרדיאלית, תהפוך לאנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית, ואז יחזור חזרה ל-∞. למה שווה r_{min}?

משימור אנרגיה בנקודה זו:
$$E - q_1q_2u - \frac{\ell^2}{2\mu}u^2 = 0$$

משוואה ריבועית עם שני פתרונות:
$$u_{1,2} = -\frac{\mu q_1q_2}{\ell^2}\left[1 \pm \varepsilon\right]$$

אולם הפעם:
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu q_1^2q_2^2}} > 1$$

ולכן, ישנו פתרון פיזיקלי אחד (עם $u>0$). התנועה תהיה בין $u=0$ לבין u_{max} (המתאים ל-r_{min}):
$$u_{max} = (\varepsilon - 1)\frac{\mu q_1q_2}{\ell^2}$$

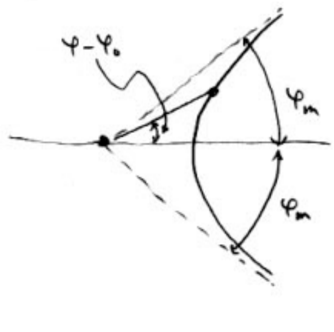
אם נזכר במשוואת המסלול:
$$u = A\cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{\mu q_1q_2}{\ell^2}$$

הערך המקסימלי של u לפי משוואת המסלול:
$$u_{max} = A - \frac{\mu q_1q_2}{\ell^2}$$

נשווה זאת ל-u_{max} משימור אנרגיה:
$$A - \frac{\mu q_1q_2}{\ell^2} = u_{max} = (\varepsilon - 1)\frac{\mu q_1q_2}{\ell^2}$$

ולכן: $A = \varepsilon\frac{\mu q_1q_2}{\ell^2}$ כלומר:
$$u = \frac{\mu q_1q_2}{\ell^2}\left(\underbrace{\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) - 1}\right)$$

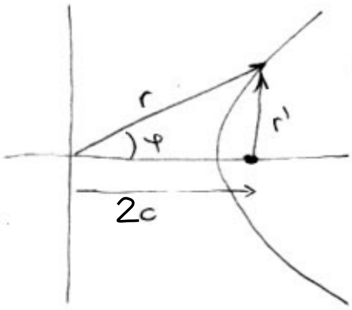
התנועה תהיה מוגבלת ב-φ כי הערכים צריכים להיות חיוביים.



$$\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) - 1 > 0$$
$$\varepsilon\cos\varphi_m - 1 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_m = 1/\varepsilon$$

נראה כי הפתרון (משוואת המסלול) מתארת היפרבולה:

הגדרה גיאומטרית: המקום שההפרש המרחק לשני נקודות קבועות (מוקדים) הוא נתון.



הפתרון:

$$r - r' = 2a$$

מצד אחד (משפט הקוסינוסים):

$$r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\varphi$$

ומצד שני:

$$r'^2 = r^2 - 4a^2 - 4ar$$

ולכן:

$$c^2 - rc\cos\varphi = a^2 - ar$$

ונקבל:

$$ar\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right) = a^2 - c^2 = -b^2$$

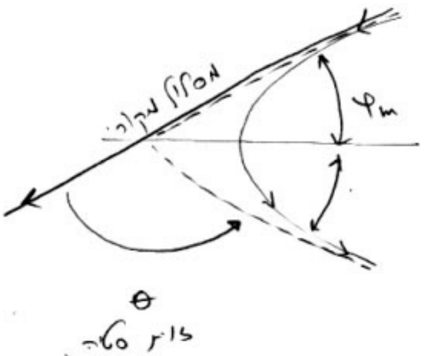
הפתרון $c > a$!

סה"כ:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left(\varepsilon\cos\varphi - 1\right)$$

על-ידי השוואה לתוצאות מעמוד קודם = המסלול הוא היפרבולה עם:

$$\frac{c}{a} = \varepsilon > 1 \qquad \frac{a}{b^2} = \frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}$$



הסטיה של החלקיק מהמסלול המקורי:

$$\Theta = \pi - 2\varphi_m = \pi - 2\cos^{-1}(1/\varepsilon)$$

המרחק המינימלי של החלקיק מן המפזר:

$$r_{min} = \frac{1}{u_{max}} = \frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}(\varepsilon - 1)$$

ניתן גם לכתוב:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi_m} = \frac{1}{\sin^2\Theta/2} = 1 + ctg^2\frac{\theta}{2}$$

$\Theta = \pi - 2\varphi_m$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \rightarrow 1 + ctg^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$

חלוקה ב- $\sin^2 A$

ולכן:

$$ctg^2\frac{\theta}{2} = \frac{2E\ell^2}{\mu q_1 q_2}$$

דוגמאות:

1) נתון הפוטנציאל המרכזי: $U(r) = -\frac{k}{r^4}$

א. האם ישנם מסלולים מעגליים בפוטנציאל זה? האם הם יציבים?

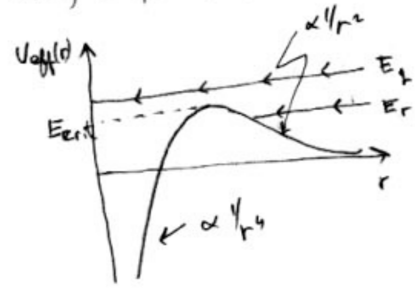
ב. נתון כי החלקיק מגיע מ-$r=\infty$ עם מהירות v, מה צריך להיות האימפקט פרמטר״ b (פרמטר פגיעה = הכמה מספספים את ״הפגיעה״), כדי שהחלקיק ״ייבלע ע״י״ הפוטנציאל.

פתרון:

האנרגיה האפקטיבית:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{\text{צנטריפוגלי}} - \underbrace{\frac{k}{r^4}}_{\text{משיכה}}}_{U_{eff}(r)} = E$$

הפעם הפוטנציאל האפקטיבי נראה:



כדי שתהיה תנועה מעגלית:

הפתרון ל״מעגלי״: $\dot{r}=0$

$$\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^4} = E$$

אנו מחפשים שיא/מינימום, נגזור לפי r:

$$-\frac{l^2}{mr^3} + \frac{4k}{r^5} = 0 \Rightarrow \frac{4k}{r^2} = \frac{l^2}{m} \Rightarrow r = \sqrt{4km}\,\frac{1}{l}$$

זהו ייצוג את הרדיוס של התנועה המעגלית בהינתן ה-l של החלקיק (למשל).

פתרונות אלו אינם יציבים הואיל וכל הפרעה קטנה, והחלקיק יברח מנקודת שיווי המשקל. כפי שניתן לראות מהפוטנציאל.

אם אנו רוצים קשר עם $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} = \frac{2\sqrt{km}}{mr^3} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{2}{r^3}$$

כדי לענות על חלק ב׳, אנו צריכים את התנאים (למשל אנרגיה) בשביל הפוטנציאל.

ד.) נציב $r=\frac{\sqrt{4km}}{\ell}$ בביטוי עבור האנרגיה:

$$E_{crit}=\frac{\ell}{2mr^2}-\frac{k}{r^4}=\frac{\ell^2}{2mr^2}\,\frac{\ell^2}{4km}-\frac{k\ell^4}{16k^2m^2}=$$

$$=\frac{\ell^4}{m^2k}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)=\frac{\ell^4}{16m^2k}$$

כשהחלקיק רחוק מאד, כל האנרגיה שלו זו אנרגיה קינטית. אם מגיע עם מהירות v_∞ (באינסוף):

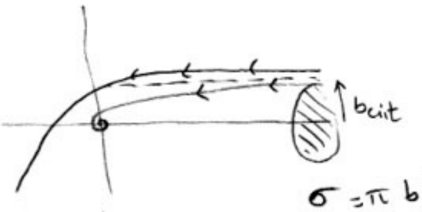
$$E_{crit}=\frac{1}{2}mv_\infty^2$$

ואילו התנע הזוויתי:

$$\ell=m|\vec{r}\times\vec{v}|=mbv_\infty$$

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2=E_{crit}=\frac{m^4 b^4 v_\infty^4}{16m^2k}\longrightarrow b_{crit}=\left(\frac{8k}{mv_\infty^2}\right)^{1/4}$$

כאשר חלקיק מגיע עם b גדול יותר הוא מתפזר ואילו אם מגיע עם b קטן יותר, הוא נבלע.



$\sigma=\pi b_{crit}^2$

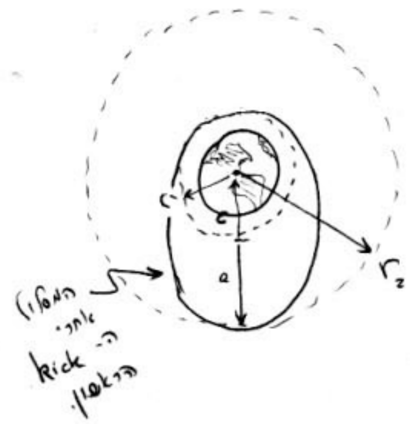
ניתן להגדיר חתך פעולה לבליעה:

$$\sigma=\pi b_{crit}^2=\pi\left(\frac{8k}{mv_\infty^2}\right)^{1/2}$$

זהו ה"שטח" דרכו צריך להגיע החלקיק [illegible]

דוגמא 2

לוויין נע מסביב לכדור הארץ ברדיוס r_1, במסלול מעגלי, איזו מהירות ובאיזה כיוון יש לתת ללוויין על מנת שהוא יגיע למסלול r_2, מה המהירות השניה שיש לתת לו על מנת שישאר במסלול מעגלי.



פתרון:

אחרי ה"בוסט" הראשון, אנו רוצים מסלול אליפטי שהנקודה הקרובה ביותר תהיה r_1 ושהנקודה הרחוקה ביותר תהיה r_2.

אליפסה: $2a = r_{min}+r_{max}$

c הוא המרחק מהמרכז אל המוקד = $c = a - r_1$

$$c = \frac{r_2-r_1}{2}$$

לכן, אנו מחפשים מסלול עם: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}$

$$= m_\oplus m_s \cdot \frac{m_\oplus m_s}{m_\oplus + m_s} \cong m_\oplus m_s^2$$

מהשוואה למשוואת המסלול:

$$\frac{G m_\oplus m_s \mu}{l^2} = \frac{a}{b^2} = \frac{r_1+r_2}{2r_1r_2}$$

$$b^2 = a^2+c^2 = \frac{(r_1+r_2)^2}{4} - \frac{(r_1-r_2)^2}{4} = r_1 r_2$$

לכן:

$$l = \sqrt{2G m_\oplus m_s^2 \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}} = m_s r_1 v$$

מצד שני תנע זוויתי זה $l = mrv$ כי $v \perp r$ בנקודה הזו!

כלומר, המהירות צריכה להיות:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{r_1} \frac{r_2}{r_1+r_2}}$$

אולם המהירות ההתחלתית היא:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}}$$

(למשל, ניתן להציב $r_2=r_1$!).

לכן השינוי במהירות שיש לתת ללוויין:

$$\Delta v = v - v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right)$$

בצורה דומה ניתן לתת שינוי במהירות בנקודה הרחוקה ביותר (הנקודות אפוגיאה להבדיל מפריגאה, הנקודה הקרובה ביותר), כדי להשאיר את הלוויין במסלול מעגלי שוב:

$$\Delta v_2 = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

$r_2 \leftrightarrow r_1$ (החלפת תפקידים)

כך משנים מסלולים של לוויינים.

(זאת הדרך היעילה ביותר היות והעבודה אותו עושה הכח של המנועים נתונה ע״י הספק ונרשמת כ: $v \parallel F$).