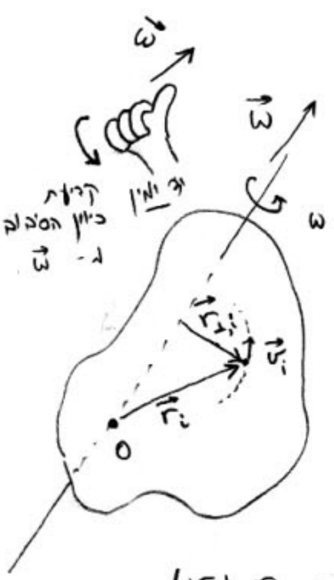
גוף קשיח: תנועה סביב ציר קבוע



* עבור גוף קשיח, מה התנועה של חלקיק (או אלמנט) i ?

מהציור ניתן לראות שגודל המהירות: $v_i = r_{\perp,i}\,\omega$

בנוסף $\vec{v}_i$ ניצב גם ל- $\vec{\omega}$ וגם ל- $\vec{r}_i$ ולכן:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_i$$

זה נכון כל עוד ראשית הצירים נמצאת על ציר הסיבוב (אחרת $\omega r_{\perp,i} \neq v_i$).

* למה שווה התנע הזוויתי של המערכת?

סביב ציר הסיבוב, התנע הזוויתי הוא:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)$$

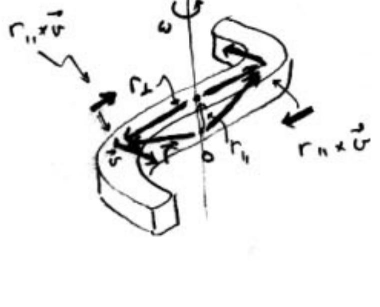
(נפריד את $\vec{r}_i$ ל- $\vec{r}_{\parallel,i}$ ו- $\vec{r}_{\perp,i}$ (וקטורים):

$$\vec{L} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_{\perp,i} \times m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\perp,i})}_{\text{תנע זוויתי בכיוון של } \vec{\omega}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{\parallel} \times m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_{i,\perp})}_{\text{תנע זוויתי בכיוון ניצב ל-} \omega}$$

באופן כללי, התנע הזוויתי לא צריך להיות בכיוון של $\vec{\omega}$.

ניתן להוכיח שלכל גוף ישנם שלושה צירים ניצבים שסיבוב סביבם יתן $\vec{L}$ בכיוון של $\vec{\omega}$. נדון בכך שוב בהמשך.

באופן פרטי, ניתן לראות שאם הגוף סימטרי לסיבוב ב- 180° סביב ציר מסוים, יהיה $\vec{L}_\perp$ אפס אם הגוף מסתובב סביב ציר זה (ההפך אינו נכון בהכרח).



דוגמא:
ניתן לראות שהמומנטים בצדדים מנוגדים תורמים תרומה הפוכה ל- $\vec{r}_\parallel\times\vec{v}$.

* למה שווה $L_\parallel$?

$$L_\parallel = \sum_i r_{\perp,i} \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp,i}) =$$
$$= \sum_i m_i \omega r_{\perp,i}^2 = \omega \sum_i m_i r_{\perp i}^2$$

* נחשב את האנרגיה הקינטית:

$$K = \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_{i,\perp}^2$$
$$= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_{i,\perp}^2$$

באופן כללי, עוזר להגדיר גודל:

$$I = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2$$

זהו המומנט אינרציה. התנע הזוויתי עבור סיבוב סביב ציר הוא:

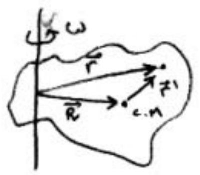
$$\underbrace{L_\parallel = \omega I}_{}$$
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

מוגדר לא רק לפי הגוף אלא גם הציר.

אם הציר אינו "ראשי" יהיה גם $L_\perp$.

* משפט שטיינר: מומנט האינרציה סביב ציר מסוים הוא מומנט האינרציה סביב הציר המקביל העובר דרך מרכז המסה $+ MR^2$, R המרחק בין הצירים.

הוכחה: נגדיר:



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$$

ובאופן דומה גם: $\quad \vec{r}_{\perp i} = \vec{R}_\perp + \vec{r}'_{\perp,i} \quad (|\vec{R}_\perp| = R)$

מומנט האינרציה יהיה:

$$I = \sum m_i r_{i\perp}^2 = \sum m_i\left(\vec{R}_\perp^2 + 2\vec{R}_\perp \cdot \vec{r}'_{\perp,i} + \vec{r}'^2_{\perp,i}\right)$$
$$= R^2 \underbrace{\sum_i m_i}_{M} + 2\vec{R}_\perp \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_{\perp,i}}_{=0} + \sum_i m_i r'^2_{\perp i}$$

סביב הציר סיבוב שאינו עובר במרכז המסה.

כי זה מוגדר יחסית למרכז המסה.

אנחנו רואים שמשפט שטיינר הוא:

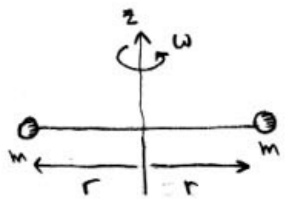
$$I = \overbrace{MR^2}^{\text{המרחק בין הצירים}} + \underbrace{I'}_{}$$

סביב ציר כלשהו

סביב ציר מקביל העובר דרך מרכז המסה.

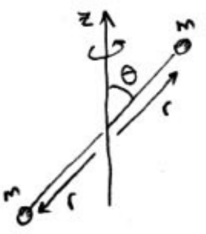
והוא נכון רק עבור I' המחושב יחסית למרכז המסה. אחרת, האיבר המעורב הזה נותן תוצאה שונה מאפס.

חישוב מומנט אינרציה במערכות שונות



1) שתי מסות על מוט:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{לסיבובים סביב ציר } z}}{I_z} = \sum_i m_i r_i^2 = 2mr^2$$

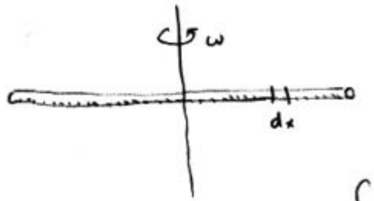


כעת יש רק זווית θ בין ציר z לבין המוט:

$$I_z = \sum_i m_i r_\perp^2 = 2mr^2\sin^2\theta$$

2) נתון מוט בצפיפות אחידה, אורך L ומסה כוללת M. למה שווה I_z?

(לסיבוב סביב ציר ניצב למוט).



נחלק את המוט לקטעים קטנים dx, כל אלמנט מכיל מסה

$$dM = dx\cdot\frac{M}{L}$$

לכן:

הסכום הופך לאינטגרל.

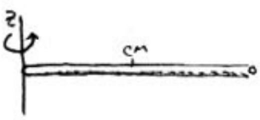
$$I_z = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 = \int_{m=0}^{m=M} dm\cdot r_\perp^2 = \int_{x=-L/2}^{L/2} dx\,\frac{M}{L}\,x^2$$

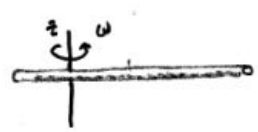
(החלפה מ dm ל- dx)

ולכן:

$$I_z = \frac{M}{L}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=-L/2}^{x=L/2} = 2\,\frac{M}{L}\,\frac{8x^3}{3} = \frac{1}{12}ML^2$$

3) מה המומנט אינרציה לסיבוב המוט סביב ציר בקצה, וסביב ציר העובר רבע בדיוק מהקצה לקצה השני?

א - 

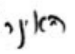
ב - 

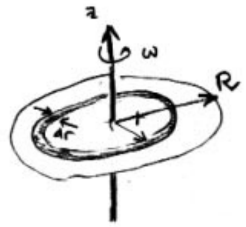
כדי לפתור בעיה זו נשתמש בתוצאה הקודמת ביחד עם משפט שטיינר.

במקרה הראשון:

$$I = I_{cm} + M\big(\overbrace{\tfrac{1}{2}L}^{\text{המרחק בין הציר למרכז המסה}}\big)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

ובמקרה השני:
$$I = I_{CM} + M\left(\tfrac{1}{4}L\right)^2 = \left(\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{16}\right)ML^2 = \tfrac{7}{48}ML^2$$

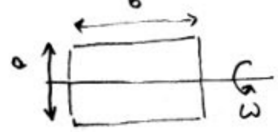
4) נסתכל על דיסקה  ונחשב את מומנט האינרציה לסיבוב סביב צירה.
(נעשה זאת ע"י חלוקת הדיסקה לטבעות דקות ברדיוס r ובעובי dr:



כמות המסה בשטח הטבעת הוא:
$$dM = \text{מסה כוללת}\cdot\frac{\text{שטח טבעת}}{\text{שטח כולל}} = M\cdot\frac{2\pi r\,dr}{\pi R^2}$$

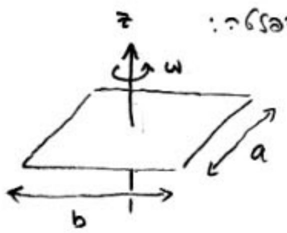
מומנט האינרציה הוא:
$$I_z = \int dM r_\perp^2 = \int_{r=0}^{r=R} M\frac{2r\,dr}{R^2}r^2 = \frac{2}{4}\frac{r^4}{R^2}\Big|_0^R = \frac{1}{2}MR^2$$

5) למה שווה מומנט האינרציה של פלטה מלבנית?

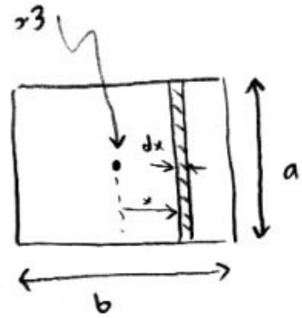


א) אם ציר הסיבוב הוא לאורך ציר ראשית של המלבן:
אז המלבן הוא כמו מוט (לא מעניין שהצירה 'מרוחה' על b,
כי מה שמשפיע בחישוב מומנט האינרציה הוא רק $r_\perp$) לכן, עבור מקרה זה, מומנט האינרציה הוא:
$$I_z = \frac{1}{12}Ma^2$$

ב. המקרה היותר מעניין הוא סיבוב סביב ציר הניצב לפני הפלטה:
למה שווה I_z במקרה זה?



נשתמש במשפט שטיינר על-מנת למצוא את התרומה ל-I מרצועה קטנה dx כמתואר בציור



כמות המסה ברצועה היא:
$$dM = \frac{M}{b}\cdot dx$$

מומנט האינרציה של סיבוב הרצועה סביב מרכז המסה של עצמה הוא:
$$dI_{cm} = \frac{1}{12}dM a^2 = \frac{M\,dx}{b}\frac{a^2}{12}$$

כעת, נוכל לחשב את מומנט האינרציה של הרצועה סביב מרכז המסה של הפלטה.

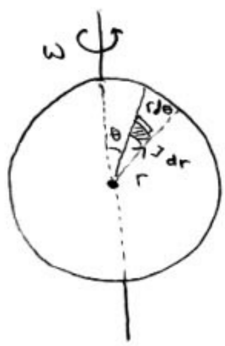
בעזרת משפט שטיינר, המומנט אינרציה של הרצועה סביב מרכז המסה של הלוח:

$$dI = \underbrace{\frac{M}{b}dx}_{"M"}\, \underbrace{x^2}_{"R^2"} + \frac{M\,dx}{b}\frac{1}{12}a^2$$

כעת יש לבצע אינטגרציה על x:

$$I = \int_{x=-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dI = \int_{x=-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \frac{M}{b}\underbrace{x^2 dx}_{x^3} + \frac{1}{12}\frac{M}{b}a^2 \underbrace{\int_{x=-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dx}_{b} = \frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right)$$

6) סיבוב דיסקה סביב ציר במישור הדיסקה:



הפעם נסתכל על אלמנט קטן יותר כמתואר בציור.

שטחו: $dA = dr \cdot r\,d\theta$

המסה שלו: $dM = \frac{M}{\pi R^2} \cdot dA$

$$= \frac{M}{\pi R^2} r\,dr\,d\theta$$

התרומה של האלמנט למומנט האינרציה:

$$dI = dM \cdot r_\perp^2 = dM \cdot r^2 \sin^2\theta = \frac{M}{\pi R^2} r^3 \sin^2\theta\, dr\, d\theta$$

מומנט האינרציה הכולל יהיה אינטגרציה גם על r וגם על θ:

$$I = \int dI = \int_{r=0}^{R} dr \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underbrace{\frac{M}{\pi R^2} r^3}_{\text{קבוע עבור} \int \text{על } d\theta .} \cdot \sin^2\theta\, d\theta =$$

על כל האלמנטים.

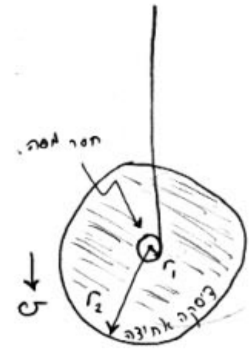
$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2\theta = \pi$$

$$= \int_{r=0}^{R} \frac{M}{\pi R^2} r^3 \pi \cdot dr = \frac{1}{4}MR^2$$

7) לכדור, ניתן להראות שמומנט האינרציה שלו (נתון ע"י: $I = \frac{2}{5}MR^2$

ביטוי זה מתקבל ע"י שלוש אינטגרציות (r,θ,φ).

דינמיקה של גופים קשיחים סביב ציר קבוע



דוגמא ראשונה: נפילת יו-יו. למה שווה תאוצתו של יו-יו נופל?

נניח לשם פשטות כי הדיסקה הקטנה חסרת מסה ואילו הדיסקה הגדולה מתפלגת אחיד.

נחשב את תאוצת היו-יו בעזרת האנרגיה הקינטית של הגוף. ראינו בעבר כי האנרגיה הקינטית ניתנת לפרידה כאנרגיה הקינטית של מרכז המסה + אנרגיה קינטית של התנועה יחסית למרכז המסה. לכן, נוכל לרשום:

$$K=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

כאשר I הוא מומנט האינרציה לסיבוב סביב ציר הדיסקה, $I=\frac{1}{2}MR^2$.

כדי למצוא את תאוצת v, יש לקשר את ω ל-v. מה הקשר?

הקשר בין שינוי הזווית לבין תנועת היו-יו למטה: $dy=r_1\,d\theta$

והמהירות: $v=\frac{dy}{dt}=r_1\frac{d\theta}{dt}=r_1\omega$

לכן האנרגיה הקינטית היא:

$$K=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}Mr_2^2}_{I}\cdot\left(\frac{v}{r_1}\right)^2=\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)$$

שימור אנרגיה אומר:

$$K+U=const\Rightarrow \cancel{M}gy+\frac{1}{2}\cancel{M}v^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)=const$$

נגזור לפי הזמן ונקבל:

$$g\cancel{\dot{y}}+\cancel{\dot{y}}\ddot{y}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)=0$$

ולכן התאוצה היא:

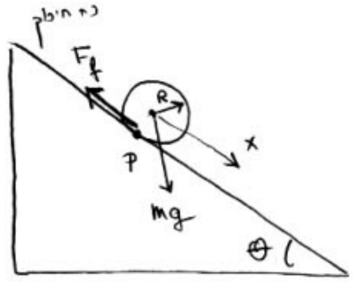
$$\ddot{y}=-\frac{g}{1+\frac{1}{2}(r_2/r_1)^2}$$

כלומר תאוצת היו-יו קטנה יותר מ-g. הסיבה היא שהאנרגיה הפוטנציאלית לא הופכת רק לתנועה קווית אלא גם לתנועה סיבובית כך שהתנועה הקווית קטנה יותר. אם r_2 גדול בהרבה מ-r_1 נקבל תאוצה הרבה יותר קטנה מ-g.

הפתרון עבור y הוא לכן:

$$y=y_0+\underbrace{v_0}_{\text{מהירות התחלתית}}t-\frac{1}{2}\frac{g}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}t^2$$

נסתכל על גלגול ללא החלקה



נחשב כעת את תאוצת הנפילה של גוף המתגלגל ללא החלקה במורד של מישור משופע. נעשה זאת במספר דרכים שונות.

דרך I : שימור אנרגיה.

האנרגיה הקינטית של הגוף:

$$K = \underbrace{K_{cm}}_{\text{תנועת מרכז המסה}} + \overbrace{K'}^{\text{יחסית למרכז המסה.}} =$$

$$K = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad \omega = \dot{x}/R$$

$$K = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2} M\left(1+\underbrace{\frac{I}{MR^2}}\right)\dot{x}^2$$

כאילו המסה הכוללת של הגוף גדולה יותר מ-M.

האנרגיה הפוטנציאלית:

$$U = -Mgx\sin\theta$$

האנרגיה הכוללת קבועה:

$$E = K+U = \frac{1}{2} M\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)\dot{x}^2 - Mg\sin\theta\, x = \overset{\text{קבוע}}{C}$$

נגזור לפי הזמן:

$$M\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)\cancel{\dot{x}}\ddot{x} - Mg\sin\theta\,\cancel{\dot{x}} = 0$$

ולכן:

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\theta}{\left(1+I/MR^2\right)}$$

דרך II

נחשב ע"י כוחות - תאוצת מרכז המסה ותאוצה זוויתית סביב מרכז המסה:

יש לנו כעת שתי משוואות

חוק II למרכז המסה: $Ma = \sum F$

מומנטים סביב מרכז המסה: $I\frac{d\omega}{dt} = \sum N_c$

שני כוחות פועלים על המסה M: ראשית, Mg כלפי מטה ו- F_f - כח החיכוך המקביל למישור. לכן:

x מוגדר כלפי מטה.

$$Ma = M\ddot{x} = Mg\sin\theta - F_f$$

אם נסתכל על מרכז המסה, כח הכבידה אינו מפעיל מומנט, ולכן התרומה היחידה היא מכח החיכוך:

$$\underbrace{N_c}_{\text{סביב מרכז המסה.}} = \underbrace{F_f R}_{\text{כח × זרוע}} = \underbrace{I\frac{d\omega}{dt}}_{\text{אגף שני}}$$

היות וזהו גילגול ללא החלקה, מתקיים:

$$\omega R = v \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

ולכן: (ממשוואת המומנט):

$$F_f = \frac{I}{R}\frac{d\omega}{dt} = \frac{I}{R^2}\ddot{x}$$

נציב במשוואה עבור תאוצת מרכז המסה:

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2}\ddot{x}$$

נקבל.

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\theta}{1 + I/MR^2} \quad //$$

היות והדרך הזו מכילה מפורשות את F_f, ניתן לחשב את התנאי לגלגול ללא החלקה.

$$F_f = \frac{I}{R^2}\ddot{x} = \frac{I/R^2}{1 + I/R^2}\, g\sin\theta = \frac{I}{MR^2 + I}\, g\sin\theta$$

הכח הנורמלי הוא:

$$F_N = Mg\cos\theta$$

כדי שלא תהיה החלקה

$$\mu_s F_N > F_f$$

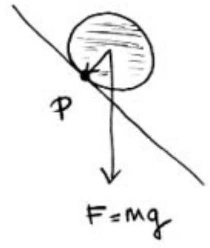
מקדם חיכוך סטטי היות ואין תנועה בין הגלגל לבין המשטח בנקודה המגע

$$\mu_s \cos\theta > \frac{I}{I + MR^2}\sin\theta$$

ולכן:

$$\underset{\text{תנאי ללא החלקה.}}{tg\,\theta < \mu_s\left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)}$$

דרך III: חישוב תאוצת הגוף ע"י מומנט סביב נקודת המגע.



מומנט האינרציה לסיבוב סביב נקודה P:

$$I_P = I_c + MR^2$$

ממשפט שטיינר.

המהירות הזוויתית הרגעית סביב נקודה P:

$$\omega = v/R$$

התנע הזוויתי יהיה אם כן:

$$\underset{\text{סיבוב סביב P.}}{L_P} = I_P\,\omega = (I + MR^2)\frac{v}{R}$$

המומנט החיצוני הפועל הוא:

$$N_P = \underbrace{Mg}_{\text{כח}}\ \underbrace{R\sin\theta}_{\text{זרוע}}$$

שינוי התנע הזוויתי הוא: $\frac{dL_P}{dt} = N_P$

ולכן: $(I + MR^2)\frac{\dot v}{R} = Mg R \sin\theta$

כלומר: $a = \frac{1}{1 + I/MR^2} g \sin\theta$

כפי שקבלנו קודם. עבור חשוק $I = MR^2$, $a = \frac{1}{2} g \sin\theta$

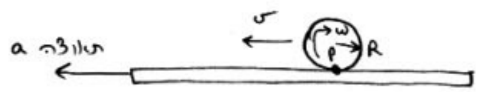
גליל מלא $I = \frac{1}{2}MR^2$, $a = \frac{2}{3} g \sin\theta$

עבור כדור $I = \frac{2}{5}MR^2$, $a = \frac{5}{7} g \sin\theta$

חשוב לציין שהסבה היחידה שניתן היה לחשב את התאוצה בעזרת המומנט סביב הנקודה P היא שהנקודה P אינה מאיצה. לא נוצרות סביב הגוף, וכו'. ניתן להסתכל, לפחות באופן רגעי על התנועה כסיבוב סביב P. (נסתכל על דוגמא בה לא ניתן לעשות זאת.

חישוב מומנט סביב נקודה מאיצה

נסתכל על גוף עגול הנמצא על משטח המאיץ בתאוצה a. למה שווה תאוצת הגוף?



נפתור בעיה זו בשתי דרכים.

דרך I: נסתכל על הכח שפועל על מרכז המסה ועל המומנט סביב מרכז המסה.

תאוצת מרכז המסה: $M\frac{dv}{dt} = \overset{\text{חיכוך}}{F_f}$

מומנט הכח סביב מרכז המסה: $N_c = F_f R = I_c \frac{d\omega}{dt}$

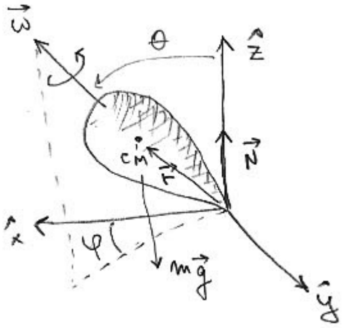
לכן: $$\frac{dv}{dt} = \frac{F_f}{M} = \frac{I_c}{MR}\frac{d\omega}{dt}$$

קשר נוסף הוא בין ω ל-v ו-a הנובע מכך שהגלגול ללא החלקה.

יחסית למעבדה. $\Delta x = \underbrace{V}_{\text{מהירות השטיח ברגע נתון.}} \Delta t - R\Delta\theta$

סיבוב של גוף במערכת המעבדה - ג'ירוסקופ

נסתכל על גוף בו מערכת הצירים אינה קבועה - של סביבון או ג'ירוסקופ. (נסתכל על הבעיה זו תחת מספר קירובים בהם נדון בהמשך).



סכום הכוחות על ציר $\hat z$ מתאפס כדי שלא תהיה תנועה בכיוון זה. לכן: $\vec N = -m\vec g$,

המומנט שמפעיל $\vec N$ על מרכז המסה זהה למומנט שמפעיל $m\vec g$ על נקודת המגע. אנו יכולים לעבור סביב ציר אחד או השני. נעבור סביב נקודת המגע.

מומנט הכח הכולל סביב נקודת המגע הוא: $\vec\tau = \vec r \times m\vec g$

נעבוד במערכת המעבדה. שינוי התנע הזוויתי (המערכת זו) שווה למומנטי הכח:

$$\frac{d\vec L}{dt}\Big|_{lab} = \vec N = \vec r \times m\vec g$$

נחשב בעזרת הרכיבים במערכת המעבדה:

$$\vec r = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$
$$\vec g = (0, 0, -g)$$

ולכן:

$$\vec\tau = \vec r \times m\vec g = rmg(\hat y\cos\varphi - \hat x\sin\varphi)\sin\theta$$

רכיבי המשוואה לשינוי התנע הזוויתי יהיו אם כן:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0$$

$$\frac{dL_x}{dt} = -rmg\sin\theta\sin\varphi$$

$$\frac{dL_y}{dt} = rmg\sin\theta\cos\varphi$$

אם מניחים כי $\vec L$ בכיוון של $\vec\omega$ (הגוף מסתובב סביב ציר הסימטריה שלו) ושני הוקטורים הללו בכיוון של $\vec r$, אזי:

$$\vec L = (L\sin\theta\cos\varphi,\ L\sin\theta\sin\varphi,\ L\cos\theta)$$

ואז ניתן לפשט את המשוואות ל- $\frac{dL_i}{dt}$:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \qquad \frac{dL_x}{dt} = -\overbrace{\frac{rmg}{L}}^{\equiv\Omega} L_y$$

$$\frac{dL_y}{dt} = +\underbrace{\frac{rmg}{L}} L_x$$

גודל עם מימדים של $\frac{1}{\text{זמן}}$. נגדיר אותו "תדירות" Ω.

נגזור משוואה אחת ונציב בשניה:

$$\frac{d^2L_x}{dt^2} = -\Omega^2 L_x$$

למשוואה זו הפתרון:

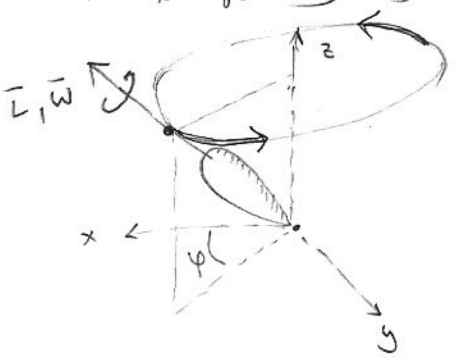
$$L_x = L_\perp \cos(\Omega t+\phi)$$

קבוע אינטגרציה, הוא גודל הרכיב הניצב של L.

עוד קבוע אינטגרציה.

נציב במשוואה עבור L_y ונקבל: $L_y = -\frac{1}{\Omega}\frac{dL_x}{dt} = L_\perp \sin(\Omega t+\phi)$

אני רואים כי תנועת הסביבון מורכבת מרכיב $\hat{z}$ (L_z) קבוע ואילו הרכיב הניצב מבצע תנועה מעגלית סביב ציר $\hat{z}$. לתנועה זו קוראים פרצסיה. תדירות תנועה זו היא



$$\Omega = \frac{rmg}{L} = \frac{rmg}{I\omega}$$

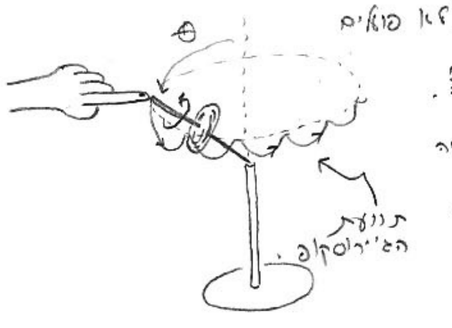
למעשה הנחנו מספר הנחות חשובות מאוד.

הפרצסיה משמעותה עוד רכיב ל-$\vec\omega$ בכיוון ציר $\hat{z}$. לכן, הוקטור $\vec\omega$ המלא של הסביבון לא מכיל רק את הסיבוב סביב הציר, $\vec\omega$ מכיל גם את הסיבוב של הפרצסיה. במקרה כזה לא ניתן להניח ש- $\vec L \parallel \vec r$ כפי שהנחנו מקודם. קירוב זה טוב עבור $|\omega| \gg \Omega$.

במציאות הלא מקורבת, הסביבון יכול לבצע נוטציות - תנועה בה ציר הסיבוב עולה ויורד.

אם למשל מסובבים סביבון ולפני השחרור מחזיקים את הציר, אז בתחילה הסביבון יהיה מאוזן מבחינת מומנטים (האצבע תפעיל מומנט כוח מתנגד לכבידה).

בעקבות $\vec g$, הסביבון ימשך כלפי מטה, ולכן כתוצאה מגדילת θ, רכיב $\hat{z}$ של התנע הזוויתי מהסביבון יקטן. היות ובציר זה תנע נשמר (לא פועלים מומנטים סביב ציר זה!) כי הסביבון יתחיל להסתובב סביב $\hat{z}$. אולם, θ לא יכול לגדול באופן בלתי מוגבל היות וזה ידרוש אנרגיה קינטית סיבובית (סביב ציר $\hat{z}$) מעבר למה שיש למערכת. מנקודה זו, הסביבון יחזור למעלה ויבצע תנועה מחזורית:



אפשר לתאר את התנועה ב-θ בעזרת פוטנציאל אפקטיבי....
אולם זה יבוא רק במכניקה אנליטית.

תנועת גוף קשיח - תאור במערכת הגוף - משוואות אוילר

נסתכל שוב על התנע הזויתי של הגוף: $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$

נעבוד במערכת הקשורה לגוף, במערכת זו רכיבי $\vec{r}_i$ הם קבועים: $\vec{r}_i = x_i\hat{x}+y_i\hat{y}+z_i\hat{z}$

אולם וקטור הסיבוב אינו קבוע, במערכת הגוף נכתוב: $\vec{\omega} = \omega_x\hat{x}+\omega_y\hat{y}+\omega_z\hat{z}$

למה שווה וקטור התנע הזויתי באופן כללי? לשם פישוט ההגדרה שלו, נשתמש בזהות הוקטורית:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

כדי לקבל:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \sum_i m_i\left(\vec{\omega}\, r^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)$$

נסתכל על רכיב x של L_x:

$$L_x = \sum_i m_i\Big(\underbrace{\omega_x r_i^2 - (\omega_x x_i}_{=\omega_x(y_i^2+z_i^2)} + \omega_y y_i + \omega_z z_i)\, x_i\Big)$$

ולכן:

$$L_x = \left(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x + \left(-\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_y + \left(-\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_z$$

ובאופן דומה:

$$L_y = \left(-\sum_i m_i y_i x_i\right)\omega_x + \left(\sum_i m_i(x_i^2+z_i^2)\right)\omega_y + \left(-\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_z$$

$$L_z = \left(-\sum_i m_i z_i x_i\right)\omega_x + \left(-\sum_i m_i z_i y_i\right)\omega_y + \left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega_z$$

אנו רואים כי ניתן לרשום את המשוואה כ-

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_y = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

* איברי האלכסון הם למעשה מומנט האינרציה לסיבוב סביב הצירים $\hat{x}$ $\hat{y}$ או $\hat{z}$, (I_{xx}, I_{yy} או I_{zz}). האיברים המעורבים נקראים "מכפלות האינרציה", הם אלה הנותנים ל- $\vec{L}$ רכיב שניצב לציר סיבוב אם ציר הסיבוב סביב $\hat{x}$ $\hat{y}$ או $\hat{z}$,
למשל, אם: $\vec{\omega} = (\omega_x, 0, 0)$, התנע הזויתי יהיה הוקטור: $\vec{L} = (I_{xx}\omega_x, I_{yx}\omega_x, I_{zx}\omega_x)$

* אנו רואים מההגדרה כי - $I_{ij} = I_{ji}$ ולכן ישנם למעשה 6 מספרים המתארים את הקשר בין $\vec{\omega}$ לבין $\vec{L}$

לידע כללי! ניתן לכתוב את הקשר בין $\vec{L}$ ל- $\vec{\omega}$ בעזרת מטריצה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}}_{\text{וקטור 3-מימדי}} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה } 3\times3} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

* כשמכפילים מטריצה בוקטור, הרכיב ה-i של התוצאה יהיה ה"מכפלה הסקלרית" של השורה ה-i-ית של המטריצה כפול העמודה של הוקטור.

מומנט האינרציה $\overline{\overline{I}}$ הוא למעשה מטריצה ולא "מספר" כפי שעבדנו קודם.

* לידע כללי: שוב, אם מכפילים מטריצה במטריצה אז התוצאה תהיה מטריצה שהאיבר ה- i,j שלה יהיה השורה ה-i של המטריצה (בצד שמאל של המכפלה) "כפול סקלרית" בעמודה ה-j של המטריצה השניה (בצד ימין של המכפלה).
* מספר הוא גודל "מדרגה אפס", וקטור הוא גודל מדרגה ראשונה (יש לו רק "מימד" אחד של רכיבים). מטריצה היא גודל מדרגה שניה (עם שני מימדים של רכיבים). ניתן להכליל לגדלים עם מספר מימדים גבוה יותר, באופן כללי הם נקראים טנסורים, כך שמטריצה היא טנסור דו מימדי. סקלר הוא טנסור אפס מימדי וכו'..

חשוב מאוד לציין, אך לא ניתן להוכיח בעזרת הכלים המתמטיים שברשותינו כעת, כי תמיד ניתן לבחור מערכת צירים הצמודה לגוף כך שהאיברים שלא על האלכסון יתאפסו.

* המשמעות עבורינו היא שניתן למצוא מערכת צמודה לגוף בה התנע הזוויתי יראה:

$$\vec{L} = \underbrace{I_{xx}}_{I_x}\hat{x} + \underbrace{I_{yy}}_{I_y}\hat{y} + \underbrace{I_{zz}}_{I_z}\hat{z}$$

I_x - לשם נוחות.

* אינטואיטיבית, ניתן לראות את ההגיון שבמשפט למעלה. מספר האיברים הבלתי תלויים שיש שלא על האלכסון (האיברים המעורבים) הם 3 (בגלל ש- $I_{ij}=I_{ji}$). ניתן לאפסם ע"י בחירת מערכת צירים נוחה ובבחירת מערכת צירים יש לנו גם 3 דרגות חופש - הכיוון של ציר $\hat{z}$ למשל (כיוון = 2 דרגות חופש) + הזוית של ציר $\hat{x}$ (למשל) במישור הניצב לציר $\hat{z}$.