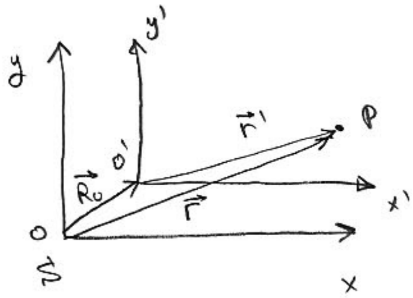
מערכות צירים לא אינרציאליות

ננסה לראות כעת כיצד יראו משוואות התנועה במערכת S' המאיצה ביחס למערכת S, שאינה מאיצה.



הנקודה P מתוארת ע"י הוקטור $\vec{r}'$ במערכת S' ואילו במערכת S היא מתוארת ע"י הוקטור $\vec{r}$.
היות והמערכת S' נמצאת בנקודה $\vec{R}_0$ יחסית ל-S,
ישנו הקשר:
$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}'$$
נגזור פעמיים לפי הזמן ונקבל:
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}'$$

משוואת התנועה (החוק השני של ניוטון) נותנת:
$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$
כאמור:
$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}' + m\ddot{\vec{R}}_0$$

וזאת מפני שהתאוצה הכוללת-האמיתית של החלקיק היא לא התאוצה $\ddot{\vec{r}}'$ יחסית ל-O' אלא היא כוללת גם את התאוצה של המערכת. ניתן אולם להעביר את האיבר $m\ddot{\vec{R}}_0$ לצד שמאל ונקבל:
$$\underbrace{\vec{F} - m\ddot{\vec{R}}_0}_{\text{סכום הכוחות הכולל כח דמיוני}} = \underbrace{m\ddot{\vec{r}}'}_{\text{תאוצת החלקיק במערכת } S'}$$

כלומר, אם אנו רוצים לתאר את תנועת החלקיק במערכת S' המאיצה יתווסף לנו כח דמיוני $-m\ddot{\vec{R}}_0$ הנובע מתאוצת המערכת. כח זה הוא כח מדומה.

במערכות אינרציאליות, שאינן מאיצות, אין כוחות מדומים לכן, חוקי הפיסיקה אינם יכולים לתת לנו את מהירות המערכת (ניסוים בקרון נח או בקרון הנע במהירות קבועה נותנים לנו את אותן התוצאות). עקרון זה הוא עקרון בסיסי הנשמר גם ביחסות פרטית.

דוגמאות:

- אם מכונית מאיצה, ואנו מתארים את תנועתנו יחסית למכונית בה אנו יושבים, נרגיש כח מדומה אחורה.
- אם נעים בתנועה מעגלית (למשל בקרוסלה). תאוצת המערכת שלנו היא פנימה ונרגיש כח דמיוני החוצה (הכח הצנטריפוגלי).

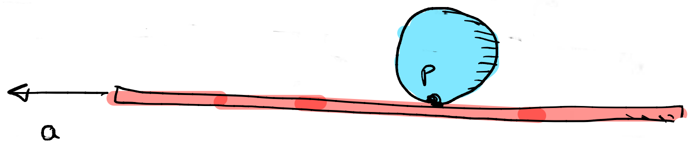
- אם אנו נופלים במעלית בנפילה חופשית, המעלית תאוץ כלפי מטה ↓ ויופעל כח דמיוני כלפי מעלה במערכת המעלית:

$$F'_{TOT} = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{כח אמיתי כלפי מטה.}} - \underbrace{m\vec{a}}_{\text{כח דמיוני}} = 0$$

אולם $\vec{a}=\vec{g}$

ז.א. נרגיש כאילו וכח הכבידה אינו פועל!

- עוד דוגמא: נסתכל שוב על בעיית הכדור על השטיח המאוץ:



הפעם נסתובב עם המומנטים סביב נקודה P. אולם הפעם נקודה P אינה אינרציאלית! בחיים, גם אם אין תנועה סיבובית של הגוף יש תאוצה של נקודת המגע. הדרך להתמודד עם זה, היא לעבור למערכת המאוצה ביחד עם השטיח המאוץ. במערכת זו יפעלו כוחות מדומים על הגופים.

שינוי התנע הזוויתי סביב הציר העובר ב-P במערכת המאוצה עם השטיח (בה הנקודה P אינה מאוצה אם אין סיבוב) נתון ע"י:

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\sum r_i F_i}_{\text{הפעם הסכימה מכילה את הכח המדומה על הגוף.}} = 0 + Rma$$

0 – חיכוך ונורמל פועלים על ציר

Rma – סימן הכח המדומה חיובי "בכיוון" המגמה "להגדיל" את ω.

אולם: $L=I_P\omega$ ולכן:

$$I\frac{d\omega}{dt} = Rma$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{MR^2}{I_P}\frac{a}{R} = \frac{MR^2}{MR^2+I_c}\frac{a}{R}$$

I_P – סביב ציר P.

$=$ – שטיינר

I_c – סביב מרכז המסה

כמו כן, מצאנו כבר:

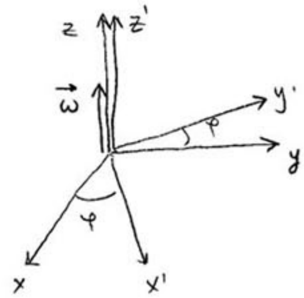
$$\frac{dv}{dt} = a - R\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = a\left(1-\frac{MR^2}{MR^2+I_c}\right) = \left(\frac{I_c}{MR^2+I_c}\right)a$$

מערכות מסתובבות

נסתכל על דוגמא יותר מורכבת בה מערכת S' מסתובבת ביחס למערכת אינרציאלית S במהירות סיבוב ω סביב ציר בכיוון $\hat{\omega}$ – דהיינו סיבוב המתואר ע"י $\vec{\omega}$.

* נתחיל בהסתכלות על גודל $\vec{A}$ כלשהו במערכת הלא אינרציאלית S'.
כיצד יראה הוקטור $\frac{dA}{dt}$ במערכת המסתובבת S'? כיצד יראה במערכת הלא מסתובבת S?
ברור שהוא לא יראה כך בשתיהן, והמערכת מסתובבת, גם אם $\frac{dA}{dt}$ נראה אפס במערכת S'.
לשם נוחות, נעבוד עם ציר סיבוב המתלכד עם ציר z ו- z'.



במערכת S': $A = A'_x\hat{x}' + A'_y\hat{y}' + A'_z\hat{z}'$

כדי לבטא את הוקטור A במערכת S עלינו לבטא את $\hat{x}'$ $\hat{y}'$ ו- $\hat{z}'$ בעזרת $\hat{x}$ $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$:

נרשום: $\varphi = \omega t + \varphi_0$, ואז:

$$\hat{z}' = \hat{z}$$
$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$
$$\hat{y}' = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

לכן, הוקטור $\vec{A}$ במערכת S יהיה בעל הרכיבים:

$$\vec{A} = \underbrace{(A'_x\cos\varphi - A'_y\sin\varphi)}_{A_x}\hat{x} + \underbrace{(+A'_x\sin\varphi + A'_y\cos\varphi)}_{A_y}\hat{y} + \underbrace{A'_z}_{A_z}\hat{z}$$

מה השינוי של $\vec{A}$ לפי הזמן?

על השאלה כיצד $\vec{A}$ יראה משתנה בזמן ניתן לענות לצופה הנמצא ב- $\hat{S}$ ולצופה הנמצא ב- S'.

צופה הנמצא ב- S' לא יראה את $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ ו- $\hat{z}'$ משתנים בזמן ולכן:

$$\underbrace{\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_{s'}}_{\text{השינוי בזמן כפי שצופה ב-}S'\text{ יראה}} = \dot{A}'_x \hat{x}' + \dot{A}'_y \hat{y}' + \dot{A}'_z \hat{z}'$$

את הוקטור הזה, שהוא השינוי שצופה S' יראה ניתן לבטא גם במערכת קואורדינטות של S (ע"י הקשר בין $\hat{x}',\hat{y}'$ ל- $\hat{x},\hat{y}$). נקבל:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_{s'} = \left(\dot{A}'_x \cos\varphi - \dot{A}'_y \sin\varphi\right)\hat{x} + \left(\dot{A}'_x \sin\varphi + \dot{A}'_y \cos\varphi\right)\hat{y} + \dot{A}'_z \hat{z}$$

מה יהיה השינוי של A כפי שימדוד צופה ב- S? הוקטור A במערכת S נתון לנו ע"י השורה האחרונה בעמוד הקודם. אם נגזור את שורה זו בזמן נקבל:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_{s} = \overbrace{\left(\dot{A}'_x \cos\varphi - \dot{A}'_y \sin\varphi\right)\hat{x} + \left(\dot{A}'_x \sin\varphi + \dot{A}'_y \cos\varphi\right)\hat{y} + \dot{A}'_z \hat{z}}^{= dA/dt|_{s'}}$$
$$+ \left(-A'_x \sin\varphi - A'_y \cos\varphi\right)\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{|\omega|}\hat{x} + \left(A'_x \cos\varphi - A'_y \sin\varphi\right)\frac{d\varphi}{dt}\hat{y}$$

שלושת האיברים הראשונים הם בפשט $\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_{s'}$ — שינוי הוקטור $\vec{A}$ כפי שצופה ב- S' רואה (רק מבוטא בקואורדינטות של S).

מה הם שני האיברים הנוספים? כדי לראות למה הם שווים, נסתכל על הגודל:

$$\vec{\omega}\times\vec{A} \underset{\text{כי ל-}\vec{\omega}\text{ רק רכיב }\hat{z}}{=} \hat{y}\,\omega_z A_x - \hat{x}\,\omega_z A_y = \hat{y}\underbrace{\omega_z}_{\frac{d\varphi}{dt}}\left(A'_x \cos\varphi - A'_y \sin\varphi\right) - \hat{x}\,\omega_z\left(A'_x \sin\varphi + A'_y \cos\varphi\right)$$

ולכן שורה זו היא בדיוק שני האיברים הנוספים בביטוי עבור $\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_{s}$. כלומר, אנו יכולים לכתוב כך:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_{s} = \frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_{s'} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

היות ואת מערכת הצירים S ו- S' אנו יכולים תמיד לבחור כך ש- z ו- z' מתלכדים עם $\vec{\omega}$, תמיד ניתן לקבל את הנגזרת הוקטורית הנ"ל, ללא קשר לבחירה שלנו ש- $\vec{\omega}$ בכיוון $\hat{z}$.

משמעות הנוסחה שקבלנו היא שהשינוי שצופה ימדוד לוקטור מסוים במעבדה (במערכת הלא מואצת S) זהה השינוי שימדוד צופה במערכת המסתובבת + האיבר $\vec{\omega}\times\vec{A}$. גם אם $\vec{A}$ נראה קבוע במערכת S', הוא יראה כמשתנה בזמן במערכת S!

הנוסחה הזו נכונה עבור $\vec{A}$ כלשהו בפרט. ניתן לבחור $\vec{A}=\vec{r}$ ואז נקבל:

$$\underbrace{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{s}}_{\substack{\text{המהירות שימדוד צופה ב-}S \\ = \\ v}} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{s'}}_{\substack{\text{המהירות} \\ \text{שימדוד צופה} \\ \text{ב-}S' \equiv v'}} + \vec{\omega}\times\vec{r} \quad \Rightarrow \quad v = v' + \omega\times r$$

גם אם צופה נח במערכת מסתובבת $\left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_{s'}=0\right)$ ימדוד לו מהירות $v|_s = \vec{\omega}\times\vec{r}$ במערכת המעבדה.

כעת ניתן להשתמש בנוסחה שוב על A, אולם הפעם נקח ש- $\vec{A} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_s$. ונקבל:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_s \left.\frac{dr}{dt}\right|_s = \left.\frac{d}{dt}\right|_{s'} \left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_s\right) + \omega\times\left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_s\right)$$

נציב את $\left.\frac{dr}{dt}\right|_s$ מלמעלה ונמצא:

$$\overbrace{\left.\frac{d}{dt}\right|_s \left.\frac{dr}{dt}\right|_s}^{\text{תאוצה } \vec{a} \text{ ב- } S} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{s'} \left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_{s'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \omega\times\left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_{s'} + \omega\times r\right)$$

בגזירה, נזכור כי $\vec{\omega}$ הוא קבוע (גם לצופה ב- S וגם ב- S'). ולכן:

$$\vec{a} = \underbrace{\left.\frac{d}{dt}\right|_{s'} \left.\frac{dr}{dt}\right|_{s'}}_{\vec{a}' \text{ — תאוצה לצופה במערכת } S'.} + 2\vec{\omega}\times\Big(\underbrace{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{s'}}_{\substack{v' \text{ — המהירות} \\ \text{אותה יראה צופה ב-}S'}}\Big) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

התאוצה אותה ימדוד צופה במערכת המעבדה היא התאוצה אותה ימדוד צופה במערכת S' מסתובבת + שני תיקונים האיבר: $2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ נקרא תאוצת קוריאוליס ואילו $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ הוא התאוצה הצנטריפוגלית.

את משוואת התנועה ב- S ניתן לכתוב: $m\vec{a} = \vec{F}$

את $\vec{a}$ ניתן לכתוב בעזרת התאוצה במערכת S' ולקבל:

$$m\left(\vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right) = F$$

אם נסדר אגפים נקבל:

$$m\vec{a}' = F - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

כלומר, אם אני רוצה לתאר את תנועת החלקיק במערכת S', שמסתובבת, נצטרך להוסיף שני כוחות מדומים $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ — שהוא הכח הצנטריפוגלי. ואילו $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$ הוא כח קוריאוליס.

<u>דוגמא</u>:

* <u>נפילת גוף ממגדל אייפל</u>. ילד מפיל גולה ממגדל אייפל. בכמה יפספס את האנך?

הכח הפועל על הגולה הוא: $\vec{F}'_{TOT} = m\vec{g} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

הוקטור $\vec{r}$ המחבר את ראשית הצירים אל הגולה כמעט ואינו משתנה בין תחתית המגדל לראשו (300 מטר על 6400 ק"מ). לכן האיבר השני הוא קבוע וניתן לרשום:

$$F'_{TOT} = m\Big(\underbrace{\vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\vec{g}_{eff}}\Big) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

האיבר בסוגריים מתאר תאוצה קבועה והוא מכיל את תאוצת הכובד + הכח הצנטריפוגלי המדומה, אנו נרצה כח כבידה אפקטיבי המכיל את שני האיברים. האנך שלנו יוגדר לפי הכובד האפקטיבי!

אז יש תנועה עם כח: $F' = m\vec{g}_{eff} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

הואיל וכח קוריאוליס הוא קטן ביחס לכח הכבידה, את ה-$\vec{v}'$ שנכנס לחישוב כח קוריאוליס ניתן לחשב בעזרת הנפילה ב-$\vec{g}_{eff}$ בלבד. משוואות התנועה:

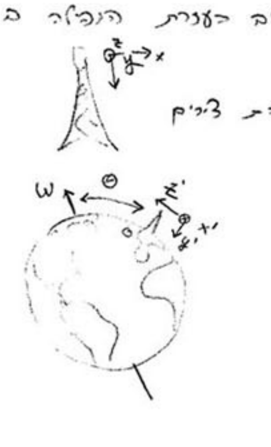
מזניחים איבר קוריאוליס הנובע מ-v_x.

$$\ddot{y}' = g_{eff} \Rightarrow y' = y'_0 - \frac{1}{2} g_{eff} t^2$$

$$\ddot{x}' = +2m\omega v_y \sin\theta$$

$$\ddot{z}' = 0$$

נסתכל על איבר זה הוא חיובי
אח"כ



המהירות בציר y' היא: $v_{y'} = g_{eff} t$ ולכן:

$$\ddot{x}' = 2\omega g_{eff} t \sin\theta \Rightarrow \dot{x}' = +\omega g_{eff} t^2 \sin\theta \qquad x' = \omega g_{eff} \frac{t^3}{3} \sin\theta$$

$x'|_0 = 0 \quad \dot{x}'|_0 = 0$ תנאי התחלה

הפגיעה תתרחש כאשר: $y(t=t_f) = h \rightarrow t_f = \left(\frac{2h}{g_{eff}}\right)^{1/2}$

ונציב, ונקבל:

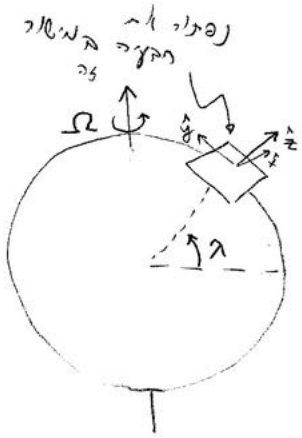
$$x' = \frac{\omega}{3}\left(\frac{8h^3}{g_{eff}}\right)^{1/2} \sin\theta$$

והצבת מספרים:

$$x' = \frac{2\pi\ s^{-1}}{3\cdot 24\cdot 3600}\left(\frac{8(300m)^3}{9.8\ m/s^2}\right)^{1/2} \sin(90° - 48°) = \approx 0.08m$$

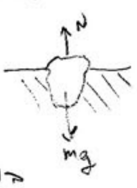
הקלה תפספס את האנך בשמונה ס"מ.

דוגמא נוספת: משוואות התנועה של קרחון בים



נסתכל על קרחון הנע בים בהשפעת כח קוריוליס, נזניח חיכוך. משוואות התנועה (במערכת המסתובבת בזוית):

$$m\left[\ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})\right] = +m\vec{g} + \underbrace{\vec{N}}_{\text{מהמים}}$$



במערכת צירים שלנו, וקטור הסיבוב $\vec{\Omega}$ הוא:

$$\vec{\Omega} = 0\hat{x} + \Omega\cos\lambda\,\hat{y} + \Omega\sin\lambda\,\hat{z}$$

ולכן:

$$2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} = \hat{x}(2\dot{z}\Omega\cos\lambda - 2\dot{y}\Omega\sin\lambda) + \hat{y}(2\dot{x}\Omega\sin\lambda) - \hat{z}\,2\dot{x}\Omega\cos\lambda$$

משוואת התנועה שלנו:

$$m\ddot{\vec{r}} = +m\overbrace{(\vec{g} - \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}))}^{\vec{g}_{eff} = \text{גרביטציה אפקטיבית באותו אזור}} - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} + \underbrace{\hat{N}}_{\text{וקטור בכיוון } \hat{z}}$$

אותנו מעניינים רכיבי $\hat{x}$ ו-$\hat{y}$. רכיב $\hat{z}$ מכיל את $\hat{N}$ המונע מהקרחון לטבוע.

כמו כן, לקרחון אין תנועה בכיוון $\hat{z}$ ולכן $\dot{z}=0$. נקבל שתי משוואות משני רכיבים $\hat{x}$ ו-$\hat{y}$:

נגדיר $f = 2\Omega \sin \lambda$ ונקבל שתי משוואות:

$$\ddot{x} - f\dot{y} = 0$$
$$\ddot{y} + f\dot{x} = 0$$

נגדיר $u = \dot{x}$ ו- $v = \dot{y}$ ונקבל:

$$\dot{u} - fv = 0 \qquad \underbrace{\dot{v} + fu = 0}_{\text{נגזור}}$$

$$\ddot{v} + f\dot{u} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\dot{u} \xrightarrow{\text{הצבת}} \ddot{v} + fv = 0$$

זוהי משוואה הרמונית וזה הפתרון:

$$v = A\cos(ft) + B\sin(ft)$$

נגזור ונקבל:

$$\dot{v} = -fA\sin(ft) + fB\cos(ft)$$

ולכן:

$$u = -\frac{\dot{v}}{f} = A\sin(ft) - B\cos(ft)$$

אם בזמן $t=0$ $v=v_0$ ו- $u=u_0$ אז: $A = v_0$ ו- $B = -u_0$ ונקבל:

$$v = +v_0\cos(ft) - u_0\sin(ft)$$
$$u = v_0\sin(ft) + u_0\cos(ft)$$

אם נבצע אינטגרציה נוספת:

$$y = y_0 + \frac{v_0}{f}\sin(ft) + \frac{u_0}{f}\cos(ft)$$
$$x = x_0 + (-)\frac{v_0}{f}\cos(ft) + \frac{u_0}{f}\sin(ft)$$

תנועת הקחתן היא בכיוון השעון (עבור סרף f (חצי צפוני)) ברדיוס של $\frac{\sqrt{v_0^2 + u_0^2}}{f}$ ובזמן מחזור של $\frac{2\pi}{f}$. רדיוס הסיבוב נקרא רדיוס רוסבי (Rossby) והוא המעגל של המסלול נקרא בפי אוקיינוגרפים המעגל האינרציאלי.

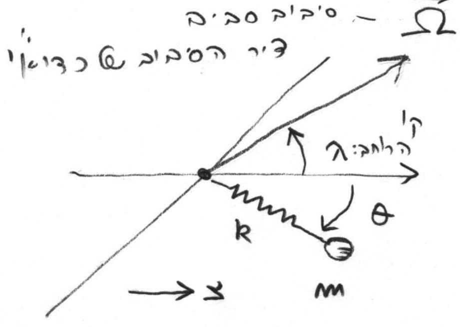
מטוטלת פוקו (Foucault pendulum)

ראשית, לשם פישוט הבעיה נעבוד בזוויות קטנות. אנו יודעים שבעית המטוטלת בגבול זה היא כמו קפיץ עם קבוע קפיץ:

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ } מטוטלת

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ } קפיץ $\Rightarrow$ "k" $= \frac{mg}{l}$

ז.א. הבעיה שלנו היא של קפיץ בעולם דו-מימדי:



אנו צריכים לקחת בחשבון את העובדה שמערכת הצירים שלנו אינה אינרציאלית ולכן יש כוחות מדומים. הכח הצנטריפוגלי נכנס פנימה בדרך ההגדרה של האנך. לעומת זאת, קוריוליס לא. משוואת התנועה היא אם כן:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} + \underbrace{\vec{N}}_{\text{נורמל ממשטח}} - \underbrace{2m(\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}})}_{\text{קוריוליס}}$$

נבחר לעבוד בקואורדינטות פולריות:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

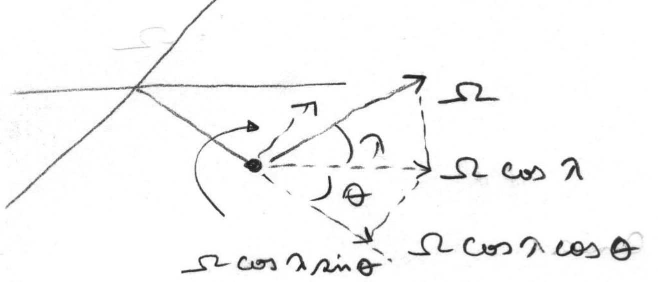
ונגזרת המיקום $\vec{r}$ הן לכן:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

וקטור הסיבוב:



$$\vec{\Omega} = \Omega\sin\lambda\,\hat{z} + \Omega\cos\lambda\cos\theta\,\hat{r} - \Omega\cos\lambda\sin\theta\,\hat{\theta}$$

כי בכיוון הפוך לכיוון הגדלה של θ.

כעת, מעניין אותנו רכיב $\hat{\theta}$ של משוואת התנועה, שיתן את "הפרצסיה" של המטוטלת (סביב מישור התנודה של המטוטלת).

רכיב $\hat{\theta}$ יהיה:

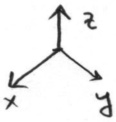
$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - 2m(\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}})$$

$\hat{\theta}$

$$mr\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -2m\underbrace{(\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}})_{\theta}}_{\text{רכיב } \theta}$$

$\dot{\vec{r}}$ נתון ע"י:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

שימו לב כי $\{\hat{\theta},\hat{r},\hat{z}\}$ היא מערכת ימנית כמו  לכן רכיב $\hat{\theta}$ של $(\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}})$ יהיה:

$$(\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}})_{\theta} = \Omega_r \underbrace{\dot{r}_z}_{=0} - \Omega_z \dot{r}_r = -\Omega\sin\lambda\cdot\dot{r}$$

רכיב $\hat{\theta}$ של התנועה:

$$mr\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = +2m\Omega\sin\lambda\,\dot{r}$$

שימו לב כי θ משתנה על סקלת זמן של סיבוב המישור, שהיינו זמן סיבוב כדו"א ואילו r על זמן מחזור האוסצילציה. לכן:

$$\dot{r}\dot{\theta} \sim \frac{r}{P}\cdot\frac{1}{\tau}$$

מסדר גודל

P - זמן מחזור תנודה.

τ - זמן מחזור סיבוב מישור התנודה.

$$r\ddot{\theta} \sim r\cdot\frac{1}{\tau^2}$$

לכן:

$$r\ddot{\theta} \ll \dot{r}\dot{\theta}$$

בפקטור של $\sim \frac{\text{עשרות שעות}}{\text{שניות}}$

משוואת התנועה אם כן בקירוב טוב מאוד (אחרי הזנחת $r\ddot{\theta}$ וצמצום ב- $2m\dot{r}$)

$$\dot{\theta} = \Omega\sin\lambda$$

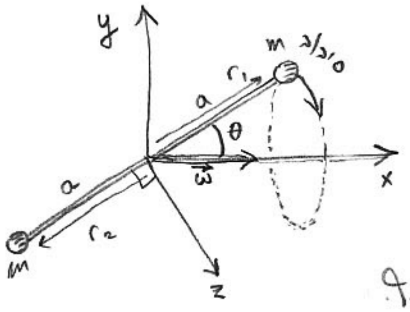
זמן מחזור פרצסיה:

$$\tau = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\underbrace{\Omega}_{\equiv 1\,day}}\sin^{-1}\lambda = (day)\sin^{-1}\lambda \simeq 1.9\ day$$

בירושלים.

התנע הזויתי בסיבוב סביב ציר קבוע

ראינו כבר שלא בכל מקרה מקבלים תנע זויתי $\vec{L}$ שמקביל ל-$\vec{\omega}$. אולם, היות ועסקנו סביב ציר קבוע עניין אותנו רק רכיבי $\vec{L}$ ו-$\vec{\tau}$ (מומנט הכח) בכיוון הציר. כעת נבחן דוגמא בה $\vec{L}$ אינו בכיוון $\vec{\omega}$ ונבחן את המומנט $\vec{\tau}$ שיש להפעיל על מנת לשמור על תנועה זו. (היות ויופיע בשעור זה גם הכח הנורמל למשטח, נסמנו ב-$\vec{N}$ ואת מומנט הכח ב-$\vec{\tau}$).



* דוגמא לסיבוב סביב ציר קבוע.

נעבוד במערכת צירים הקבועה לגוף.

אמנם במערכת הגוף אין תנועה אולם אנו יכולים לתאר את תנועת הגוף יחסית למעבדה במערכת הגוף.
(למשל, יחסית לכדור הארץ אין אנו רואים תנועה, אולם את תנועת כדור-הארץ יחסית לכוכבים ניתן לתאר בעזרת וקטור $\vec{\omega}$ ואת רכיביו במערכת הגוף או מערכת המעבדה).

התנע הזויתי הוא:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + \vec{r}_2 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_2)$$

במערכת הגוף המסתובב, המתוארת בציור, יש לנו:

$$\vec{r}_1 = a\cos\theta\,\hat{x} + a\sin\theta\,\hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = -\vec{r}_1 = -a\cos\theta\,\hat{x} - a\sin\theta\,\hat{y}$$

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{x}$$

כדי לחשב את $\vec{L}$, נשתמש בזהות הוקטורית:

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

כך שמתקבל:

$$\vec{r}_1 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) = \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{r})}_{a^2}\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}$$

לכן:

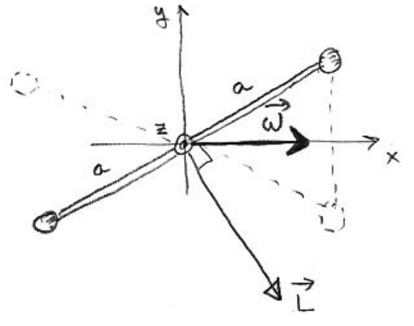
$$\vec{L} = 2\vec{r}_1 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_1) = 2a^2 m\omega\,\hat{x} - 2ma\cos\theta\,\omega(a\cos\theta\,\hat{x} - a\sin\theta\,\hat{y})$$

$$= 2ma^2\omega(\sin^2\theta\,\hat{x} - \sin\theta\cos\theta\,\hat{y})$$

$$= 2ma^2\omega\sin\theta\underbrace{(\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})}$$

התרומה של האיבר עם r_2 זהה ל-r_1 היות וה-$\vec{r}_2$ מופיע כפול כך שסימן המינוס ב-$\vec{r}_2 = -\vec{r}_2$ נעלם.

כיוון ניצב ל-$\hat{r}$ הנמצא ב-$(\cos\theta, \sin\theta)$



ניתן לראות זאת בציור:

ז.א. $\vec{\omega}$ אינו מקביל ל-$\vec{L}$. במערכת הגוף $\vec{L}$ קבוע אולם היות והגוף מסתובב והיות ו-$\vec{L}$ אינו בכיוון ציר הסיבוב, גם $\vec{L}$ יסתובב במערכת המעבדה.

כעת, שאנו יודעים שניתן לעבוד במערכת צירים של הגוף בה הביטוי עבור $\vec{L}$ פשוט הרבה יותר, נבחר לעבוד במערכת זו. היא נקראת "מערכת הצירים הראשיים".

נניח עכשיו לשאול למה שווה השינוי בזמן של $\vec{L}$? היות ומערכת הגוף היא לא אינרציאלית נרצה לענות על השאלה במערכת הגוף ובמערכת המעבדה. התשובה במערכת המעבדה היא שהשינוי שווה למומנט הכח הפועל על הגוף. כלומר:

$$\underbrace{\vec{\tau}}_{\text{מומנט הכח}} = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_{lab}$$

אולם אנו עובדים במערכת הגוף ולכן יש לקחת את הנגזרה בעזרת קואורדינטות במערכת הגוף. נשתמש ב-

$$\frac{d}{dt}\Big|_{lab} = \frac{d}{dt}\Big|_{body} + \vec{\omega}\times$$

ולכן:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_{lab} = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_{body} + \vec{\omega}\times\vec{L}$$

ובעזרת הרכיבים: (במערכת הראשית!)

$$\vec{L} = \left(I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt}\Big|_{body} = I_x\frac{d\omega_x}{dt}\hat{x} + I_y\frac{d\omega_y}{dt}\hat{y} + I_z\frac{d\omega_z}{dt}\hat{z}$$

ואילו

$$\vec{\omega}\times\vec{L} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)\times(I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) =$$

$$= \hat{x}\left(\omega_y\omega_z I_z - \omega_z\omega_y I_y\right) + \hat{y}\left(\omega_z\omega_x I_x - \omega_x\omega_z I_z\right) + \hat{z}\left(\omega_x\omega_y I_y - \omega_y\omega_x I_x\right)$$

אם נציב את $\frac{dL}{dt}\Big|_{body}$ ו- $\vec{\omega}\times\vec{L}$ במשוואה למעלה, נקבל משוואה וקטורית ששלושת הרכיבים הם:

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_z\omega_y = \tau_x$$

$$I_y\frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = \tau_y$$

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = \tau_z$$

משוואות אלו נקראות משוואות אוילר. הן מתארות את התנהגות $\vec{\omega}$ במערכת הגוף. לכן, יש לבטא את $\vec{\tau}$ במערכת הגוף! (לא בהכרח משימה פשוטה היות ואם המומנט הוא חיצוני (לדוגמא גרביטציה על סביבון) יש לדעת את המצב הרגעי) ולכן במקרה כזה יותר נוח לעבוד במערכת המעבדה.

גדלים שימושיים, אם יודעים את ω ו- L :

האנרגיה הקינטית הסיבובית:
$$K = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right)$$

ואילו הגודל של התנע הזוויתי:
$$|L| = \sqrt{(I_x\omega_x)^2 + (I_y\omega_y)^2 + (I_z\omega_z)^2}$$

אם הגוף הוא גוף חופשי- אזי גם K וגם $|L|$ ישארו קבועים למרות שהרכיבים המרכיבים את L משתנים במערכת הגוף.

שימושים למשוואות אוילר

1) סיבובים סביב צירים ראשיים. אם $\vec{\omega}$ הוא סביב אחד מהצירים הראשיים האיברים המעורבים במשוואות אוילר נופלים, ואם אין מומנטים חיצוניים, הגוף ימשיך להסתובב סביב אותו הציר, עבור $\vec{\omega}$ אחרת, $\vec{\omega}$ בהכרח ישתנה אלא אם $\vec{\omega}$ נמצא בין שני צירים שסביבם I הוא זהה. (נראה בהמשך כי הסיבוב סביב ה- I הבינוני אינו יציב ואילו הסיבוב סביב ה- I הגדול או הקטן כן יציב.)

2) מערכת בה שני מומנטי אינרציה קבועים: (עבור עם:) $I_y = I_z = I_\perp$, כמו כן $\vec{\tau}=0$ (גוף חופשי)

במקרה זה, משוואות אוילר נראות:

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = 0$$

$$I_\perp \frac{d\omega_y}{dt} = (I_\perp - I_x)\,\omega_z\omega_x$$

$$I_\perp \frac{d\omega_z}{dt} = (I_x - I_\perp)\,\omega_y\omega_x$$

נגזור משוואה שניה: $\frac{d}{dt}$

$$I_\perp \frac{d^2\omega_z}{dt^2} = (I_x - I_\perp)\,\omega_x \frac{d\omega_y}{dt}$$

כאשר: $\dot{\omega}_x = 0$,

נציב את המשוואה עבור $\dot{\omega}_y$:

$$I_\perp \frac{d^2\omega_z}{dt^2} = \frac{(I_x - I_\perp)(I_\perp - I_x)}{I_\perp}\,\omega_z\omega_x^2$$

נגדיר $\Omega^2 = \frac{(I_x - I_\perp)^2}{I_\perp^2}\omega_x^2$ ונקבל:

$$\frac{d^2\omega_z}{dt^2} + \Omega^2\omega_z = 0$$

משוואה זו מתארת תנועה הרמונית ב- ω_z עם הפתרון הכללי:

$$\omega_z = \underbrace{\omega_\perp}_{\text{קבוע אינטגרציה.}} \cos(\Omega t + \underbrace{\phi}_{\text{קבוע אינטגרציה}})$$

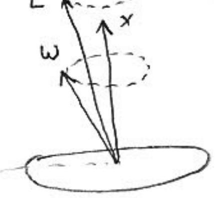
הפתרון עבור ω_y יהיה:

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \underbrace{\frac{I_\perp - I_x}{I_\perp}\omega_x}\cdot\omega_z = +k\Omega\omega_z$$

Ω או $-\Omega$ תלוי באם $I_\perp > I_x$ או $I_\perp < I_x$. לכן נכתוב: $\omega_y = k\Omega\omega_z$

אם $k=\pm1$ בהתאם לסימן ב- $I_\perp - I_x$.

$$\omega_y = k\omega_\perp \sin(\Omega t + \phi)$$



ω_y, ω_z מבצעים סיבוב סביב ציר $\hat{x}$. דהיינו הגוף שלנו מבצע פרצסיה בתדירות Ω. כיוון הפרצסיה תלוי באם $I_x > I_\perp$ או להפך.

3) יציבות סיבוב סביב ציר ראשי. (נסתכל על מערכת עם I-ים שונים) ונראה שאם הסיבוב קרוב לציר ראשי, אזי הפרצסיה תהיה יציבה אם מדובר בציר סביב ה-I הוא הגדול או הקטן ביותר ואילו הסיבוב אינו יציב אם הציר הוא ציר עם ה-I הבינוני.

אם אנו מסתובבים בסביבות ציר ראשי (נניח והוא $\hat{x}$) אזי האיברים עם $\omega_x\omega_z$ או $\omega_x\omega_y$ יהיו גדולים הרבה יותר מ- $\omega_y\omega_z$ (גודל קטן לעומת גודל קטן בריבוע...).

לכן, בקירוב סדר ראשון, נרשום:

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt} = (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \simeq 0 \Rightarrow \omega_x \simeq const$$

לעומת זאת:

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt} = (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

גזירה.

$$\frac{d^2\omega_z}{dt^2} \simeq \frac{(I_x - I_y)}{I_z}\omega_x\underbrace{\frac{d\omega_y}{dt}}_{\text{הצבה מאוילר.}} = \overbrace{\frac{(I_x - I_y)(I_z - I_x)}{I_z I_y}\omega_x^2}^{\equiv \lambda^2}\omega_z$$

כי זרקנו את $\dot{\omega}_x$

באותה צורה:

$$\frac{d^2\omega_y}{dt^2} \simeq \frac{(I_z - I_x)(I_x - I_y)}{I_z I_y}\omega_x^2\,\omega_y$$

הפתרון עבור ω_z (או ω_y) הוא תנועה הרמונית אם λ^2 הוא שלילי והתנועה היא לא יציבה (עם: $e^{\pm\lambda t}$) עבור λ^2 שהוא חיובי. כדי ש λ^2 יהיה חיובי והתנועה לא יציבה, I_x צריך להיות בין I_y ל- I_z!

משוואה זו מתארת תנועה הרמונית של ω_z עם הפתרון הכללי:

$$\omega_z = \underbrace{\omega_\perp} \cos(\Omega t + \underbrace{\phi})$$

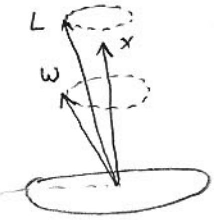
קבוע אינטגרציה.   קבוע אינטגרציה.

הפתרון עבור ω_y יהיה:

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \underbrace{\frac{I_\perp - I_x}{I_\perp}\omega_x} \cdot \omega_z = +k\Omega\omega_z$$

Ω או $-\Omega$ - תלוי בואם $I_\perp > I_x$ או $I_\perp < I_x$. לכן נכתוב: $\omega_y = k\Omega\omega_z$
אם $k=\pm1$ בהתאם לסימן של $I_\perp - I_x$.

$$\omega_y = k\omega_\perp \sin(\Omega t + \phi)$$



ω_y, ω_z מבצעים סיבוב סביב ציר $\hat{x}$. דהיינו הגוף שלנו מבצע פרצסיה. בתדירות Ω. כיוון הפרצסיה תלוי בואם $I_\perp > I_x$ או להפך.

ג) יציבות סיבוב סביב ציר ראשי. (נסתכל על מערכת עם I-ים כלליים ונראה שאם הסיבוב קרוב לציר ראשי, אזי הפרצסיה תהיה יציבה אם מדובר בציר סביב ה-I הוא הגדול או הקטן ביותר ואילו הסיבוב אינו יציב אם הציר הוא ליד הציר עם ה-I הבינוני.

אם אנו מסתובבים בסביבות ציר ראשי (נניח והוא $\hat{x}$) אזי האיברים עם $\omega_x\omega_z$ או $\omega_x\omega_y$ יהיו גדולים הרבה יותר מ- $\omega_y\omega_z$ (גודל קטן לעומת גודל קטן בריבוע...).
לכן, בקירוב סדר ראשון, נרשום:

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \simeq 0 \Rightarrow \omega_x \simeq const$$

לעומת זאת:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

גזירה.

$$\frac{d^2\omega_z}{dt^2} \simeq \frac{I_x - I_y}{I_z}\omega_x \underbrace{\frac{d\omega_y}{dt}} = \overbrace{\frac{(I_x - I_y)(I_z - I_x)}{I_z I_y}\omega_x^2}^{\equiv \lambda^2} \omega_z$$

כי זרקנו את $\dot{\omega}_x$ הצבה מאוילר.

באותה צורה:

$$\frac{d^2\omega_y}{dt^2} \simeq \frac{(I_z - I_x)(I_x - I_y)}{I_z I_y}\omega_x^2 \omega_y$$

הפתרון עבור ω_z (או ω_y) הוא תנועה הרמונית אם λ^2 הוא שלילי והתנועה היא לא יציבה (עם: $e^{\pm\lambda t}$) עבור λ^2 שהוא חיובי. כדי ש-λ^2 יהיה חיובי והתנועה לא יציבה, I_x צריך להיות בין I_y ל-I_z!