הרצאה מיוחדת

למה תרמודינמיקה של חור שחור?

תרמודינמיקה: מערכות מסובכות המתוארות מקרוסקופית ע"י דרגות חופש מועטות: אנרגיה, נפח....

חור שחור: מערכת שנוצרה מאובייקט מסובך אך מתוארת כולה רק ע"י כמה דרגות חופש: M, L, Q (ואולי עוד כמה כאשר מדברים ב 4 ממדים).

לכן ניתן שתרמודינמיקה תהיה רלוונטית לתאור ההיבט המקרוסקופי של החור.

$$Q \leftrightarrow Q \qquad L \leftrightarrow L \qquad E \leftrightarrow M$$

מה שחסר בעולם זה אנטרופיה,
ממשפט הוקינג "שטח האופק נוטה לגדול" מתעורר החשד ששטח האופק הוא פונקציה של ונוכל לתאר אנטרופית חור שחור.

כדי לבדוק יש להבין שטח חור שחור קר-נומן.

(א) $$ds^2 = g_{00}\,dt^2 + 2g_{03}\,dt\,d\phi + g_{33}\,d\phi^2 + g_{22}\,d\theta^2 + g_{11}\,dr^2$$

θ, ϕ זוויות כרגיל

$$g_{00} = \frac{a^2\sin^2\theta - \Delta}{\rho^2}$$

$$g_{03} = \frac{a\sin^2\theta\,(-2Mr + Q^2)}{\rho^2}$$

$$g_{33} = \frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta$$

$$g_{22} = \rho^2$$

$$g_{11} = \frac{\rho^2}{\Delta}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$

$$a = L/M$$

$$A_t = -\frac{Qr}{\rho^2}$$

$$A_\varphi = \frac{Qra\sin^2\theta}{\rho^2}$$

הסן האופק נמצא אבל מסוים קמשפחת דו ממדי כולו ב t קבוע. ננצל סימטריה הצירית:

$$f(r,\theta)=0$$

הנורמל הוא

$$n_\mu = \{0,\ f_{,r},\ f_{,\theta},\ 0\}$$

הנורמה שלו

$$g^{11} f_{,r}^2 + g^{22} f_{,\theta}^2 = \frac{1}{\rho^2}\left(\Delta f_{,r}^2 + f_{,\theta}^2\right)$$

איפה זה יכול להיות אפס. אפשרות אחת:

$$f(r) \qquad \Delta=0$$

כלומר

$$r = M \pm \sqrt{M^2-Q^2-a^2}$$

אפשרות שניה: משטח שלו "כדור" בין המשטחים האלה איפה ש $\Delta<0$. כמובן נקח את החיצוני.

האופק $\rightarrow$ $r_h = M + \sqrt{M^2-Q^2-a^2}$

וש לשאלה האופק (המתוך שלו) כגבול של משטחים $r=const$ ב $t=const$.

ניקח <u>שני</u> אורכילוים dx_1^i, dx_2^i $(dt=0)$ השוכנים ב $r=const$ פורמלית

$$dS_i = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sqrt{g}\left(dx_1^j\, dx_2^k\right)$$

$$A = \int\sqrt{{}^{(3)}g^{ij}\, dS_i\, dS_j}$$

בחר

$$dx_1^i = \{0, d\theta, 0\} \qquad dx_2 = \{0, 0, d\phi\}$$

עבור משטח $r = const$ בכיוון רק dS_1, היתר מתאפסים

$$dS_1 = \cancel{\tfrac{1}{2}} \underbrace{\epsilon_{123}}_{1} \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}\, d\theta\, d\varphi \cdot \cancel{2}$$

$$A = \int \sqrt{g^{11} \left(\sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}\, d\theta\, d\varphi\right)^2}$$

$$= \int \sqrt{g_{22}\, g_{33}}\, d\theta\, d\varphi$$

ב $r = r_h$

$$g_{22} = r_h^2 + a^2 \cos^2\theta$$

$$g_{33} = \frac{(r_h^2 + a^2)^2}{r_h^2 + a^2\cos^2\theta}$$

לכן

$$A = 4\pi\left(r_h^2 + a^2\right)$$

(X) $$A_{KN} = 4\pi\left(2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}\right)$$

עבור שוורצשילד:

$$A_S = 16\pi M^2$$

רייסנר - נורדסטרום:

$$A_{RN} = 8\pi\left(M^2 - Q^2/2 + M\sqrt{M^2 - Q^2}\right)$$

קר:

$$A_K = 8\pi\left(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2}\right)$$

אם נרצה לבחון אנטרופית חור שחור נצטרך
להניח שהחור מקיים החוקים היסודיים -
לבחון חוק השני והראשון.

בתרמודינמיקה מערכת מסתובבת וטעונה
בשווי משקל מקיימת עבור שינוי קטן
של הפרמטרים

$$(א)\quad dS = \frac{dE - \Omega dL - \Phi dQ}{T}$$

כאשר Ω הוא תדירות הזוויתית (שחייבת להיות קבועה) ו Φ הוא הפוטנציאל החשמלי שחייב גם הוא להיות קבוע.

ניקח דיפרנציאל של A:

$$(ב)\quad dA = \frac{2A}{\sqrt{\ }}dM - \frac{8\pi Q r_h}{\sqrt{\ }}dQ - \frac{8\pi L}{M\sqrt{\ }}dL$$

כאשר

$$\sqrt{\ } \equiv \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$$

מהשוואה אנו מסיקים עבור חור השחור

$$(ג)\quad \frac{dS_{BH}}{dA} = \frac{\sqrt{\ }}{2A}\frac{1}{T_{BH}} = \frac{\sqrt{\ }}{8\pi Q r_h}\frac{\Phi_{BH}}{T_{BH}} = \frac{M\sqrt{\ }}{8\pi L}\frac{\Omega_{BH}}{T_{BH}}$$

כי E הוא M וכו'.

מלבד זה אפשר לזהות מהו Φ_{BH} ו Ω_{BH}:

זהו Ω_{BH} - כל החלקיקים החופשיים הנופלים
שנופלים ומסתובבים עם אותה $d\varphi/dt$ בסוף וזו Ω_{BH}

בגלל שיש שני וקטורי קילינג
כל חלקיק חופשי יש לו השמורות

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$u_0 = u_\mu \xi^\mu \qquad u_3 = u_\mu \eta^\mu$$

~~[illegible]~~ u_3 [illegible] בקואורדינטות
בויר לינדקויסט.

$$\frac{u_3}{u_0} = \frac{g_{33} u^3 + g_{30} u^0}{g_{00} u^0 + g_{03} u^3} = \frac{g_{33} \cdot d\varphi/dt + g_{30}}{g_{00} + g_{03} \frac{d\varphi}{dt}}$$

נפתור

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \frac{1 - \frac{g_{00}}{g_{03}} \frac{u^3}{u^0}}{1 - \frac{g_{03}}{g_{33}} \frac{u^3}{u^0}}$$

כיוון שבאופק $\Delta = 0$ אז $-2Mr + Q^2 = -r_h^2 - a^2$
ולכן

$$\frac{g_{00}}{g_{03}} = \frac{a^{\cancel{2}} \cancel{\sin^2\theta}}{-\cancel{a} \cancel{\sin^2\theta} (r_h^2 + a^2)}$$

$$\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{-a \cancel{\sin^2\theta} \cancel{(r_h^2 + a^2)}}{(r_h^2 + a^2)^{\cancel{2}} \cancel{\sin^2\theta}}$$

לכן

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right)_{r \to r_h} = -\left.\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)_{r_h} = \frac{L}{M(r_h^2 + a^2)}$$

כיוון שהוא לא תלוי במקום באופק אפשר
לכנות רק Ω_{BH}

$$\Omega_{BH} = \frac{L}{M(r_h^2 + a^2)}$$

אבל אם נציב ב (7) ש

(א) $$\frac{dS_{BH}}{dA} = \frac{\sqrt{}}{2A}\frac{1}{T_{BH}} = \frac{\sqrt{}}{8\pi Q r_h}\frac{\phi_{BH}}{T_{BH}} = \frac{\sqrt{}}{2A\,T_{BH}}$$

קונסיסטנטי

יש לנו, אם כן פרדיקציה ש

(ח) $$\phi_{BH} = \frac{4\pi Q r_h}{A} = \frac{Q r_h}{r_h^2 + a^2}$$

האם זה נכון? נראה לצורך זה הפוטנציאל החשמלי שחלקיק טעון מרגיש.

$$S = \int L\,d\tau = -m\int\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}\,d\tau + e\int A_\alpha \dot{x}^\alpha\,d\tau$$

$$p_\alpha = m\frac{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta}{\underset{1=\{}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}}} + eA_\alpha$$

קיום וקטור קילינג ξ^μ אומר ש

$$p_0 = m(g_{00}\dot{x}^0 + g_{03}\dot{x}^3) + eA_0$$

שמור. אבל אם היינו הולכים למרחב זמן שטוח היינו מקבלים ש $m\dot{x}_0$ הוא - האנרגיה הקינטית + מנוחה

לכן p_0 - היא האנרגיה השמורה ומתאים לחשוב על A_0 - כפוטנציאל החשמלי.

לפי MTW בפתרון קר-ניומן

$$A_0 = -\frac{Qr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}$$

אז-אפשר-אולי-לקרב חלקיק "במנוחה" לאופק אלא

בקטורים ולכן אפשר להגדיר פוטנציאל החשמלי של החור כ

$$\Phi_{BH} = -A_0\Big|_{\substack{r=r_h \\ \theta=0,\pi}} = \frac{Q r_h}{r_h^2 + a^2}$$

שבהם לפרדוקסיה (א)

הקונסיסטנטיות של (ד) נובעת מזה

(e) $$dS_{BH} = \frac{\sqrt{\ }}{2AT_{BH}}\, dA$$

זה מראה ש

$$S_{BH} = f(A)$$

בלבד. כלומר S_{BH} תלויה בפרמטרים M, Q, L רק דרך הקומבינציה A. בנוסף רואים ש (e)

$$T_{BH} = \frac{\sqrt{\ }}{2A}\Big/ f'(A)$$

וכיצד קובעים $f(A)$? נתבונן על התהליך הרוטטורלי. מסתכלים על גאוית חלקיק בעל מסה m, תנע זוויתי L סביב הציר הסימטריה ובעל מטען e. משוואת המילטון - יעקובי הינה

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^\beta} = -\mu^2$$

ובפרט מטריקת קר-ניומן ומקבלים

$$-\frac{1}{\Delta\rho^2}\left[(r^2+a^2)\frac{\partial S}{\partial t}+a\frac{\partial S}{\partial\phi}-eQr\right]^2$$
$$+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial S}{\partial\phi}+a\sin^2\theta\frac{\partial S}{\partial t}\right]^2$$
$$+\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2=-\mu^2$$

בגלל הסימטריות אפשר לכתוב

$$S=-Et+L_z\varphi+W(r,\theta)$$

וכמו כן

$$\frac{\partial W}{\partial r}=p_r \qquad \frac{\partial W}{\partial\theta}=p_\theta$$

מציבים ומקבלים משוואה עבור E

$$\alpha E^2-2\beta E+\gamma=0$$

$$\alpha\equiv(r^2+a^2)^2-(a^2\sin^2\theta)\Delta$$
$$\beta\equiv(r^2+a^2)(aL_z+eQr)-aL_z\Delta$$
$$\gamma\equiv(aL_z+eQr)^2-(L_z^2/\sin^2\theta)\Delta-\Delta\mu^2\rho^2-\Delta^2p_r^2-\Delta p_\theta^2$$

במקום p_r נכתוב רכיב פיסיקלי P

$$P=\frac{\Delta^{1/2}}{\rho}p_r$$

ורכיב פיסיקלי Π של p_θ

$$\Pi=\frac{1}{\rho}p_\theta$$

בגלל ~~[illegible]~~ מעוניינים במשוואה בעיקר בקרבת

הצלפק. על כן נכתוב

$$r = r_h + \frac{\sqrt{}}{\rho^2}\,\ell^2$$

שמתקבלים מקרובים על

$$\int_{r_h}^{r} \sqrt{g_{rr}}\, dr = \ell$$

ℓ הינו המרחק העצמי של r מ r_h.

עכשיו פותרים עבור E:

$$E = \Omega_{BH} L_z + e\Phi_{BH} + \frac{\sqrt{}\,\ell}{r_h^2+a^2}\left[\frac{B^2}{\rho_h^2 \sin^2\theta} + \mu^2 + P^2 + \Pi^2\right]^{1/2} + O(\ell^3) \qquad (X)$$

$$B = L_z - \Omega \sin^2\theta\,(a L_z + r_h Q e)$$

נניח שהחלקיק נקלט ע"י החור. נוכל לשים $\ell=b$: b רדיוס החלקיק (לא 0 כמו אצל קריסטודולו)

בנוסחה (ח) כלומר

$$dA = \frac{2A}{\sqrt{}}\left(dM - \Omega_{BH}\, dL - \Phi_{BH}\, dQ\right)$$

נציב $dM = E \quad dL = L_z \quad dQ = e$

ומה שקיבלנו ב (X)

$$dA = 8\pi b\left[\frac{B^2}{\rho_h^2 \sin^2\theta} + \mu^2 + P^2 + \Pi^2\right]^{1/2}$$

כמו קריסטודולו נניח שקליטת החלקיק היא [illegible]

מפנה כך ש $P=0$ (רדיאלית), $\Pi=0$ (בכוון θ)

בנוסף נדרוש $B=0$ כלומר

$$\boxed{\rho_h^2 L_z = a r_h Q e \sin^2\theta_h}$$

קיבלנו 3 תנאים ל 3 דרגות חופש. אז אנו מגיעים למינימום dA

$$dA \geq 8\pi b\mu$$

הדבר המפתיע הוא שמינימום גודל השטח תלוי בתכונות החלקיק אך לא בגודל של החור.

אנו לומדים מזה ש

$$dS_{BH} \geq f'(A)\, 8\pi b\mu$$

אבל חוק השני ~~המורחב~~ המוכלל שהוא נופל להיות נכון כאן - הדרוש ש dS_{BH} יעלה על אנטרופיית החלקיק ללא קשר עם פרמטרי החור. זה אומר שאין לתת ל $f'(A)$ לקטון בלי גבול. למעשה $f(A)$ עם מינימום תוכל להתממש. כמו כן $f(A)$ שתלויה באופן ב A גדול אז ב A קטן. הפונקציה ... במחלות כל התנאים אלה הוא

מנמקי מומחים. $f(A) =$ const.

$$f(A) = \eta \frac{A}{\hbar}$$

הוא ל dS_{BH} יכולה להיות עד $\frac{8\pi\eta b\mu}{\hbar}$

זה צריך להיות אנטרופיה של מערכת שאפשר לה מקום אחר ברדיוס b ויש לה מסה μ. זה הוסף של אחד מגבלות על האנטרופיה.

נוכל לראות כי זה מסדר היחידה, כי החלקיק אלמנטרי באותה שהוא מוגבל נושא כמה יחידות של אנטרופיה. רדיוס $b = \frac{\hbar}{\mu}$ ולכן

$$\frac{8\pi\eta\cancel{\hbar}}{\cancel{\hbar}}$$

צריך להיות קרוב ליחידה.