פתרון תרגיל בית מס' 1

שאלה 1

א) על מנת לקבל את שלושת הפרמטרים P_c, V_c, T_c נדרוש:

$$(1)\ \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=T_c}=0 \qquad (2)\ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T=T_c}=0 \qquad (3)\ P_c=\frac{Nk_BT_c}{V_c-Nb_D}\exp\left[-\frac{Na_D}{Vk_BT_c}\right]$$

$$(1)\Rightarrow\ a_DN(b_DN-\cancel{V})+k_BT_cV_c^2=0\ \Rightarrow\ V_c=\frac{a_DN\pm\sqrt{a_D}N\sqrt{a_D-4b_Dk_BT_c}}{2k_BT_c}$$

אנו רוצים רק פתרון אחד עבור V_c כי מדובר בנק' הקריטית לכן נסיק:

$$\underline{\underline{T_c=\frac{a_D}{4b_Dk_B}}}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{V_c=\frac{Na_D}{2k_BT_c}=2b_DN}}$$

הצבה ב-(3) נותנת

$$P_c=\frac{a_D}{4b_D^2e^2}$$

אם מוצאים לבדוק ש-(2) מתקיים עבור הערכים הנ"ל, נגדיר פרמטרים חסרי מימד $\tilde{P}=\frac{P}{P_c}$; $\tilde{T}=\frac{T}{T_c}$; $\tilde{V}=\frac{V}{V_c}$, אז את משוואת Dieterici ניתן לרשום באופן הבא (בדקו זאת):

$$\tilde{P}\exp\left[\frac{2(1-\tilde{v}\tilde{T})}{\tilde{v}\tilde{T}}\right](2\tilde{v}-1)=\tilde{T}$$

כך שאכן חוק המצבים התואמים מתקיים עבור הגז הנתון.

נגדיר (2)

$$p = \tilde{P} - 1 = \frac{P - P_c}{P_c}$$

$$v = \tilde{V} - 1 = \frac{V - V_c}{V_c}$$

$$\varepsilon = \tilde{T} - 1 = \frac{T - T_c}{T_c}$$

אז ניתן לרשום את משוואת המצב מ-(א) באופן הבא:

$$(p+1)\exp\left[\frac{2(1-(v+1)(\varepsilon+1))}{(v+1)(\varepsilon+1)}\right]\left(2(v+1)-1\right) = \varepsilon+1$$

$$p = \frac{\varepsilon+1}{2v+1}\exp\left[\frac{2(v\varepsilon+\varepsilon+v)}{v\varepsilon+\varepsilon+v+1}\right] - 1$$

על מנת למצוא את האקספוננט הקריטי המתאים יש להציב $\varepsilon=0$:

$$p = \frac{1}{1+2v}\exp\left(\frac{2v}{v+1}\right) - 1 \simeq \left(1-2v+4v^2-8v^3+O(v^4)\right)\left(1+2v-\cancel{2v^2}+2v^3+2(\cancel{v^2}-2v^3)\right.$$

$$\left.+\frac{4v^3}{3}+O(v^4)\right) - 1 = v^3\left(2-4+\frac{4}{3}+8-8\right) + O(v^4) = -\frac{2}{3}v^3 + O(v^4)$$

לכן $\underline{\underline{\delta = 3}}$

באופן דומה נחקור את התנהגות של K_T כאשר $T \to T_c^+$ לאורך $v=0$ $(V=V_c)$ מתקיים:

$$\left(-VK_T\right)^{-1} = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{P_c}{V_c}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{P_c}{V_c}\,\frac{2\exp\left[2-\frac{2}{(1+v)(1+\varepsilon)}\right]\left(v^2+(1+v)^2\varepsilon\right)}{\left(1+3v+2v^2\right)^2}\Bigg|_{v=0}$$

$$= -\frac{P_c}{V_c}\,2\exp\left[2-\frac{2}{1+\epsilon}\right](\epsilon) \approx -\frac{2P_c}{V_c}\left(\epsilon + O(\epsilon^2)\right)$$

לכן $\underline{\underline{\gamma = 1}}$

שאלה 2

א) משוואת ון-דר-ואלס נתונה ע"י:

$$\left(P+\frac{N^2a}{V^2}\right)(V-Nb)=NT$$

לכן:

$$P=\frac{NT}{V-Nb}-\frac{N^2a}{V^2}=\frac{NT}{V}\left(\frac{1}{1-\frac{Nb}{V}}\right)-\frac{N^2a}{V^2}=\frac{NT}{V}\left(1+\frac{Nb}{V}+\left(\frac{Nb}{V}\right)^2+\dots\right)-\frac{N^2a}{V^2}$$

$$P=\frac{NT}{V}\left(1+\frac{N}{V}\left(b-\frac{a}{T}\right)+\frac{N^2}{V^2}b^2+\dots\right)$$

כך שנסיק שמקדם הויריאלי הראשון נתון ע"י:

$$B(T)=b-\frac{a}{T}$$

טמפרטורה בה הוא משנה את סימנו נתונה ע"י: $T_c=\frac{a}{b}$ ואלו הסדר המוביל בפיתוח מתאר גז אידיאלי.

ב) תרגיל זה הוא, למעשה, חישובי. על מנת לקבל את הנדרש יש להשתמש במשוואת מצב של גז ון-דר-ואלס

$$\left(P+\frac{N^2a}{V^2}\right)(V-Nb)=NT$$

ונוסחא ידועה מתרמודינמיקה:

$$C_p-C_v=-T\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}$$

(פתוח הנוסחא ראו Landau-Lifshitz "Statistical Mechanics" או כל ספר אחר, למעשה.)

אם נבצע גזירות מתאימות של משוואת המצב נציב בנוסחא הנ"ל ונסדר איברים נקבל את הדרוש.

שאלה 3

(א) פונקצית החלוקה נתונה ע"י:

$$Z=\sum_{m_1=-1}^{1}\cdots\sum_{m_N=-1}^{1}\exp\left(x\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\quad,\quad x=\frac{JH}{k_BT}=\beta JH$$

$$Z=\prod_{i=1}^{N}\underbrace{\left\{\sum_{m_i=-1}^{1}\exp(xm_i)\right\}}_{e^{-x}+1+e^{x}}=\prod_{i=1}^{N}(2\operatorname{ch}x+1)=(2\operatorname{ch}x+1)^N=\left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^N$$

(ב) מגנטיזציה ממוצעת נתונה ע"י:

$$M(T,H)=-\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T\quad;\quad F=-k_BT\ln Z=-Nk_BT\ln(2\operatorname{ch}x+1)=-Nk_BT\ln\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$M(T,H)=Nk_BT\frac{\partial}{\partial H}\ln(2\operatorname{ch}x+1)=N\cancel{k_BT}\,\frac{2\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}x+1}\,\frac{J}{\cancel{k_BT}}=NJ\,\frac{2\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}x+1}$$

אנו רואים שבהעדר שדה חיצוני $H=0$ נסיק שגם $x=0$ ולכן $M(T,0)=0$ ולכן אין טמפרטורה קריטית.

(ג) תחת ההנחה פיתוח שנעשה בסעיף הראשון של השאלה תקף אך יש לבצע החלפה

$$H\rightarrow H_{eff}$$

בפרט, לאחר החלפה זאת נקבל:

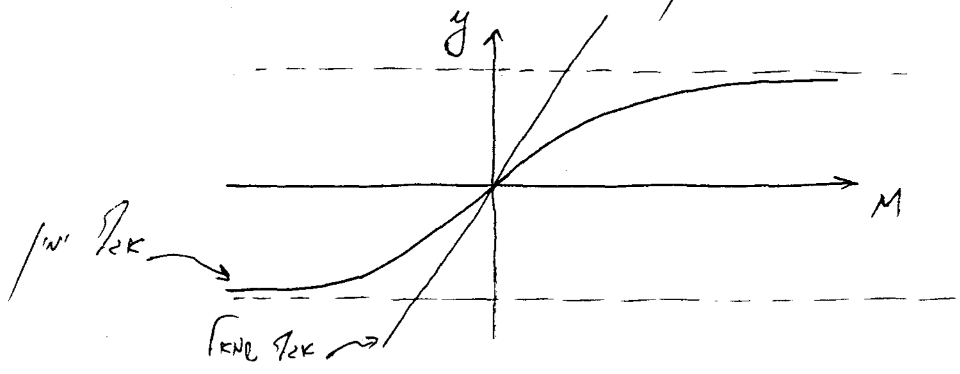
$$M=NJ\,\frac{2\operatorname{sh}\big(\beta J(H+\lambda M)\big)}{2\operatorname{ch}\big(\beta J(H+\lambda M)\big)+1}$$

זאת משוואה סתומה המגדירה את המגנטיזציה $M(T,H)$.

ג) לאחר הצבה $H=0$ נקבל:

$$(*) \quad M = NJ\frac{2sh(\beta J\lambda M)}{2ch(\beta J\lambda M)+1}$$

שתי הפונקציות המתאימות לאגף ימין ואגף שמאל מופיעות בתרשים הבא:



כפי שקל להשתכנע תמיד ישנו פתרון טריביאלי $M=0$ לכל ערך של טמפ', אבל ישנו פתרון נוסף אם השיפוע של הפונקציה המתאימה לאגף ימין גדול יותר מ-1 (שיפוע של אגף שמאל) כלומר טמפ' קריטית מוגדרת מתוך דרישה ששיפוע של אגף ימין ב-0 יהיה שווה ל-1.

נמצא שיפוע זה:

$$\frac{2sh(\alpha)}{2ch(\alpha)+1} = \frac{2(\alpha+O(\alpha^3))}{3+O(\alpha^2)} = \frac{2}{3}(\alpha+O(\alpha^3))(1+O(\alpha^2)) = \frac{2}{3}\alpha+O(\alpha^3)$$

כך שהשיפוע נתון ע"י:

$$\text{שיפוע} = NJ\frac{2}{3}\beta J\lambda$$

הטמפ' קריטית נתונה ע"י:

$$T_c = \frac{2}{3}\frac{NJ^2\lambda}{k_B} \iff \text{שיפוע} = 1$$

ה) ליד הטמפרטורה הקריטית T_c שמצאנו בשבו. חיובי אפס המגנטיזציה M קטנה, לכן אם נפתח את (*) מסעיף ב לטור נקבל:

$$M \simeq NJ\left(\frac{2}{3}\beta J\lambda M - \frac{1}{9}(\beta J\lambda M)^3\right)$$

נסמן $\sigma = \frac{M}{NJ}$ ונקבל:

$$\sigma = \frac{T_c}{T}\sigma - \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\frac{T_c}{T}\sigma\right)^3 = \frac{T_c}{T}\sigma - \frac{3}{8}\left(\frac{T_c}{T}\sigma\right)^3$$

נ"ח $T \lesssim T_c$

$$1 = \frac{T_c}{T} - \frac{3}{8}\left(\frac{T_c}{T}\right)^3\sigma^2$$

$$\sigma = \left(\frac{1-\frac{T_c}{T}}{-\frac{3}{8}\left(\frac{T_c}{T}\right)^3}\right)^{1/2} = \left(\frac{8}{3}\left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{T_c - T}{T_c}\right)^{1/2}$$

לכן $\underline{\underline{\beta = \frac{1}{2}}}$.