מכניקה סטטיסטית 1 77802 — פתרון תרגיל בית מס' 2

שאלה 1

א. עבור פרמטר $\eta_i = S_i S_{i+1}$ מתקיים:

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & S_i = S_{i+1} \\ -1, & S_i = -S_{i+1} \end{cases}$$

כך שניתן לרשום (פקטור 2 לפני כל הסכומים הוא בגלל העובדה שהיפוך של כל הספינים לא משנה ערכי η_i):

$$Z = 2\sum_{\eta_1=-1}^{1}\cdots\sum_{\eta_{M-1}=-1}^{1} e^{\beta J\sum_{i=1}^{M-1}\eta_i} = 2\left(\sum_{\eta=-1}^{1} e^{\beta J\eta}\right)^{M-1} = 2^M(\cosh\beta J)^{M-1}$$

כמובן, שהתוצאה זהה לזאת שקיבלנו בכיתה.

ב. נניח שקיימת $T_c \neq 0$, אז עבור $T<T_c$ נהפוך חצי מהשרשרת כאשר בה"כ נניח שהשרשרת הינה מגנטית וכל הספינים בה מכוונים באותו כיוון (הרי $T<T_c$) אז האנרגיה גדלה ב-$4J$, כאשר J הוא חוזק האינטראקציה בין שני ספינים שכנים. את התהליך ניתן לבצע ב-N אופנים שונים, כאשר N מס' הספינים בשרשרת, לכן השינוי באנרגיה החופשית נתון ע"י:

$$\Delta F = \Delta U - T\Delta S \sim 4J - T\ln N$$

כך שאנרגיה החופשית תקטן והמערכת אינה יציבה בפני להיפוכים מסוג זה, כלומר פאזה מסודרת עבור מערכת זאת לא קיימת.

שאלה 2

א. על סמך ההגדרה מייד נסיק:

$$Z_{N+1}(S_{N+2}) = \sum_{S_{N+1}=-1}^{1} Z_N(S_{N+1})\exp\left[\beta J S_{N+1}S_{N+2} + h\beta S_{N+2}\right]$$

ב. $1 \ll N$ מתאים לגבול תרמודינאמי בו אנרגיה חופשית אקסטנסיבית במס' החלקיקים ולכן ההבדל בין $Z_{N+1}(S_{N+2})$ ו-$Z_N(S_{N+2})$ הוא בספין אחד חופשי כך שאם f היא אנרגיה חופשית פר ספין נסיק:

$$Z_{N+1}(S_{N+2}) = e^{-\beta(N+1)f} = e^{-\beta f}e^{-\beta N f} = e^{-\beta f} Z_N(S_{N+2}) \qquad -1-$$

ג) נציב ב- א תוצאה ל סעיף ב ונקבל:

$$e^{-\beta f} Z_N(y) = \sum_{x=-1}^{1} Z_N(x)\, \exp\left[\beta J y x + \beta h y\right]$$

או בכתיב מטריצי:

$$e^{-\beta f}\begin{bmatrix} Z_N(1) \\ Z_N(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{+\beta(h-J)} \\ e^{-\beta(J+h)} & e^{\beta(J-h)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_N(1) \\ Z_N(-1)\end{bmatrix}$$

לכן פתרון לא טריויאלי קיים אם:

$$\begin{vmatrix} e^{\beta(J+h)} - e^{-\beta f} & e^{\beta(h-J)} \\ e^{-\beta(J+h)} & e^{\beta(J-h)} - e^{-\beta f}\end{vmatrix} = 0$$

$$\left(e^{\beta(J+h)} - e^{-\beta f}\right)\left(e^{\beta(J-h)} - e^{-\beta f}\right) - e^{-2\beta J} = 0$$

$$e^{-\beta f} = \frac{1}{2}\left[\, e^{\beta(J-h)} + e^{\beta(J+h)} \pm \sqrt{\underbrace{4e^{-2\beta J}}_{-4e^{2\beta J}} + 4\, e^{2\beta J} ch^2(\beta h)}\,\right].$$

$$e^{-\beta f} = e^{\beta J} ch\,\beta h \pm e^{-\beta J}\sqrt{1 + e^{4\beta J} sh^2(\beta h)}$$

נבחר סימן "+" על מנת לקבל תוצאה ל סעיף א משאלה קודמת בגבול $h \to 0$ סופית:

$$f = -\frac{1}{\beta}\ln\left[e^{\beta J} ch\,\beta h + \sqrt{1 + e^{4\beta J} sh^2(\beta h)}\ e^{-\beta J}\right]$$

ד)

$$M = -N\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_T = \frac{N}{\beta}\,\frac{e^{\beta J} sh(\beta h)\beta + \frac{1}{2}\frac{e^{4\beta J}\cdot 2 sh(\beta h) ch(\beta h)\beta}{\sqrt{1+e^{4\beta J} sh^2(\beta h)}}\, e^{-\beta J}}{e^{\beta J} ch(\beta h) + \sqrt{1+e^{4\beta J} sh^2(\beta h)}\, e^{-\beta J}}$$

$$= N\,\frac{e^{\beta J} sh(\beta h)\sqrt{1+e^{4\beta J} sh^2(\beta h)} + e^{3\beta J} sh(\beta h) ch(\beta h)}{e^{\beta J} ch(\beta h)\sqrt{1+e^{4\beta J} sh^2(\beta h)} + e^{-\beta J} + e^{3\beta J} sh^2(\beta h)}$$

שאלה 3

מתקיים:

$$\langle M\rangle = \frac{\sum_n M_n e^{-\beta E_n}}{Z}$$

כאשר: $M_n = \mu \sum_{i=1}^{N} S_i$ ואילו $E_n = -J\sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1} - HM_n$

וכל ה- S_i מקבלים ערכים מסויימים "1" או "-1".

$$\chi = \frac{\partial\langle M\rangle}{\partial H} = -\frac{\left(\sum_n M_n e^{-\beta E_n}\right)\frac{\partial Z}{\partial H}}{Z^2} + \frac{\sum_n M_n\left(-\beta\frac{\partial E_n}{\partial H}\right)e^{-\beta E_n}}{Z}$$

$$\left\{Z = \sum_n e^{-\beta E_n}\right\} \quad = -\frac{\left(\sum_n M_n e^{-\beta E_n}\right)\sum_m -\beta\frac{\partial E_m}{\partial H}e^{-\beta E_m}}{Z^2} + \beta\frac{\sum_n M_n^2 e^{-\beta E_n}}{Z}$$

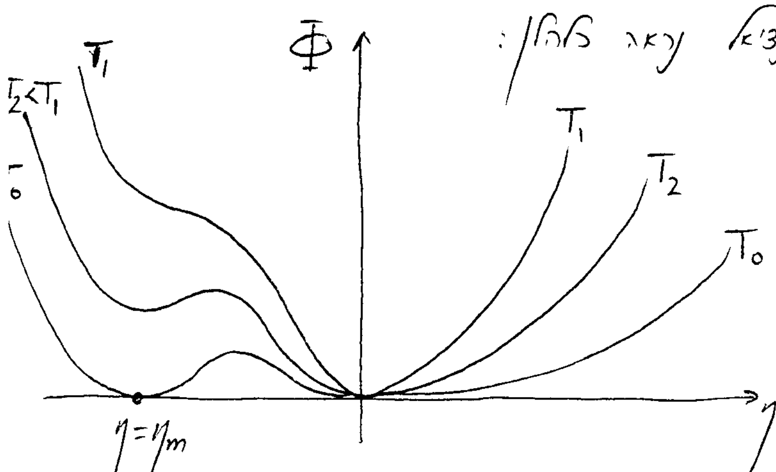
$$= \beta\left[\frac{\sum_n M_n^2 e^{-\beta E_n}}{Z} - \frac{\sum_n M_n e^{-\beta E_n}}{Z}\,\frac{\sum_m M_m e^{-\beta E_m}}{Z}\right]$$

$$= \beta\left[\langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2\right]$$

מש"ל.

שאלה 4

א + ב



בזמן שמקררים את המערכת הפוטנציאל נראה כלהלן:

לכן פרמטר הסדר η מתאפס עבור $T>T_0$, כאשר T_0 נתון

מתוך דרישה:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_m} = 0 \quad , \quad \left.\Phi\right|_{\eta=\eta_m} = 0$$

מתוך דרישה $\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = 0$, נקבל:

$$2a(T-T_c)\eta_m + 3b\eta_m^2 + 4c\eta_m^3 = 0 \Rightarrow \eta_m = \frac{-3b-\sqrt{9b^2-32a(T-T_c)c}}{8c}$$

נציב ב- Φ ונקבל:

$$0 = a(T-T_c)\eta_m^2 + b\eta_m^3 + c\eta_m^4 = \left(a(T-T_c) + b\eta_m + c\eta_m^2\right)\eta_m^2$$

$$0 = a(T-T_c) + b\,\frac{-3b-\sqrt{9b^2-32ac(T-T_c)}}{8c} + c\left(\frac{3b+\sqrt{9b^2-32ac(T-T_c)}}{8c}\right)^2$$

אחרי אלגברה מעייפת לא מעניינת ניתן לקבל:

$$T_0 = T_c + \frac{b^2}{4ac}$$

סופית:

$$\eta = \begin{cases} 0 & , T > T_0 \\ \eta_m(T) & , T < T_0 \end{cases}$$

מעבר זה הוא מסדר ראשון כמובן, כי ישנה קפיצה חדה בערך של η כאשר עוברים את טמפרטורה T_0.

ג) רואים שאם ורק אם $b=0$ נקבל $T_0=T_c$ ואילו פרמטר הסדר η משתנה באופן רציף עם טמפרטורה, כך שהמעבר יהיה מסדר שני.

שאלה 5

פתרון של השאלה הוא קצת ארוך, אבל נמצא בספרות. תוכלו למצוא פתרון מלא ומפורט היטב בספר של L. E. Reichl "A Modern Course in Statistical Physics" עמודים 128-130. ספר זה נמצא בספריה והנכם מוזמנים לעיין בו. במידה וידרש אולי להעתיק פתרון זה ולפרסמו באתר הקורס.