מכניקה סטט׳ 77802

פתרון תרגיל בית 5

1 א קיבלנו

$$(1)\quad V(t)=V_0e^{-\gamma t}+e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma t'}L(t')dt'$$

אז:

$$\langle L(t)V(t)\rangle = V_0e^{-\gamma t}\langle L(t)\rangle + e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma t'}\langle L(t)L(t')\rangle dt'$$

אם נציב $\langle L(t)\rangle=0$ וגם $\langle L(t)L(t')\rangle=\Gamma\delta(t-t')$ (קיים).

$$\langle L(t)V(t)\rangle = e^{-\gamma t}\Gamma\int_0^t e^{\gamma t'}\delta(t-t')dt' = \frac{\Gamma}{2}$$

(הפקטור 2 מופיע בגלל הצורה של "δ" וההגדרה שאינה מתבצעת רק על חצי תחום של ה- support)

זה נכון שקוראים לזה כמה "$\int_{-\infty}^0\delta(x)dx$" מוגדר היטב, אני מציע לחשוב

דבר הבא. לפי (1):

$$\langle V(t)^2\rangle = V_0^2e^{-2\gamma t}+e^{-2\gamma t}\int_0^t dt'\int_0^t dt''\, e^{\gamma(t'+t'')}\underbrace{\langle L(t')L(t'')\rangle}_{\Gamma\delta(t'-t'')}$$

$$(2)\quad \langle V^2(t)\rangle = V_0^2e^{-2\gamma t}+\frac{\Gamma}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)$$

דרך שניה אם נכפיל את המשוואה $\dot V(t)=-\gamma V+L(t)$ ב- $V(t)$ נוכל לרשום

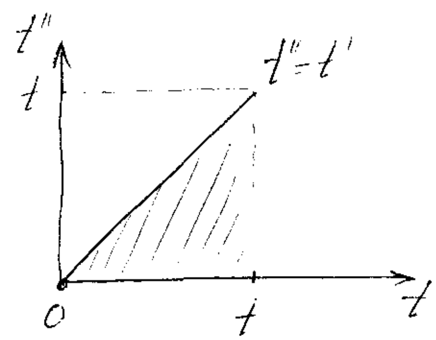
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle V^2(t)\rangle = -\gamma\langle V^2\rangle + \langle L(t)V(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \langle L(t)V(t)\rangle = \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}+\gamma\right)\langle V^2\rangle \overset{(2)}{=} \frac{\Gamma}{2}$$

(ב) מתקיים:

$$\dot{x}(t)=V(t)=V_0e^{-\gamma t}+e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma t'}L(t')dt'$$

אינטגרציה תחום:



$$x(t)=X_0+\int_0^t V_0e^{-\gamma t'}dt'+\int_0^{t}e^{-\gamma t'}\int_0^{t'}e^{\gamma t''}L(t'')dt''\,dt'$$

באינטגרל שני נבצע החלפת סדר האינטגרציות על התחום המוצג בגרפים ונקבל:

$$x(t)=X_0+\frac{V_0}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)+\int_0^t dt''\int_{t''}^{t}dt'e^{\gamma(t''-t')}L(t'')$$

$$=X_0+\frac{V_0}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)+\int_0^t dt''\,\frac{e^{-\gamma t''}-e^{-\gamma t}}{\gamma}\,e^{\gamma t''}L(t'')=X_0+\frac{V_0}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\int_0^t dt''L(t'')+$$

$$+\frac{1}{\gamma}\underbrace{\left(-V_0e^{-\gamma t}-e^{-\gamma t}\int_0^t dt''e^{\gamma t''}L(t'')\right)}_{-V(t)}=X_0+\frac{V_0}{\gamma}-\frac{V(t)}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\int_0^t dt'L(t')$$

מ.ש.ל.

(ג) תוך שימוש בביטוי שהוכחנו בסעיף הקודם וכמו כן בביטוי עבור שני המומנטים הראשונים של $L(t)$ נקבל ישירות:

$$\langle x^2(t)\rangle=\left(X_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)^2+\frac{\langle V^2(t)\rangle}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2}\int_0^t dt'\int_0^t dt''\,\Gamma\delta(t'-t'')-\frac{2}{\gamma}\left(X_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)\langle V(t)\rangle\ ..$$

$$-\frac{2}{\gamma^2}\int_0^t dt'\langle L(t')V(t)\rangle$$

נשתמש ב- (2) מסעיף (א) וכמו כן בביטוי ל- $V(t)$:

$$\langle x^2(t)\rangle = \left(x_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{V_0}{\gamma}e^{-\gamma t}\right)^2+\frac{\Gamma}{2\gamma^3}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)+\frac{\Gamma}{\gamma^2}t-\frac{2}{\gamma}\left(x_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)V_0e^{-\gamma t}$$

$$-\frac{2}{\gamma^2}e^{-\gamma t}\int_0^t\!\!\int_0^t dt''e^{\gamma t''}\underbrace{\langle L(t')L(t'')\rangle}_{\Gamma\delta(t'-t'')}dt' = \left(x_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)^2+\frac{\Gamma}{\gamma^2}t+\frac{\Gamma}{2\gamma^3}\left(1-e^{-2\gamma t}\right)-\frac{2}{\gamma}\left(x_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)V_0e^{-\gamma t}$$

$$+\left(\frac{V_0}{\gamma}e^{-\gamma t}\right)^2-\frac{2\Gamma}{\gamma^3}e^{-\gamma t}\left(e^{\gamma t}-1\right)$$

כך שבגבול $1 \ll \gamma t$, נקבל:

$$\langle x^2(t)\rangle \simeq \left(x_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)^2+\frac{\Gamma}{2\gamma^3}-\frac{2\Gamma}{\gamma^3}+\frac{\Gamma}{\gamma^2}t = \left(x_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)^2\underbrace{-\frac{3\Gamma}{2\gamma^3}+\frac{\Gamma}{\gamma^2}t}_{\left(\gamma t-\frac{3}{2}\right)\frac{\Gamma}{\gamma^3}} \simeq \left(x_0+\frac{V_0}{\gamma}\right)^2+\frac{\Gamma}{\gamma^2}t$$

0, כי $\gamma t \gg 1$

נזכיר כי $\langle x(t)\rangle \overset{\gamma t\gg 1}{=} x_0+\frac{V_0}{\gamma}$, לכן קיבלנו למעשה:

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2(t)\rangle-\langle x(t)\rangle^2=\frac{\Gamma}{\gamma^2}t$$

כלומר פלוקטואציות גדלות לינארית עם הזמן.

שאלה 2

(א) הטענה ברורה, כי חלקיק מתחיל ממקום זוגי (0) ולכל פעם מבצע צעד כך שאם מס' הצעדים/מס' פרקי זמן זוגי גם המיקום זוגי ואם מס' הצעדים/מס' פרקי זמן אי-זוגי אז המיקום אי-זוגי.

מתקיים

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, e^{-im\varphi}\left(pe^{i\varphi}+qe^{-i\varphi}\right)^n \underset{\phi=\varphi-\pi}{=} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\phi\, e^{-im(\phi+\pi)}\left(pe^{i(\phi+\pi)}+qe^{-i(\pi+\phi)}\right)^n =$$

1, כי m ו-n אחד זוגיות

$$= \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\phi\, e^{-im\phi}\, e^{-im\pi}\, e^{in\pi}\left(pe^{i\phi}+qe^{-i\phi}\underbrace{\cancel{e^{2i\pi}}}_{1}\right)^n \underset{\phi\to\varphi}{=} e^{i(n-m)\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\varphi\, e^{-im\varphi}\left(pe^{i\phi}+qe^{-i\phi}\right)^n$$

באופן דומה ניתן להוכיח $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi(\dots) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi(\dots)$ ולכן אמנם ניתן לרשום

$$P_n(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi(\dots) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi(\dots) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, e^{-im\varphi}\left(pe^{i\varphi}+qe^{-i\varphi}\right)^n$$

ד

$$\left|pe^{i\varphi}+qe^{-i\varphi}\right|^2 = \left(pe^{i\varphi}+qe^{-i\varphi}\right)\left(pe^{-i\varphi}+qe^{i\varphi}\right) = p^2+q^2+pq\left(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)$$

$$= p^2+q^2+2pq\cos(2\varphi) \le (p+q)^2 = 1$$

בזכות העובדה, בגבול $n\to\infty$ התרומה העיקרית תבוא מ- $\varphi=0$ עבורה האי שוויון הופך להיות שוויון, לכן נפתח סביב $\varphi=0$:

$$G(\varphi;n) = \left(\cos\varphi + i(p-q)\sin\varphi\right)^n \Rightarrow \ln G = n\ln\left(\cos\varphi+i(p-q)\sin\varphi\right) \simeq n\ln\left(1-\frac{\varphi^2}{2}+i(p-q)\varphi\right)$$

$$\simeq n\left(-\frac{\varphi^2}{2}+i(p-q)\varphi+\frac{(p-q)^2}{2}\varphi^2\right)$$

לכן $$G(\varphi;n) \simeq \exp\left[in(p-q)\varphi - \frac{n\varphi^2}{2}\left(1-(p-q)^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow P_n(m) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[i(n(p-q)-m)\varphi\right]\exp\left(-\frac{n\varphi^2}{2}\left(1-(p-q)^2\right)\right) d\varphi$$

ניתן להרחיב את גבולות האינטגרציה ל-$\pm\infty$ כי עיקר התרומה היא מ- $\varphi\simeq 0$ ואז נקבל אינטגרל גאוסי שקל לבצע ע"י השלמה לריבוע

כך שנקבל לאחר ~~[illegible]~~ ביצוע האינטגרציה:

$$P_n(m) = \frac{2}{\sqrt{8\pi n p q}} \exp\left(-\frac{(m-n(p-q))^2}{8npq}\right)$$

$$1=(p+q)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{2a}}$$

נציב $n=\frac{t}{\tau}$; $m=\frac{x}{\sigma}$ ונקבל:

$$P(t,x) = \frac{2}{\sqrt{8\pi pq\frac{t}{\tau}}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x}{\sigma}-\frac{t}{\tau}(p-q)\right)^2}{8pq\frac{t}{\tau}}\right)$$

נשתמש בהגדרות $V=\frac{p-q}{\tau}\sigma$; $D=2pq\frac{\sigma^2}{\tau}$ ונקבל:

$$P(t,x) = \frac{2\sigma}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}\right)$$

כמו כן יש לבדוק:

$$1 \overset{?}{=} \sum_m P_n(m) = \sum_m P_n(2m) = \sum_m \Delta m\, P_n(2m) =$$

ל- m ו- n אותה זוגיות בגלל השאלה נניח n זוגי

$$\underset{m,n\to\infty}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dm\, \frac{2\sigma}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\exp\left(-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}\right)}{\sqrt{4\pi Dt}} = 1$$

$2m\sigma = x$

$dx = 2\sigma\, dm$

סופית צפיפות ההסתברות למצוא חלקיק בנקודה x בזמן t נתונה ע"י:

$$P(t,x) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}\right)}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

ג) מה שלא אלגברי, קל לראות ש- $P(t,x)$ מקיים את המשוואה הבאה:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -V\frac{\partial P}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Rightarrow A = V;\ B = 2D$$

זאת משוואת דיפוזיה עם סחיפה.

שאלה 3

אנו צריכים לפתור

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)P\right]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}P$$

תחילה נפתור את זה במצב סטציונרי, כלומר $\frac{\partial P}{\partial t}=0$ כלומר לאחר התייצבות המערכת בזמן $(t\to\infty)$

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)P+\frac{\partial P}{\partial x}\right]$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)P+\frac{\partial P}{\partial x}=const$$

מכיוון שעבור $x\to\pm\infty$ ההסתברות וגם הנגזרת שלה מתאפסות נקבל (עבור התאפסות של P מהירות יותר מ- $1/x$)

$$const=\left(x-\frac{1}{x}\right)P+\frac{\partial P}{\partial x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

כלומר

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)P+\frac{dP}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad -\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{dP}{P}$$

אין תלות ב- t (הרי $t\to\infty$) לכן החלפנו נגזרת חלקית בנגזרת רגילה "$\frac{\partial}{\partial x}\xrightarrow[t\to\infty]{}\frac{d}{dx}$"

$$\ln P=\ln x-\frac{x^2}{2}+const$$

$$P(x,t\to\infty)=C\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

על מנת למצוא פתרון כללי ננסה פתרון מהצורה (שיטת וריאציית הפרמטרים)

$$P(x,t)=x\,e^{-A(t)\frac{x^2}{2}+B(t)}$$

$A(t)$ ו- $B(t)$ פונקציות לא ידועות של הזמן. נציב פתרון זה במשוואה המקורית

$$x\left(-\dot{A}\frac{x^2}{2}+\dot{B}\right)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x+\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+x(-Ax)\right)+2(-Ax)+x\left(-A+(-Ax)^2\right)$$

נכפיל הכל ב- x:

$$\underline{-\dot{A}\frac{x^4}{2}}+\dot{B}x^2=x^2+\cancel{1}+x^2-\cancel{1}-Ax^2(\underline{x^2}-1)-2Ax^2-Ax^2+\underline{A^2x^4}$$

המשוואות מקדמים נתונות:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\dot{A} = A^2 - A \\ \dot{B} = 2 - 2A \end{cases}$$

נפתור את המשוואה עבור A:

$$\frac{dA}{A(1-A)} = 2dt \Rightarrow 2t = \int dA\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A-1}\right) + const \Rightarrow \ln\frac{A}{A-1} = 2t + const \Rightarrow A(t) = \frac{1}{1-\tilde{C}e^{-2t}}$$

נציב בתוך המשוואה עבור $\dot{B}$ ונקבל:

$$\dot{B} = 2(1-A) = 2\frac{\tilde{C}e^{-2t}}{\tilde{C}e^{-2t}-1} \Rightarrow B(t) = const + 2\int\frac{\tilde{C}e^{-2t}}{\tilde{C}e^{-2t}-1}dt = const - \ln\left|\tilde{C}e^{-2t}-1\right|$$

נציב את התוצאות הללו במקורי ל $P(x,t)$ ונקבל:

$$P(x,t) = C\,x\,\frac{\exp\left[\frac{x^2}{2(\tilde{C}e^{-2t}-1)}\right]}{1-\tilde{C}e^{-2t}}$$

קבועים C ו- $\tilde{C}$ נקבעים מתוך תנאי התחלה של P

שאלה 4 (א) נכפיל את משוואת F-P ב- Δx ונקבל:

$$\Delta x\frac{\partial}{\partial t}P = -\Delta x\frac{\partial}{\partial x}AP + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}BP$$

נבצע אינטגרציה של x מ- $-\infty$ עד ∞ ונפעיל אינט' בחלקים

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\Delta x\rangle = \int dx\,A(x)P(x)$$

עבור Δt קטן מתוך שימוש בתנאי התחלה ניתן לרשום $P(x,t) = \delta(x-x_0) + \frac{\partial P}{\partial t}\Delta t + O(\Delta t^2)$

נציב זאת ונקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\Delta x\rangle = \int dx\,A(x)\,\delta(x-x_0) + O(\Delta t) = A(x_0) + O(\Delta t) \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} A(x_0)$$

אבל $\left.\frac{\partial}{\partial t}\langle\Delta x\rangle\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle\Delta x(t)\rangle - \langle\Delta x(t_0)\rangle}{\Delta t}$, ולכן:

$$A(x_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial}{\partial t}\langle\Delta x\rangle = \left.\frac{\partial}{\partial t}\langle\Delta x\rangle\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle\Delta x\rangle}{\Delta t}$$

באופן דומה אם נכפיל ב-$(\Delta x)^2$ את משוואת F-P ונבצע אינט' בחלקים נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle(\Delta x)^2\rangle = 2\int \Delta x A(x) P(x,t)dx + \int B(x)P(x,t)dx$$

בגבול $\Delta t \to 0$ נקבל

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle(\Delta x)^2\rangle\Big|_{t=t_0} = 2\int \underbrace{\Delta x A(x)\delta(x-x_0)}_{0}dx + \int B(x)\delta(x-x_0)dx = B(x_0)$$

ומצד שני

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle(\Delta x)^2\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle(\Delta x)^2(t)\rangle - \overbrace{\langle(\Delta x)^2(t_0)\rangle}^{0}}{\Delta t}$$

לכן

$$B(x_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle(\Delta x)^2\rangle}{\Delta t}$$

באופן דומה משלימים את שאר ההוכחה $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle(\Delta x)^\nu\rangle}{\Delta t} = 0 \quad (\nu \geq 3)$.

ב) אם P היא פונקציה סימטרית ברור ש: $\langle\Delta x\rangle = 0$ ולכן $\underline{A(x)=0}$.
כמו כן $\langle(\Delta x)^2\rangle$ לא אמור להיות תלוי בנקודת התחלה x_0, כי הבע"ה לגמרי סימטרית להזזות, ולכן $\underline{B(x) = const} = B$.

ג) נסתמך על תוצאות של שאלה 2 עבורה קבלנו שפתרון המשוואה:

$$P(x,0) = \delta(x);\quad \frac{\partial P}{\partial t} = -V\frac{\partial P}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2};$$

הינו $P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left[-\frac{(x-Vt)^2}{4Dt}\right]$ ואילו $V = \frac{p-q}{T}l$ עם סימ' מתאים

את הבע"ה למקרה שלנו (P היא פונקציה סימטרית) נדרוש $p=q \Leftrightarrow A=V=0$ ונקבל מ"כ את הפתרון:

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Bt}}\exp\left[-\frac{x^2}{2Bt}\right]$$

ומתקיים קשר בסוף הבא:

$$\frac{\langle(\Delta x)^2\rangle}{\Delta t} = B = 2D \Rightarrow D = \frac{\langle(\Delta x)^2\rangle}{2\Delta t}$$

(3) הפעם חלקיק ינוע במהירות $\vec{v} = -\frac{g}{\gamma}\hat{x}$ המתקבלת מתוך איזון כח הכובד וכח החיכוך $M\vec{g} - M\gamma\vec{v} = 0$ ולכן:

$$A(x_0) = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\Delta t} = -\frac{g}{\gamma}$$

ואילו התנאי על B נשאר ללא שינוי $B = const = 2D$, כי עדיין ישנה טמפרטורה [illegible]
לכן משוואת F-P נראית כלהלן:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{g}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

למעשה גודל $J = \frac{g}{\gamma}P + D\frac{\partial P}{\partial x}$ מייצג זרם צפיפות ההסתברות, כי את משוואת F-P ניתן לרשום כמו

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x}$$

זאת משוואת הרציפות ופירוש של J הוא זרם צפיפות ההסתברות מוצדק.
זרם זה צריך להתאפס על פני כדור הארץ, כי אין חדירה של חלקיקים אטמוספרה לתוכו.
זה מסביר את מקורו של תנאי השפה.

(4) + (5) עבור מצב סטציונרי $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$, ולכן

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{\gamma}P + D\frac{\partial P}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{g}{\gamma}P + D\frac{\partial P}{\partial x} = const \underset{\text{בגלל תנאי שפה.}}{=} 0$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{\gamma D}dx \Rightarrow P = \underbrace{const}_{\text{קבוע נירמול}} \cdot \exp\left[-\frac{g}{\gamma D}x\right]$$

ואילו מצד שני על ידי התפלגות בולצמן נוכל לרשום:

$$P(x) = const\ \exp(-\beta \underbrace{Mgx}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}})$$

מתוך השוואה, נקבל:

$$\frac{g}{\gamma D} = \beta M g \Rightarrow D \overset{(6)}{=} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2\Delta t} = \frac{KT}{\gamma M}$$