פתרון:

א. נגזור את הביטוי

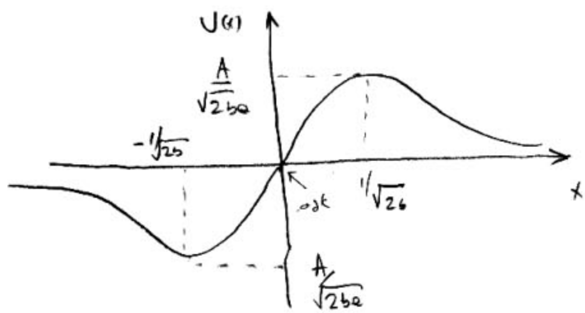
$$U(x) = xAe^{-bx^2}$$

$$\frac{dU}{dx} = Ae^{-bx^2} + xAe^{-bx^2}(-2bx) = Ae^{-bx^2}(1-2bx^2)$$

$$u' = 0 \Rightarrow 1-2bx^2 = 0 \quad x^2 = \frac{1}{2b} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2b}}$$

$$u = \pm\frac{1}{\sqrt{2b}}Ae^{-b/2b} = \pm\frac{A}{\sqrt{2be}}$$

גרפית:



ב. $x_1 = 1/\sqrt{2b}$ שיווי משקל לא יציב מכיוון שהוא מהווה שינוי הנגזרת שלילית = מקסימום.

$x_2 = -1/\sqrt{2b}$ שיווי משקל יציב, כי הנקודה מתארת מינימום.

ואם נזיז מנקודה זו ימינה או שמאלה, יהיה כוח מחזיר.

ג. ה. $x = +\infty$ אין אנרגיה פוטנציאלית.

$x_1 = 1/\sqrt{2b}$

$$E_k + 0 = u_1 + E_{k_1}$$

$$\frac{2A}{\sqrt{2be}} = \frac{A}{\sqrt{2be}} + E_{k_1} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k_1} = \frac{A}{\sqrt{2be}}$$

$$v_1^2 = \frac{2A}{m\sqrt{2be}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2A}{\sqrt{2be}}}(-\hat{x})$$

אם הגוף
ב- $+\infty$

בנקודה $x_2 = -1/\sqrt{2b}$ $E_{k_2} = \frac{3A}{\sqrt{2be}}$ (הפסד U שלו). ולכן:

$$v = \sqrt{\frac{6A}{\sqrt{2be}}}(-\hat{x})$$

ד. סביב הנקודה x_2 יכולות להיות תנודות הרמוניות, כדי לחשב את

"קבוע הקפיץ" k, נגזור את U פעמיים:

$$\frac{dU}{dx} = Ae^{-bx^2}(1-2bx^2)$$

$$k = \frac{d^2U}{dx^2} = -2bxAe^{-bx^2}(1-2bx^2) - 6bxAe^{-bx^2}$$

$$= Ae^{-bx^2}\left(-6bx + 4b^2x^3\right)$$

נציב $x = -1/\sqrt{2b}$ ונקבל:

$$k = \frac{A}{\sqrt{e}} \cdot \left(3\sqrt{2b} - \sqrt{2b}\right) = 2A\sqrt{\frac{2b}{e}}$$

תדירות התנודות:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2A\sqrt{\frac{2b}{me}}$$

<u>פתרון:</u>

א) מכיוון ומהירות החלליות קבועות:

$$X_A = v_A t_0 = 0.6ct_0$$

$$X_B = -0.8ct_0$$

ב. S' נעה במהירות $-0.8c\hat{x}$ יחסית למערכת S $\quad (u=-0.8c)$

לכן, בעזרת טרנס' של מהירות:

$$v_A' = \frac{v_A - u}{1-\frac{v_A u}{c^2}} = \frac{0.6c-(-0.8c)}{1-\frac{0.6c(-0.8c)}{c^2}} = \frac{1.4c}{1.48} \cong 0.946c$$

ג. המאורע ב-S מתרחש ב- $t=t_0$, $x=-0.8ct_0$, אז:

$$t_B' = \frac{t_0 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{t_0 - \frac{-0.8c}{c^2}(-0.8ct_0)}{\sqrt{1-0.64}} = \frac{1-0.64}{0.6} = 0.6t_0$$

ד. המאורע ב-S מתרחש ב $t=t_0$ $x=0.6ct_0$:

$$t_A' = \frac{t_0 - u/c^2 x}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{t_0 - \frac{-0.8c}{c}\cdot 0.6ct_0}{0.6} \cong 2.467t_0$$

ה. ב- $t'=0$ $x_A'=0$ המערכות התלכדו ואופסו השעונים. לכן, ברגע t_B', הקואורדינטה של חללית A במערכת S' תהיה:

$$X_A'(t_B') = v_A' \cdot t_B' = 0.946c \cdot 0.6t_0 = 0.5676\,ct_0$$

המרחק - $D' = x_A'(t_B') - \underbrace{x_B'(t_B')}_{0} = 0.5676\,ct_0$

קוא' של B ב-B = 0.

ו. באופן דומה לסעיף הקודם, מיקום החללית ברגע שפוגעות את A:

(לפי זוכה ב-B).

$$X_A'(t_A') = v_A' t_A' = 0.946 \cdot 2.467t_0$$

$$\approx 2.334\,ct_0$$

מנקודה ג' ועד הנקודה $x_B=0$, הסיגנל עובר במהירות האור.

לכן לוקח לאור, כפי שנמדד במערכת B, הזמן:

$$\Delta t'_\ell = \frac{x'_A(t'_A) - \underbrace{x'_B(t'_A)}_{\text{אפס.}}}{c} \doteq \frac{2.334\, c\, t_0}{c} = 2.334\, t_0$$

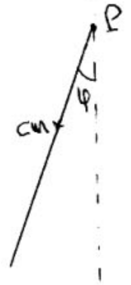
הזמן בו יקלט פולס השני במערכת B הוא לכן:

$$t'_2 = \underbrace{t'_A}_{\text{זמן פליטה (ב-B)}} + \Delta t'_\ell = 2.467\, t_0 + 2.334\, t_0 = 4.8\, t_0$$

30 נקודות

מוט הומוגני דק באורך l ובמסה m תלוי בקצהו על ציר חסר חיכוך. מסיטים את המוט בזווית קטנה φ_0 ביחס לאנך ומשחררים אותו.

1. קבלו ביטוי לזווית הסטיה מהאנך φ כפונקציה של הזמן.
2. קבלו ביטוי בקואורדינטות קוטביות לכח שפועל על הציר.



פתרון

1. המומנט סביב נקודת התליה הוא: $\frac{mgl}{2}\sin\varphi \approx \frac{1}{2}mgl\varphi$

מומנט ההתמדה סביב נקודת התליה $I=I_0+m\left(\frac{l}{2}\right)^2$

אבל $I_0=\frac{1}{12}ml^2$ ולכן $I=\frac{1}{3}ml^2$

משוואת התנועה $I\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}mgl\varphi=0$

ומכאן לתדירות הזוויתית $\omega_0=\sqrt{\frac{mgl}{2I}}=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$

וזווית הסטיה כתלות בזמן $\varphi(t)=\varphi_0\cos\omega_0 t$

2. נסמן ב-$\underline{F}$ את הכח שפועל על הציר, ולכן $-\underline{F}$ הוא הכח שמפעיל הציר על המוט. הכח הכללי שפועל על המוט הוא $-\underline{F}-mg\underline{j}$ אם נבחר את וקטור היחידה $\underline{j}$ כלפי מעלה. נסמן ב-$\underline{a}$ את התאוצה של מרכז המסה - ותנועת מרכז המסה היא בהשפעת $-\underline{F}-mg\underline{j}$, $m\underline{a}=-\underline{F}-mg\underline{j}$

ולכן $\underline{F}=-m\underline{a}-mg\underline{j}$

נסתכל על תנועת מרכז המסה בקואורדינטות קוטביות סביב נקודת התליה.

נתון $r=\frac{l}{2}=const$, ולכן $\underline{a}=\ddot{\underline{r}}=-\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\hat{\underline{r}}+\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\hat{\underline{\varphi}}$

את $\dot{\varphi}$ ואת $\ddot{\varphi}$ נקח מהפתרון למעלה:

$\ddot{\varphi}=-\omega_0^2\varphi_0\cos\omega_0 t$

$\dot{\varphi}=-\omega_0\varphi_0\sin\omega_0 t$, $\dot{\varphi}^2=\omega_0^2\varphi_0^2\sin^2\omega_0 t$

ולכן
$$\underline{F}=m\left\{\frac{l}{2}\omega_0^2\varphi_0^2\sin^2\omega_0 t\,\hat{\underline{r}}+\frac{l}{2}\omega_0^2\varphi_0\cos\omega_0 t\,\hat{\underline{\varphi}}-g\underline{j}\right\}$$

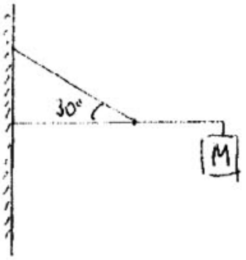
$-\underline{j}=\hat{\underline{r}}\cos\varphi-\hat{\underline{\varphi}}\sin\varphi$

כאשר נשאר רק לרשום את $\underline{j}$ בצורה

(φ חיובי ימינה מהאנך). את φ מציבים מהפתרון למעלה.

בדיקה ב-$\omega_0 t=\frac{\pi}{2}$ מראה שהכח על הציר הוא סכום המשקל והכח הצנטריפוגלי. בזמנים אחרים יש גם כח משיקי.

10 נקודות



מסה M תלויה על מוט בעל אורך l ומסה זניחה.
הנשען על קיר ונתמך באמצעות חבל
כבל היוצר זווית של 30° עם המוט,
כמתואר בציור. ~~מצא~~ חשבו:

א. את המתיחות בכבל.

ב. את הכח (גודל וכוון) שמפעיל הקיר על המוט.

פתרון

א. מאזן מומנטי סביב ביחס לנקודת המשען על הקיר:

בכוון השעון: $\cancel{\frac{Mgl}{2}}$ Mgl

נגד כוון השעון: $\frac{l}{2}T\sin30°$

ומתוך השוויון $T=\frac{2Mg}{\sin30°} = \underline{4Mg}$

ב. ס"ה הכוחות על המוט הוא אפס.

סכום הכוחות כלפי מעלה $T\sin30° - Mg = 4Mg\cdot\frac{1}{2} - Mg = Mg$

ולכן הקיר מפעיל כוח Mg כלפי מטה.

בכוון אופקי: הכח שמאלה הוא $T\cos30° = 4Mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 2Mg\sqrt{3}$

ולכן הקיר מפעיל כח $2Mg\sqrt{3}$ ימינה.

ס"ה אם נסמן $\underset{\underline{i}}{\rightarrow}$ $\uparrow\underline{j}$

הכח שהקיר מפעיל הוא $2Mg\sqrt{3}\,\underline{i} - Mg\,\underline{j}$

והגודל $\underline{\sqrt{13}\,Mg}$.

פתרון:

מומנט האינרציה של כדור (סביב מרכזו)

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

במקרה שלנו, ניתן להסתכל הבעיה כ-

$$I = \underbrace{I_1}_{\text{מומנט אינרציה של כדור מלא}} - \underbrace{I_2}_{\text{מומנט אינרציה של כדור במקום החלל}}$$

כמו כן:

$$M_1 = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$$

$$M_2 = \frac{4\pi}{3} \rho \underbrace{\left(R/2\right)}_{R_2}^3$$

$$I_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \cdot R^2 = \frac{8\pi}{15} \rho R^5$$

$$I_2 = \frac{2}{5} \cdot M_2 R_2^2 + \underbrace{M_2 \cdot R_2^2}_{\text{משטיינר.}} = \frac{7}{5} M_2 R_2^2 = \frac{7}{5} \frac{4\pi}{3} \rho \cdot \frac{R^3}{8} \frac{R^2}{4}$$

$$I_2 = \frac{7\pi}{120} \rho R^5$$

סה"כ:

$$I = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 - \frac{7\pi}{120} \rho R^5 =$$

$$= \frac{(64-7)\pi \rho R^5}{120} = \frac{57}{120} \pi \rho R^5$$

זמן מחזור תלוי רק בחצי הציר הגדול, לכן מספיק להסתכל על תנועה
במעגל. של רדיוס $\frac{r_1+r_2}{2}$

$$\frac{2Mv^2}{r_1+r_2} = \frac{4GMM_\odot}{(r_1+r_2)^2} \;;\quad v = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{(r_1+r_2)}}$$

$$T = \frac{2\pi(r_1+r_2)}{2V} = \pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{2GM_\odot}}$$

10 נקודות

דיסקה במסה M ורדיוס R מסתובבת באופן חופשי (סביב ציר אנכי שעובר במרכזה) במהירות זוויתית ω_0. זבוב בעל מסה m $(m<<M)$ מתיישב לפתע על חוד הדיסקה. צופה מרחוק מבחין בשינוי המהירות הזוויתית ומסיק שהדיסקה מתרחקת ממנו. חשבו את מהירות ההתרחקות שעל פי אפקט דופלר תגרום לאותו שינוי בתדירות שתרגה.

פתרון

התנע הזוויתי של הדיסקה $J=\frac{1}{2}MR^2\omega_0$

וזה נשמר גם לאחר שהתיישב הזבוב.

מומנט ההתמדה של הדיסקה עם הזבוב $I'=\frac{1}{2}MR^2+mR^2$

ולכן המהירות הזוויתית תקטן; $\omega'=\frac{J}{I'}=\frac{\frac{1}{2}MR^2}{\frac{1}{2}MR^2+mR^2}\omega_0$

$$\frac{\omega'}{\omega_0}=\frac{1}{1+\frac{2m}{M}}$$

על פי אפקט דופלר קלאסי יחס התדירויות $\frac{f'}{f_0}=\frac{1}{1+\frac{V}{c}}$

ולכן מהירות ההתרחקות (המקורבת) היא $\underline{\underline{V=c\frac{2m}{M}}}$

פתרון.

ב- $t=0$ אין כוחות חיצוניים ולכן משוואת התנועה בכיוון x היא:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 = \dot{m}v + m\dot{v}$$

המסה כפונקציה של הזמן על הפס היא:

$$m(t) = m_0 + \alpha t$$

ולכן:

$$\dot{m}(t) = \alpha$$

משוואת התנועה תהיה:

$$\alpha \; v = -(m_0 + \alpha t)\,\dot{v}$$

כלומר:

$$\frac{\dot{v}}{v} = -\frac{\alpha}{m_0 + \alpha t}$$

ובעזרת אינטגרציה:

$$\ln v = -\ln(m_0 + \alpha t) + c$$

ב- $t=0$ נקבל:

$$\ln v_0 = -\ln(m_0) + c$$

ולכן:

$$\ln v/v_0 = -\ln(m_0 + \alpha t) + \ln(m_0)$$

או:

$$v = v_0 \; \frac{m_0}{m_0 + \alpha t}$$

דרך קצרה יותר: שימור תנע - החול הנופל אינו מוסיף תנע. לכן, התנע ההתחלתי מתחלק על מסה גדולה יותר.

$$P = \text{const} = m_0 v_0 = (m_0 + \alpha t)\,v$$

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \alpha t}$$