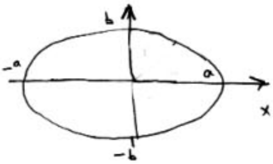
דוגמא:

נתון הכח $\vec{F}=(2x+3y)\hat{x}+(4y-3x)\hat{y}$. למה שווה העבודה לאורך המסלול הסגור

המתואר ע"י האליפסה:



פתרון: האם הכח משמר?

נחשב את רכיב $\hat{z}$ של הרוטור: $\vec{\nabla}\times\vec{F}$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y} = -3-3 = -6 \neq 0$$

הכח אינו משמר ולכן: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$ .. נחשב את האינטגרל במפורש לכן.

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy = (2x+3y)\,dx + (4y-3x)\,dy$$

נתאר את המסלול בעזרת הזוית θ

$$x = a\cos\theta \qquad y = b\sin\theta$$

$$dx = -a\sin\theta\, d\theta \qquad dy = b\cos\theta\, d\theta$$

המסלול מתואר ע"י $\theta = 0 \to 2\pi$. העבודה היא לכן:

$$W = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\Big[(2a\cos\theta+3b\sin\theta)(-a\sin\theta)+(4b\sin\theta-3a\cos\theta)\,b\cos\theta\Big]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\underbrace{(a^2-2b^2)\sin(2\theta)}_{\text{אינטגרל מתאפס!}}-3ab\Big)\,d\theta = -6\pi ab \neq 0$$

דוגמא לכח משמר - כח מרכזי

כח מרכזי היא כח בעל כיוון רדיאלי בלבד וגודלו תלוי ברדיוס בלבד.

פיזיינו, ניתן לכתוב את הכח כ-

$$\vec{F}=f(r)\hat{r}$$

נראה כי הוא כח משמר. דרך אחת היא לכתוב את הרוטור בקואורדינטות ספריות, אולם אנו לא יודעים לעשות זאת עדיין! אז נכתוב את הכח בקואורדינטות קרטזיות ונפעיל את הרוטור עליו.

ראשית, הוקטור $\hat{r}$ למה הוא שווה?

$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{|\vec{r}|}=\frac{x}{|\vec{r}|}\hat{x}+\frac{y}{|\vec{r}|}\hat{y}+\frac{z}{|\vec{r}|}\hat{z}$$

לכן:

$$\vec{F}=\frac{f(r)x}{|\vec{r}|}\hat{x}+\frac{f(r)y}{|\vec{r}|}\hat{y}+\frac{f(r)z}{|\vec{r}|}\hat{z}=g(r)x\hat{x}+\underbrace{g(r)y}_{F_y}\hat{y}+\underbrace{g(r)z}_{F_z}\hat{z}$$

נגדיר לשם נוחות: $g(r)=\frac{f(r)}{r}$

למה שווה רכיב $\hat{x}$ של הרוטור?

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial(g(r)z)}{\partial y}-\frac{\partial(g(r)y)}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial(g(r))}{\partial y}z-\frac{\partial(g(r))}{\partial z}y=\underbrace{\frac{dg(r)}{dr}}_{\equiv g'(r)}\frac{\partial r}{\partial y}z-\frac{dg(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}y=$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$=g'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot z-g'(r)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}y=0$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

בדרך דומה, מתאפסים רכיבי $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$ של $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

היות ו- $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ ניתן לכתוב את $\vec{F}$ בעזרת גרדיאנט של פוטנציאל:

$\vec{F}=-\nabla U$, U הוא הפוטנציאל וניתן להראות שהוא יהיה תלוי רק ברדיוס r:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U(r)=-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{x}-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{y}-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{z}$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$=-\frac{dU}{dr}\frac{x}{r}\hat{x}-\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}\hat{y}-\frac{dU}{dr}\frac{z}{r}\hat{z}$$

$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{\ }}=\frac{y}{r}$

מהשוואה לביטוי עבור $\vec{F}$ למעלה רואים: $f(r)=-\frac{dU}{dr}$

כלומר:

$$U(r)\Longleftrightarrow\vec{F}=f(r)\hat{r}=-\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

חוק הכבידה של ניוטון

* כח הכבידה הפועל בין שני גופים פרופורציוני ישר למסותיהם M_1 ו-M_2 ופרופורציוני הפוך למרחק בין שני הגופים:

$$\vec{F} = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{r}$$

G - קבוע הגרביטציה:

$$G = 6.67\times10^{-8}\ dyn\cdot cm^2\, gr^{-2} = 6.67\times10^{-11}\ N\cdot m^2\, kg^{-2}$$

אני הנחנו שהמסות נקודתיות. למעשה אם המסה אינה נקודתית, יש לבצע אינטגרל מורכב הסוכם את הכח מכל אלמנט במסה. ניתן להראות כי אם נמצאים מחוץ למסה בעלת סימטריה כדורית - ניתן להניח כי כל המסה מרוכזת בנקודה במרכז הכדור.

לעומת זאת, אם נמצאים בתוך מסה בעלת סימטריה כדורית, כי אז ניתן לתאר את המסה המושכת כמסה נקודתית עם מסה ששווה לחלק מהמסה הכדורית הנמצא ברדיוס קטן יותר מ-M_2:

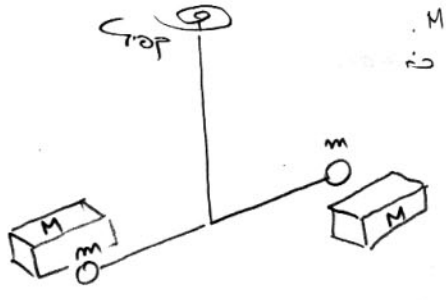
את התוצאה הנ"ל ניתן לקבל בעזרת חוק גאוס אותו נלמד בהמשך הסמסטר.

הקשר בין g ל-G:

$$\vec{F} = -mg\vec{r} = -\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus^2}\hat{r} \Rightarrow g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$$

ניוטון לא ידע את G, רק את $M_\oplus G$. כיצד מצאו את G עצמו?

את G ניתן למצוא בעזרת ניסוי שנעשה לראשונה ע"י קוונדיש:



המסות m נמשכות ל-M. כח המשיכה מנוגד ע"י כח ה"פיתול" של הקפיץ. מצב שיווי המשקל תלוי במסות, בקפיץ וב-G.

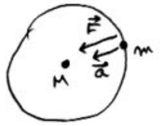
עקרון האקוויולנטיות:

המסה המופיעה ב- $F=\frac{GM_2M_1}{r^2}$ והמסה המופיעה ב- $\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})$
הן אותן המסות. גרוש אין סיבה להניח כי המסה ה"אינרציאלית" המופיעה בחוק ה-II
תהיה זהה למסה המופיעה בחוק הכבידה (למשל, המטען החשמלי אינו זהה
למסה של גוף). השיוויון בין המסות נקרא עיקרון האקוויולנטיות. כיום ידוע
שהוא מתקיים לפחות עד כדי 5×10^{-13}.

מסלול מעגלי של לוויין:

$\vec{a}=-\omega r^2\hat{r}$

במסלול מעגלי ($\dot{\theta}=\omega=const$) מצב אחד:



כדי לשמור על תאוצה זו, יש להשתמש בכ"ח, במקרה שלנו
(של לוויין) זהו כח הכבידה:

$$\vec{F}=-\frac{GM_\oplus m}{r^2}\hat{r}$$

לכן:

$$\frac{GM_\oplus m}{r^2}=m\omega^2 r$$

ומכאן: $r^3=\frac{GM_\oplus}{\omega^2}$ או $\omega=\sqrt{\frac{GM_\oplus}{r^3}}$, $v=r\omega=\sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}$

נניח שאני רוצה לוויין עם מחזור של 24h (כלומר, לוויין גיאוסינכרוני, השומר
מקום מעל נקודה קבועה על פני כדור הארץ). $\omega=\frac{2\pi}{P}$

$$r^3=\frac{GM_\oplus P^2}{(2\pi)^2}=\frac{6.67\times10^{-8}dyn\cdot cm^2\, gr^{-2}(5.98\times10^{27}gr)(24\cdot3600)^2s^2}{(2\pi)^2}$$

$r=4.2\times10^9 m=4.2\times10^4 km$

הלא ו- $r_\oplus$ הוא כ- 6400 ק"מ, מכאן יש רדיוס הגדול פי 6.6.
דרך אחרת לחשב, ללא ידיעת G:

ללא ידיעת G, נכתוב בעזרת g :

$$r^3 = \frac{GM_\oplus P^2}{(2\pi)^2}$$

נחלק ב- $R_\oplus^3$:

$$\left(\frac{r}{R_\oplus}\right)^3 = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}\cdot\frac{P^2}{(2\pi)^2 R_\oplus} = \frac{g P^2}{R_\oplus (2\pi)^2} =$$

$$= \frac{980\ \frac{cm}{sec^2}\cdot(24\cdot 3600\ sec)^2}{6.4\times10^8\ cm} = \ ,$$

מהירות בריחה :

כדי לחשב את מהירות הבריחה, נשתמש באנרגיות. נגדיר אנרגיה פוטנציאלית. לשם נוחות, נגדיר את נקודת האפס ב- $r=\infty$. לכן:

$$U(r) = -\int_{r=\infty}^{r} F\,dr = -\int_{r=\infty}^{r}(-)\frac{GM_1M_2}{r^2}\,dr = -\frac{GM_1M_2}{r}$$

הגדרה

כי פונה
פנימה

האנרגיה הקינטית על פני כוכב הלכת + אנרגיה פוטנציאלית שווה לאנרגיה קינטית מינימלית ב- $r=\infty$ + אנרגיה פוטנציאלית ב- $r=\infty$. האנרגיה הקינטית המינימלית היא 0 (גם אנרגיה התחלתית גדולה יותר תתן מהירות סופית ב- $r=\infty$):

$$\Delta(E+U)=0$$

$$\hookrightarrow\ \frac{1}{2}mv_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2}_{=0} + \left(-\frac{GM_\oplus m}{r_0} + \frac{GM_\oplus m}{r_\infty}\right) = 0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{r_0}}$$

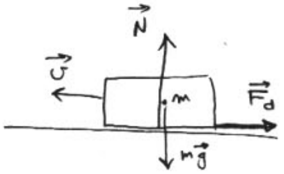
מהירות הבריחה גדולה בפקטור $\sqrt{2}$ מהמהירות הדרושה לתנועה מעגלית באותו הרדיוס.

7.11.04

חיכוך מגע

אחד מהכוחות הנפוצים ביותר בחיי היום יום הוא כח החיכוך מגע בין שני משטחים.
מבדילים בין הכח המתקבל כאשר יש תנועה יחסית בין המשטחים וכאשר אין תנועה יחסית.

* כשיש תנועה: כח החיכוך מנוגד לתנועה (ניסיונית, נמצא כי הוא יחסי ל-N, לכח הנורמלי המפעילים המשטחים זה על זה.



כ.ו. כח החיכוך F_d אינו תלוי בגודל המהירות ואינו תלוי בשטח המגע בין המשטחים.

ניתן לכתוב:

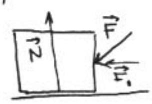
$$F_d = \mu_k N$$

μ_k הוא מקדם החיכוך הקינמטי (שיש תנועה).

* כשאין תנועה: כח החיכוך מבטל את הרכיב האופקי של הכוחות הנוספים הפועלים על המסה m כל עוד הם קטנים מ-

$$F_d < \mu_s N$$

כאשר μ_s הוא מקדם החיכוך הסטטי. דהיינו, אם מפעילים כח $\vec{F}$ על המסה



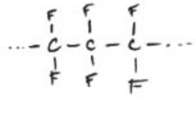
היא תשאר במנוחה כל עוד הרכיב $\vec{F}_\parallel$ המקביל למשטח (וניצב ל-$\vec{N}$)
מקיים: תנאי להשאר במנוחה $\iff |F_\parallel| < \mu_s N$

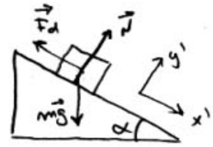
ברגע שהגוף יתחיל לנוע, כח החיכוך יקטן מ- $\mu_s N$ ל- $\mu_k N$ כי $\mu_k \le \mu_s$.

חשוב לציין שהביטויים לכח החיכוך הם אימפיריים (קירוב לתוצאות ניסיוניות) ולא מבוססים על תאוריה כזו או אחרת. מה גם שישנם מקרים בהם התאור הנ"ל אינו מתקיים וגם אם כן מתאים, לא מדויק, בייחוד בגבול בין גוף נח לגוף נע.

מקדמי חיכוך אופייניים:

μ_s	μ_k	
0.79	0.57	פלדה על פלדה
0.25-0.5	0.2	עץ על עץ
0.94	0.4	זכוכית על זכוכית
0.1	0.04	עץ עם שעווה על קרח (ללא מים - "שלג יבש")
0.14	0.1	על "שלג רטוב"
0.1	0.03	קרח על קרח (מגע -4°C)
0.04	0.04	טפלון על טפלון





זווית הטייה מקסימלית:

מסה נמצאת על מישור משופע בזווית α, מה הזווית המקסימלית α שמעליה המסה תחליק?

<u>פתרון</u>
כשהמסה במנוחה, סכום הכוחות מתאפס $\sum \vec F_i = 0$. הכוחות מתוארים בציור: $\vec N$, $m\vec g$ ו-$\vec F_d$.

בכיוון y': $\quad y': \; N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$

ובכיוון x': $\quad x': \; mg\sin\alpha - F_d = 0 \Rightarrow F_d = mg\sin\alpha$

התנאי הסטטיות: $\quad F_d \le \mu_s N$

נציב את F_d ו- N: $\quad mg\sin\alpha \le \mu_s mg\cos\alpha$

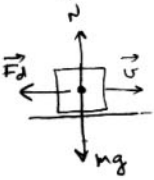
(חלוקה ב- $\cos\alpha$): $\quad tg\,\alpha \le \mu_s$

זהו התנאי על הזווית כדי שהמסה לא תחליק במדרון.

<u>מרחק עצירה</u>:

* מסה נעה על משטח במהירות התחלתית v_0 עד איזה מרחק יכולה להגיע?
* מהו ההספק (האנרגיה ליח' זמן) שיש להשקיע על מנת שהמסה תמשיך לנוע במהירות קבועה v_0?

<u>פתרון</u>:



דרך I: בעזרת כוחות: (והחוק השני).

בציר y: $\quad -mg + N = 0 \rightarrow N = mg$

בציר x: $\quad \sum F_x = m\ddot x$

$$-\mu_k N = m\ddot x$$

ע.כ

$$\ddot x = -\frac{\mu_k N}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g$$

אינטגרלה:

$$\dot x = \dot x_0 + \int_{t=0}^{t} -\mu_k g\, dt = \underbrace{\dot x_0}_{v_0} - \mu_k g t$$

ופעם נוספת:

$$x = x_0 + \int_{t=0}^{t} (\dot x_0 - \mu_k g t)\, dt =$$

$$= x_0 - \dot x_0 t - \frac{1}{2}\mu_k g t^2$$

נקודת עצירה מתקבלת ב- $\dot x = 0$ או:

$$\dot x_0 - \mu_k g t\Big|_{stop} = 0 \Rightarrow t_{stop} = \frac{\dot x_0}{\mu_k g}$$

7.11.04

מרחק העצירה:

$$x\Big|_{t=t_{stop}} - x_0 = \dot{x}_0 t_{stop} - \frac{1}{2}\mu_k g t_{stop}^2 =$$

$$= \dot{x}_0 \frac{\dot{x}_0}{\mu_k g} - \frac{1}{2}\mu_k g\left(\frac{\dot{x}_0}{\mu_k g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}_0^2}{\mu_k g}$$

* שמירת אנרגיה: הכח אינו משמר ולכן יש לרשום:

$\Delta E = W$

מהי העבודה אותה עושה כח החיכוך?

$$W = \int_{x=x_0}^{x=x_{stop}} \vec{F}\cdot d\vec{x} =$$

$$= \vec{F}\cdot\int_{x=x_0}^{x=x_{stop}} d\vec{x} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x} = -F_d\,\Delta x =$$

$$= -\mu_k m g\,\Delta x$$

(כיוון והכח קבוע)

כח החיכוך בכיוון מנוגד לתנועה!

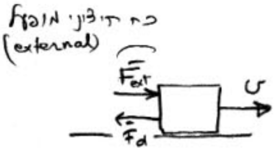
מהו שינוי האנרגיה?

$$\Delta E = \underset{\text{סופי}}{E_f} - \underset{\text{התחלתי}}{E_i} = 0 - \frac{1}{2}m v_0^2 = -\frac{1}{2}m v_0^2$$

מהירות סופית=0

לכן:

$$\Delta E = W \Rightarrow -\frac{1}{2}m v_0^2 = -\mu_k m g\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu_k g}$$



* מהו ההספק הדרוש על מנת לשמור על v_0?

אם המסה נעה במהירות קבועה, סכום הכוחות מתאפס:

כלומר, יש להפעיל כח הפוך לכח החיכוך:

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_d \qquad F_{ext} = \mu_k m g$$

אם הגוף נע מרחק a Δx, העבודה להזיז אותו, a הכח F_{ext} הינו:

$$\Delta W = F_{ext}\,\Delta x$$

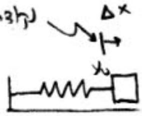
אם אני עושים זאת ביחידת זמן Δt:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = F_{ext}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

עבור $\Delta \to d$ (בקירוב הרגעי):

$$\underbrace{P}_{\text{הספק}} \equiv \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\text{אנרגיה ליחי' זמן}} = F_{ext}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_0} = F_{ext}v_0 = \mu_k m g v_0$$

קפיץ ופוטנציאל הרמוני:



קפיץ מאופיין ע"י כח יחסי להסטה משיווי משקל:

$$\vec{F} = -\underbrace{k}_{\text{קבוע הקפיץ}}(x-x_0) = -k\Delta x$$

הפוטנציאל הקשור לכח:

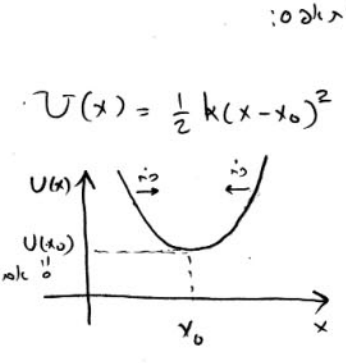
$$U = -\int_{x_1}^{x} F\,dx = -\int_{x_1}^{x} -k(x-x_0)\,dx$$

(x_1 נקודת היחוס של הפוטנציאל)

$$= \frac{1}{2}k(x-x_0)^2\Big|_{x_1}^{x} = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2$$

אנו רואים כי כדאי לנו להגדיר את נקודת היחוס של הפוטנציאל בנקודת שיווי משקל ($x_1=x_0$) כי אז האיבר השני, שהוא קבוע, יתאפס:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$



נקודות בהן נגזרת הפוטנציאל (או הגרדיאנט ב- 3D) מתאפסת, נקראות נקודת שיווי משקל כי שם אין כח.

אם הנגזרת השניה >0, השיווי משקל יציב.

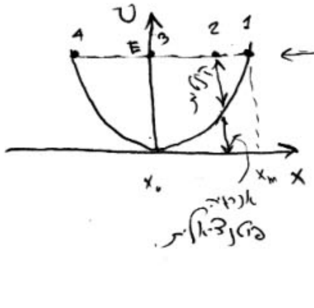
(אם נזיז את החלקיק – הוא ירצה לחזור).

אם הנגזרת השניה <0, השיווי משקל אינו יציב - הפרעה קטנה והחלקיק ירגיש כח שרוצה להרחיק אותו מנקודת שיווי המשקל.

במקרה והנגזרת השניה מתאפסת, נקודת שיווי המשקל "אדישה".

<u>שימור אנרגיה</u>: ניתן להסתכל על הגרף של האנרגיות ולהבין את תנועת החלקיק.

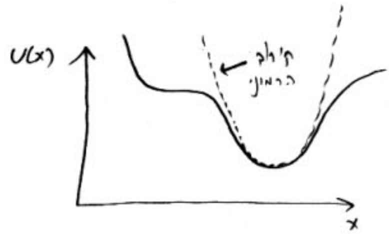
כשהחלקיק בנקודה 1 כל האנרגיה היא פוטנציאלית. החלקיק מרגיש כח משיכה ל-x_0 (מינוס נגזרת של U!). בנקודה 2, חלק מהאנרגיה הפוטנציאלית הפכה לאנרגיה קינטית. בנקודה 3, כל האנרגיה כבר היא אנרגיה קינטית. ב- 4 הפכה חזרה לפוטנציאלית.



$$\frac{1}{2}kx_m^2 \to \frac{1}{2}mv^2 \to \frac{1}{2}kx_m^2 \to \dots$$

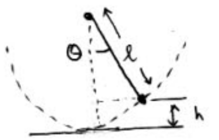
פוטנציאל הרמוני ("קפיץ") - קירוב למינימום של פוטנציאל.

הפוטנציאל ההרמוני "של קפיץ" מופיע בכל מקרה שרוצים לקרב מינימום של הפוטנציאל ע"י פרבולה:



פוטנציאל שנראה כמו $U(x)=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ נקרא פוטנציאל הרמוני. כל תלות אחרת - הפוטנציאל נקרא אנהרמוני.

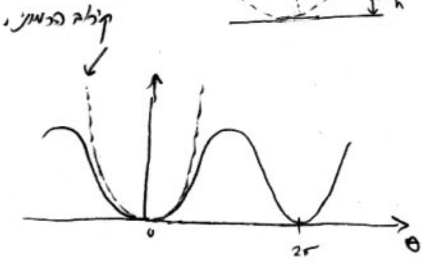
דוגמא: מטוטלת מתמטית (מסה נקודתית) על חוט חסר מסה. הגובה h הוא:



$$h = l(1-\cos\theta)$$

לכן האנרגיה הפוטנציאלית היא:

$$U(\theta)= mgl(1-\cos\theta)$$



זהו לא פוטנציאל הרמוני: מהו הקירוב ההרמוני של הפוטנציאל?

אנו רוצים לקרב את $1-\cos\theta$ כפונקציה ריבועית של θ.

דרך I: נשתמש בטור טיילור (עוד מעט במתמ"ט):

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=x_0}+\dots$$

$$(1-\cos x) = 0 + \underbrace{0}_{} + \frac{\cos\theta}{2}\Big|_{x=x_0}(\theta-\underbrace{\theta_0}_{0})^2 = \frac{\theta^2}{2}$$

מסביב ל- $x=0$ מקבלים

שהנגזרת הראשונה מתאפסת

דרך II: בלי טיילור: $\sin x \approx x \quad x \ll 1$

$$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\theta^2$$

לכן בקירוב של זוויות קטנות, המטוטלת מתנהגת כמו פוטנציאל הרמוני (כמו קפיץ). רק עושים זאת בבעיה — מפתחים לתזוזות קטנות ומקבלים פוטנציאלים הרמוניים.

חזרה לשימור תנע

ראינו כי אם לא פועל כוח על אוסף של מסות נקודתיות, אזי התנע הכולל נשמר.

מה קורה כאשר פועל כוח חיצוני:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{TOT}) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}}_{\text{ראינו שאיבר זה מתאפס מהחוק השלישי.}} + \sum_{i=1}^{N}\underbrace{F_{i,ext}}_{\text{הכוח החיצוני הפועל על } i} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,ext} = \underbrace{\vec{F}_{ext,tot}}_{\text{הכוח החיצוני הכולל.}}$$

ז.א. השינוי בתנע הכולל של המערכת בזמן שווה לכוח הכולל שפועל על המערכת:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\right) = \vec{F}_{ext,tot} \qquad \text{(במסות } m_i \text{ קבועות).}$$

מערכת מרכז המסה.

הביטוי האחרון מרמז שניתן להגדיר את הגודל השימושי הבא:

$$\underbrace{\vec{R}_{CM}}_{\text{וקטור מרכז המסה}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

(center of mass)

כי אז:

$$M\ddot{R}_{CM} = M\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \underset{\text{ממשוואה}}{=} \vec{F}_{ext,tot} \qquad \text{(מסות קבועות!)}$$

כלומר: אוסף חלקיקים מתנהג כמו חלקיק נקודתי הנמצא במרכז המסה ועליו פועל כוח חיצוני $\vec{F}_{ext}$ השווה לסכום הכוחות על החלקיקים המרכיבים את המערכת.

שימושים של תנע

* התנגשויות של שני חלקיקים: נסתכל על התנגשויות. לפני ואחרי ההתנגשות התנע נשמר:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

המשוואה הנ"ל אינה מאפשרת פתרון יחיד עבור $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$. המשוואה היא וקטורית
לכן נותנת 3 רכיבים בעוד שיש 6 רכיבים של שני וקטורי $\vec{v}'$ אותם אנו רוצים
למצוא. יש להשתמש במשוואה \ משוואות נוספות.

* למשל, ניתן להניח שהגופים נדבקו זה לזה אחרי ההתנגשות (כמו גושי פלסטלינה).
לסוג זה של התנגשות קוראים התנגשות פלסטית, והמשוואה הנוספת:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_2' \left(= \vec{v}'\right)$$

ואז:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}'$$

כלומר:

$$\vec{v}' = \underbrace{\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}}_{} = \vec{V}_{CM}$$

מהירות מרכז המסה לפני ההתנגשות:
כי $V_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i\dot{\vec{r}}_i$

כלומר, מרכז המסה של המערכת נע והמשיך לנוע באותה המהירות אחרי ההתנגשות.
אולם זה ברור כי $\vec{F}_{ext}=0$ כאן!

* ניתן להניח גם כי האנרגיה הקינטית נשמרת ← "התנגשות אלסטית":

ואז יש:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

עדיין אין לנו מספיק משוואות כדי לדעת את $\vec{v}_1'$ ו- $\vec{v}_2'$, כי זו משוואה
סקלרית, ולכן נותנת רק עוד רכיב אחד:

משימור אנרגיה

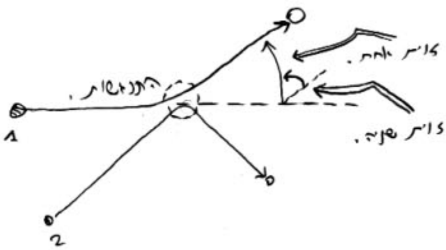
$$4 = 1 + 3$$

סה"כ רכיבים ידועים

משימור תנע.

צריך עוד שניים!

שני הרכיבים הנוספים ניתנים, למשל, אם אומרים לי את זוית הפיזור.

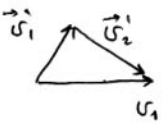


היות וכיוון המרחב מאופיין ע"י שתי זויות, ינתנו לנו עוד שתי משוואות.

דוגמא:

נסתכל על התנגשות בין שני חלקיקים בעלי אותה מסה, כאשר אחד מתחיל ממנוחה.
מה ניתן לומר על המהירות לאחר ההתנגשות?

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + \underbrace{0}_{\text{חלקיק 2 במנוחה לפני}} = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$



לכן: $m_1 = m_2$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

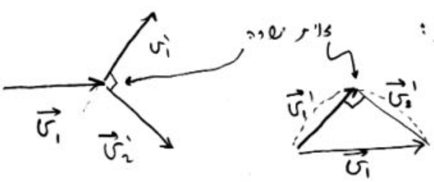
נניח כעת כי ההתנגשות גם אלסטית:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

משוויון מסות:

$$\vec{v}^{\,2} = \vec{v}_1'^{\,2} + \vec{v}_2'^{\,2}$$

הלא זהו משפט פיתגורס עבור משולש ישר זוית:



גרפית מתקיים:

הזוית פיזור בין $\vec{v}_1'$ ל- $\vec{v}_2'$ היא 90°.

דוגמא נוספת: התנגשות חד מימדית

אם המערכת חד מימדית יהיו לנו שני נעלמים v_1' ו- v_2' ושתי משוואות - תנע ואנרגיה.

נסתכל על מסה m_2 במנוחה לפני ההתנגשות (אולם הפעם $m_1 \neq m_2$).

בהתנגשות פלסטית:

$$\left(v'\right) = \underbrace{\frac{m_1}{m_1+m_2}}_{\text{נ.ב.}} v_1$$

שתי המהירות אחרי ההתנגשות.

האנרגיה הקינטית אחרי ההתנגשות:

$$E_k' \equiv K' = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2 =$$

$$= \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\cdot\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)K$$

(אנרגיה קינטית לפני התנגשות)

כלומר, $K' < K$ ← הרבה לאיבוד אנרגיה קינטית בתהליך הדבקות המסות.

(היא הפכה לחום בתוך הגופים).

<u>מה קורה בהתנגשות אלסטית?</u>

כשיש שימור אנרגיה:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

מהמשוואה הראשונה:

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2'$$

נציב במשוואה לשימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2' \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - m_1 v_1 \frac{m_2}{m_1} v_2' + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 v_2'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

נחלק ב- v_2' ונעביר את v_1 לצד השני:

$$v_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) v_2' \implies v_2' = \frac{2 v_1}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}$$

והאנרגיה הקינטית של חלקיק 2:

$$K_2' = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{4 v_1^2}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^2} = \frac{4 \frac{m_2}{m_1}}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{K_1}$$

נסתכל מה קורה במספר מקרים:

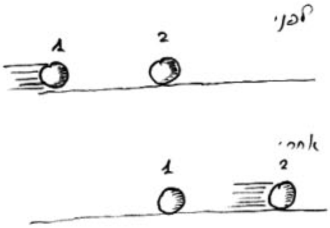
<u>$m_1 = m_2$</u> במקרה כזה $K_2' = K_1$ וכן:

$$K_1' = \overbrace{K_1}^{\text{אנרגיה התחלתית}} - K_2' = 0$$

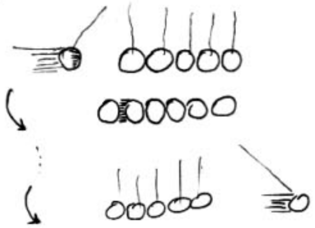
ז.א. החלקיק הפוגע נעצר!

לפני

אחרי



זה גם מסביר את המשחק המשרדי של מסות תלויות



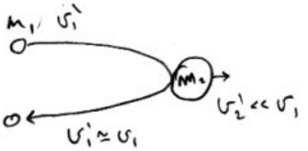
כל מסה מתנגשת עם המסה שלידה ומעבירה לה את התנע.

נסתכל בגבול $m_1 \ll m_2$:

$$v_2 = \frac{2v_1}{\left(1+\underbrace{\frac{m_2}{m_1}}_{\text{הרבה יותר גדול מ-1}}\right)} \simeq \underbrace{2\frac{m_1}{m_2}v_1 \ll v_1}_{\text{החלקיק הנפגע } m_2 \text{ כמעט לא יזוז!}}$$

השינוי באנרגיה הקינטית של חלקיק 2:

$$K_2' = \frac{4\frac{m_2}{m_1}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2}K_1 \simeq \frac{4\frac{m_2}{m_1}}{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}K_1 = \underbrace{4\left(\frac{m_1}{m_2}\right)K_1}_{\text{מעט אנרגיה עוברת ל-} m_2}$$



נסתכל בגבול $m_2 \ll m_1$:

הפעם המהירות של v_2 גדולה פי שניים מ-v_1.

$$v_2 = \frac{2v_1}{1+\frac{m_2}{m_1}} \simeq 2v_1$$

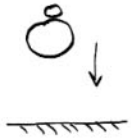
אבל האנרגיה עדיין קטנה מאוד.

$$K_2' = \frac{4\frac{m_2}{m_1}}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2}K_1 \approx 4\frac{m_2}{m_1}K_1$$

מסקנה - כדי שחלקיקים יוכלו להעביר אנרגיה זה מזה באפקטיביות, בהתנגשות על המסה שלהם להיות קרובה. (כשאלקטרון מתנגש בפרוטון יש העברת אנרגיה קטנה מאוד מהפרוטון).

10.11.04

כעת ניתן להבין גם את הדגמת שני הכדורים:

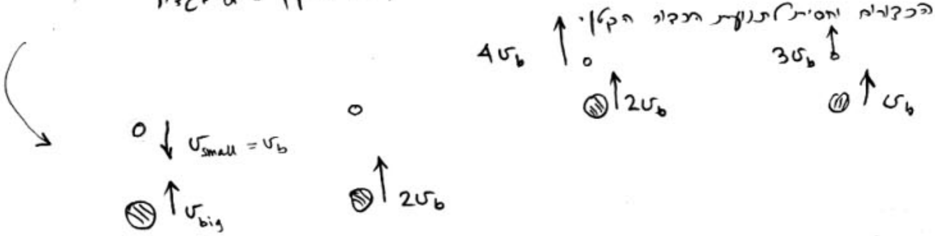


כששני הכדורים נופלים, הם נופלים נפילה חופשית.

כשהכדור הגדול פוגע ברצפה הוא מתנגש במסה גדולה מאוד ולכן, אם ההתנגשות אלסטית, יחזור באותה מהירות כלפי מעלה.

הכדור הגדול מיד יתנגש בכדור הקטן (נניח שגם
ההתנגשות שלהם אלסטית.

נסתכל על הכדורים יחסית לתנועת הכדור הקטן:



לפני התנגשות. צופה במערכת

יחסית לכדור הקטן, יש לגדול מהירות למעלה ב- v

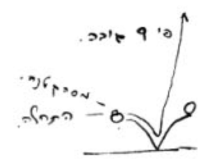
אחרי ההתנגשות במערכת שנייה עם הכדור הקטן במנוחה.

חזרה למערכת המעבדה, יש להחסיר $v_b = v$

לכן, הכדור הקטן יקבל מהירות שהיא פי שלוש ממהירות הנפילה של הכדור הגדול.

היות ו- $mgh = \frac{1}{2} m v_0^2$ ← הגדלת המהירות פי 3 תגדיל את הגובה

הסופי פי 9.



דוגמא לשימור תנע: בעיית הרקטה

נסתכל על תנועת רקטה ללא כוחות. נניח רקטה עם מסה התחלתית M_0 ופולטת מסה בקצב α (מסה ליחידת זמן) קבוע ובמהירות V יחסית לרקטה.

נסתכל על תאוצת הרקטה כל עוד זו מואצת.

מסת הרקטה כתלות בזמן: $M(t) = M_0 - \alpha t$ (כל עוד יש דלק).

כדי למצוא משוואה למהירות הרקטה כתלות בזמן, נשתמש בחוק שימור התנע:

(נסתכל במימד אחד)

$$\frac{d(P_{TOTAL})}{dt} = \overbrace{F_{ext} = 0}^{\text{אין כוחות חיצוניים}}$$

נפריד את התנע הכולל לתנע של הרקטה P_{rocket} + תנע של הגאז P_{gas}

$$\frac{dP_{rocket}}{dt} + \frac{d}{dt}P_{gas} = 0$$

* האיבר של הרקטה:

בגלל הביטוי עבור M

$$\frac{d}{dt}(M(t)v) = M\dot{v} + \dot{M}v = \underbrace{M\dot{v}}_{\text{שינוי התנע הנובע משינוי המהירות}} - \underbrace{\alpha v}_{\text{שינוי התנע הנובע משינוי המסה}}$$

* שינוי התנע של הגאז:

כמות הגאזים משתנה עם הזמן. השינוי מורכב משני איברים, האיבר הראשון הוא שינוי התנע של הגאז הקיים, משינוי מהירותו. האיבר השני נובע מכך שכמות הגאז משתנה. האיבר הראשון מתאפס היות והגאז, אחרי שהוא נפלט, אינו מאיץ. האיבר השני הוא:

ביחידת זמן Δt, נפלט מהכלי כמות מסה של $\Delta m = \alpha \Delta t$

מהירות הגאז יחסית לכלי $V-$ אולם במערכת המעבדה: $v_{gas} = v - V$

השינוי בתנע: $\Delta p_{gas} = \Delta m (v - V) = \Delta t\, \alpha (v - V)$

לכן:

$$\frac{dp_{gas}}{dt} = \alpha (v - V)$$

* המשוואה היא לכן:

$$M\dot{v} - \alpha v + \alpha (v - V) = 0$$

או:

$$M\dot{v} = \alpha V$$

13.11.04

נציב את הביטוי המפורש ל- $M(t)$:

$$(M_0-\alpha t)\frac{dv}{dt}=\alpha V$$

הפרדת משתנים:

$$\alpha V\frac{dt}{M_0-\alpha t}=dv$$

אינטגרציה בשני הצדדים:

$$\alpha V\int_{t=0}^{t=t}\frac{dt}{M_0-\alpha t}=\int_{v(0)}^{v(t)}dv$$

$$-\alpha V\frac{1}{\alpha}\ln(M_0-\alpha t)\Big|_{t=0}^{t=t}=v(t)-v(0)$$

$$V\ln M_0-V\ln(M_0-\alpha t)=v(t)-v(0)$$

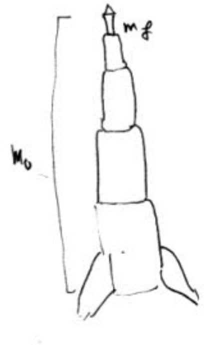
מכאן:

$$v(t)=v(0)+V\ln\frac{M_0}{M_0-\alpha t}$$

<u>אנו רואים</u> כי:

1) מהירות הטיל בגמר בערת הדלק אינה תלויה בקצב הבערה α אלא רק ב- V וביחס המסות $\frac{M_0}{M_f}$ (M_f - המסה הסופית אחרי בערת הדלק).
(לפחות כשאין כח כבידה!).

2) די להגיע למהירות מסדר גודל של V - מהירות הפליטה, אולם, כדי להגיע למהירות גבוהה יותר, יש יש צורך ב- $\frac{M_0}{M_f}$ <u>מאד</u> גדול בגלל ה- $\ln$ שגדל לאט.
זה מסביר מדוע טילים לחלל הם במספר רב של שלבים, כך M_0 ההתחלתי הוא עצום ביחס ל M_f שנשאר אחרי כל בערת השלבים.



V אופייני מבערה כימית

כמות אנרגיה שמתקבלת ליחידת מסה.

$$\frac{1}{2}mV^2=m\epsilon$$

$$V\simeq\sqrt{2\epsilon}$$

עבור $2H_2+O_2\to2H_2O$ $\quad\epsilon=1.3\times10^{11}$ erg/gr

והמהירות המתקבלת: $V\tilde{\approx}5$ km/s

זה מניח יעילות מקסימלית. במציאות מקבלים $V\sim3$ km/s וכדי להגיע ל- 11 ק"מ/שניה
יש צורך ב- $M_f/M_i\approx50$.

13.11.04

מה קורה עם כבידה? אם יש כבידה אז יש כח חיצוני על המערכת. המערכת שלנו היא המסה הכוללת (טיל + גאז!). הפעם, אגב, יש צורך בחישוב עדין יותר של שינוי התנע של הגאז היות והגאז שכבר נפלט אינו נשאר במהירות קבועה אלה הוא מאיץ.

$$\frac{dp_{gas}}{dt} = \underbrace{\alpha(v-V)}_{\text{שינוי תנע משינוי כמות הגאז,}} - \underbrace{\overbrace{\alpha t}^{\text{כמות הגאז שכבר יש}} \cdot g}_{\text{שינוי תנע מתאוצת הגאז שכבר קיים.}}$$

והפעם:

$$\frac{dp_{rocket}}{dt} + \frac{dp_{gas}}{dt} = F_{ext}$$

$$M\dot{v} - \alpha v + \alpha(v-V) - \alpha t\, g = -M_0 g$$

$$(M_0-\alpha t)\frac{dv}{dt} = -(M_0-\alpha t)g + \alpha V$$

$$M_{\text{רגעי}} \cdot a = -M_{\text{רגעי}}\, g + \underbrace{\text{דחף}}_{\text{מהעפת הגאז אחורה.}}$$

עוד דבר לפתור, אני מאוים כי הטיל לא יתחיל את מעופו אם $\overbrace{M_0 g}^{\text{כח משיכה,}} > \overbrace{\alpha V}^{\text{דחף}}$ צריך כדי שהטיל ימריא, הדחף צריך להיות גדול יותר מכח הכובד על הטיל.

אחרי הפרדה ואינטגרציה:

$$\int_{v(t=0)}^{v(t)} dv = \int_{t=0}^{t}\left(\frac{-(M_0-\alpha t)g + \alpha V}{M_0-\alpha t}\right)dt$$

$$= \int_{t=0}^{t} -g\,dt + \int_{t=0}^{t}\frac{\alpha V}{M_0-\alpha t}\,dt$$

הפתרון:

$$v(t) = v(0) - gt + V\ln\frac{M_0}{M_0-\alpha t}$$

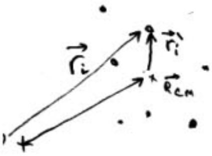
כדי שהכבידה לא תגרום ליותר מדי "נזק", יש להעיף את הטיל כמה שיותר מהר!

16.11.04

אנרגיה קינטית במרכז המסה

נחזור שוב להגדרה שלמערכת מרכז המסה, ונסתכל על הביטוי עבור האנרגיה שבה.

$$\underbrace{\vec r_i}_{\text{מיקום חלקיק}} = \underbrace{\vec R_{cm}}_{\text{מיקום מרכז המסה}} + \underbrace{\vec r_i'}_{\text{מיקום יחסי למרכז המסה.}}$$



$\vec r_i'$ מתאר את מיקום החלקיק i יחסית למרכז המסה.

* ראינו כי התנע מקיים:

$$m_i \dot{\vec r}_i = m_i \dot{\vec R}_{cm} + m_i \dot{\vec r}_i'$$

ואחרי סכום:

$$\vec P = M\dot{\vec R}_{cm} + \sum m_i \dot{\vec r}_i'$$

ז.א. התנע הכללי של המערכת הוא התנע של מרכז המסה + התנע של כל החלקיקים יחסית למרכז המסה.

אולם, אם המסות m_i קבועות:

$$\sum m_i \dot{\vec r}_i' = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum m_i \vec r_i'}_{=M\vec R_{cm}'}\Big) = 0$$

כאשר $\vec R_{cm}'$ הוא וקטור מרכז המסה במערכת מרכז המסה ולכן שווה לאפס!

ולכן:

$$\vec P = M\dot{\vec R}_{cm}$$

$\Leftarrow$ התנועה של החלקיקים במערכת מרכז המסה אינה תורמת לתנע הקווי הזה ואם היא הייתה תורמת, היא הייתה עושה זאת דרך שינוי ב-$\dot{\vec R}_{cm}$.

* אנרגיה קינטית:

$$K = \frac12 \sum_i m_i \dot r_i^2 = \frac12 \sum_i m_i\left(\dot{\vec R}_{cm} + \dot{\vec r}_i'\right)\cdot\left(\dot{\vec R}_{cm} + \dot{\vec r}_i'\right)$$

$$= \frac12 \underbrace{\sum m_i}_{M} \dot R_{cm}^2 + \underbrace{\sum m_i \dot{\vec r}_i'}_{=0} \cdot \dot{\vec R}_{cm} + \frac12 \sum m_i \dot{\vec r}_i'^2$$

מהגדרה של מרכז המסה!

ז.א. קיבלנו שהאנרגיה הקינטית היא:

$$K = \frac12 M v_{cm}^2 + \sum \frac12 m_i (v_i')^2$$

כלומר, האנרגיה הקינטית שווה לאנרגיה הקינטית של חלקיק נקודתי הנע במרכז המסה ועוד סכום האנרגיות של החלקיקים הנעים יחסית למרכז המסה.

$$K = K_{cm} + K'$$

הביטוי לא היה נכון אילו לא היינו עובדים במרכז המסה.

התנע הזויתי

התנע הזויתי עבור חלקיק יחיד, מוגדר כ:

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

למה שווה השינוי שלו בזמן?

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{\vec{v}\parallel\vec{v}\ \text{כי}\ =0} + \vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r}\times\vec{F} \equiv \vec{N}$$

את $\vec{r}\times\vec{F}$ מגדירים כמומנט כח ביחס לראשית הצירים. אנו רואים כי:

$$\underbrace{\dot{\vec{P}} = \vec{F}}_{\text{קווי}} \qquad \underbrace{\dot{\vec{l}} = \vec{N}}_{\text{סיבובי}}$$

* דוגמא: מומנט הכח על מערכת בנוכחות שדה הכבידה. $\underbrace{\vec{F}_i = m_i\vec{g}}_{\text{הכח על החלקיק } i}$.

מומנט הכח יהיה:

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times(m_i\vec{g}) =$$

$$= -\vec{g}\times\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}_{M\cdot R_{cm}} = M R_{cm}\times\vec{g}$$

המומנט השקול אקויולנטי לכך שכל המסה נמצאת במרכז המסה והיא נקודתית.

* התנע הזויתי של N מסות במרכז המסה:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\vec{l}_i = \sum_i m_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i(R_{cm}+\vec{r}_i{}')\times(\dot{R}_{cm}+\dot{\vec{r}}_i{}') =$$

$$= R_{cm}\times M\dot{R}_{cm} + \sum m_i\vec{r}_i{}'\times\dot{\vec{r}}_i{}' + \vec{R}_{cm}\times\underbrace{\sum m_i\dot{\vec{r}}_i{}'}_{=0} + \underbrace{\sum m_i\vec{r}_i{}'}_{=0}\times\dot{\vec{R}}_{cm}$$

כי סוכמים במערכת מרכז המסה

לכן, ניתן לכתוב:

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{L}_{cm}}_{\text{תנע זויתי של מרכז המסה}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_i{}'}_{\text{תנע זויתי יחסית למרכז המסה}}$$

אך ניתן לעשות כאלו גם עבורים יחסית לנקודה שאינה מרכז המסה

* מה קורה לתנע זוויתי בכח מרכזי?

אם בוחרים את מערכת הצירים במרכז הכח אזי $\vec r$ ו- $\vec F$ באותו כיוון.

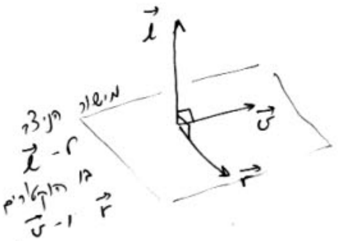
$$\vec r \times \vec F = 0 \iff \vec r \parallel \vec F$$

והתנע הזוויתי לכן קבוע:

$$\frac{d}{dt}\vec l = \frac{d}{dt}(\vec r \times m\vec v) = \vec r \times \vec F = 0$$

$$\vec l = \vec r \times m\vec v = const$$

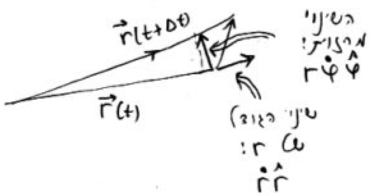
מסקנה ראשונה: תנועה המקיימת $\vec r \times \vec F = 0$ (כי $\vec r \parallel \vec F$) היא במישור קבוע המוגדר ע"י $\vec l$ הניצב למישור:



לכן, קל ורצוי לעבוד בקואורדינטות קוטביות במישור (או מישור ש' צילינדרי או מישור ש' כדורי).

במקרה כזה: $\vec r(t) = r(t)\hat r(t)$

לכן: $\dot{\vec r} = \dot r \hat r + r\dot\varphi\hat\varphi$ } משבוע ראשון או שני



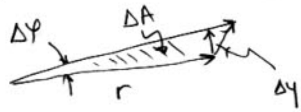
התנע הזוויתי הוא לכן:

$$\vec l = m\vec r \times \dot{\vec r} = mr\hat r \times (\dot r \hat r + r\dot\varphi\hat\varphi)$$

$$= mr^2\dot\varphi\,\underbrace{(\hat r \times \hat\varphi)}_{\hat z} = mr^2\dot\varphi\,\hat z$$

$\hat r \times \hat r = 0$

זהו למעשה החוק השני של קפלר האומר כי פלנטה "מציירת" ביחידת זמן שטח קבוע:



$$\Delta A = \frac{r\,\Delta\varphi}{2} , \frac{r^2\Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{2m} = const$$

תנע זוויתי במערכת חלקיקים

נתבונן על אוסף של N חלקיקים, כאשר על כל חלקיק פועל כח $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}$

$F_i^{(ext)}$ הוא הכח החיצוני על חלקיק i ואילו $\vec{f}_{ij}$ היא הכח שחלקיק j מפעיל על i.

מומנט הכח הכולל שפועל על המערכת:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$$

את הסכום ניתן לפרק כסכום על $i<j$ ואז לסכום זוגות (i,j) יחדיו:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \sum_{j<i} \left((\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}) \right)$$

מהחוק השלישי של ניוטון: $\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$ ולכן:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i,j<i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}$$

את הביטוי הנ"ל ניתן לפשט אם הכח $\vec{f}_{ij}$ הוא בכיוון הוקטור המחבר את שני החלקיקים i ו- j. זה לא מתחייב מן המשוואות במקרה הכללי, אולם עבור כוחות מרכזיים (כבידה, אלקטרוסטטי), זה מתקיים:

$$\vec{f}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

ואז המכפלה הוקטורית ביניהם מתאפסת והמומנט יהיה רק מהכוחות החיצוניים:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

(במקרה והכח החיצוני הוא מכבידה אז: $\vec{F}_i^{ext} = \vec{g} m_i$ ואז

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{g} m_i = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times g = M\vec{R}_{CM} \times \vec{g}$$

אולם במקרה הכללי לא ניתן לפשט את הביטוי הנ"ל)

בעיית שני הגופים (בעיית קפלר)

נסתכל על שני גופים הפועל ביניהם כח משמר לאורך הקו המחבר אותם זה לזה. ברצוננו לראות כי ניתן לכתוב את הבעיה בצורה פשוטה יותר.

נתחיל במשוואות התנועה לשני החלקיקים:

$$m_1\ddot{r}_1 = F_1^{(ext)} + \vec{f}_{12}$$

$$m_2\ddot{r}_2 = F_2^{(ext)} + \vec{f}_{12}$$

מחבור שני המשוואות מקבלים:

$$\underbrace{m_1\ddot{r}_1 + m_2\ddot{r}_2}_{\text{מהגדרה של מרכז מסה}} = \overbrace{F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)}}^{\text{הכח החיצוני הכולל שפועל על המערכת.}} + \underbrace{\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}}_{\overset{!!}{=}0 \text{ מהחוק השלישי של ניוטון}}$$

$$= (m_1+m_2)\ddot{R}_{cm} \qquad \left(R_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i r_i\right)$$

לכן מרכז המסה נע בהשפעת הכח החיצוני על המערכת.

כעת נחלק את המשוואות ב-m_1 וב-m_2 ונחסירן זו מזו:

$$\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2 = \underbrace{\frac{1}{m_1}F_1^{(ext)} - \frac{1}{m_2}F_2^{(ext)}} + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{f}_{12}$$

אם אין כוחות חיצוניים או אפילו אם יש שדה כבידה קבוע, האיבר האמצעי מתאפס:

$$\frac{1}{m_1}F_1^{(ext)} - \frac{1}{m_2}F_2^{(ext)} = 0$$

(או זניח...).

(למשל, שני חלקיקים טעונים כשהחלקיק הקרוב הבא רחוק מאוד מהמרחק בין שני החלקיקים או למשל זוג כוכבים וכו'...). כשדה הכבידה ($\vec{g}$) קבוע $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$ ואז זהותית מקבלים אפס.

במקרה כזה, מקבלים:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{f}_{12}$$

נגדיר את μ (הנקרא "מסה מצומצמת") כ- $\quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

ואת $\vec{r}$ הוקטור המחבר את 2 ל-1: $\quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

ונקבל משוואה עבור $\vec{r}$:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(r)$$

17.11.04

מה המשמעות של מה שקבלנו ?

את הבעיה של שני גופים ניתן לתאר כתנועה של מרכז המסה + תנועה של הוקטור המחבר את שתי המסות כאילו והיתה לנו מסה יחידה עם מסה m הנעה בפוטנציאל מרכזי עם אותו הכח הפועל בין חלקיקים 1 ו-2, ומרחק $\vec{r}$ מהראשית.

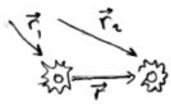
* למה שווה המסה המצומצמת במערכת כדוה"א - שמש?

$$\mu = \frac{\overset{\text{כדוה"א}}{m_\oplus}\,\overset{\text{שמש}}{m_\odot}}{m_\oplus + m_\odot} \underset{m_\odot \gg m_\oplus}{\simeq} m_\oplus$$

כלומר בבעיה הזו אנו יכולים להניח בקירוב כי יש לנו את מסת כדוה"א הנעה מסביב למרכז.

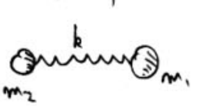
* אם יש שתי מסות m שוות – למשל שני כוכבים דומים:

$$\mu = \frac{m \cdot m}{m + m} = \frac{m}{2}$$

כלומר הבעיה של  אקויולנטית לבעיה:

$\times \xrightarrow{\vec{r}} \bullet\ \frac{m}{2}$

* דוגמא נוספת: שתי מסות m_1 ו- m_2 על קפיץ, היכולות לנוע במרחב ללא כוחות חיצוניים.



את הבעיה ניתן לתאר כתנועה של מרכז המסה + תנועה של וקטור r המחבר את שתי המסות, כאילו ו-

נקודה קבועה. 

כאשר:
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

מה שעשינו למעשה היה לעבור מתיאור של הבעיה ע"י הקואורדינטות $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_2$ ל- $\vec{R}_{cm}$ ו- $\vec{r}$, הנתונים ע"י הקשר:

$$\begin{cases} \vec{R}_{cm} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2\right) \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

17.11.04

את הקשר הזה ניתן להפוך ולקבל:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

מה האנרגיה הקינטית במערכת החדשה? אנו אמורים לקבל $K = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$

היא והבעיה אקוויוולנטית לבעיית גוף עם מסה μ. נראה זאת:

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + 2\frac{\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}}_{CM}^2 - \frac{2\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \underbrace{\frac{\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,(m_1m_2 - m_2m_1)}{m_1+m_2}}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}}_{=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)} = \mu}\dot{\vec{r}}^2$$

$$= \frac{\overset{(m_1+m_2)}{M}}{2}\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$$

באותה דרך ניתן לקבל:

$$\vec{L} = M\vec{R}_{CM}\cdot\dot{\vec{R}}_{CM} + \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

<u>תנועה בשדה כבידה (והכוח האלקטרוסטטי, גם! - באותו המחיר).</u>

כוחות אלו מקיימים שהכוח בין שני חלקיקים $\vec{f}(r) = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$

ה-α תלוי בכוח עצמו:

עבור כבידה: $\alpha = -Gm_1m_2$

אלקטרוסטטי: $\alpha = q_1q_2$ (c.g.s)

$= kq_1q_2$ (m.k.s)

(ב-c.g.s הקבוע k נבלע בתוך היחידות של המטען).

הפוטנציאל הוא: $U(r) = \frac{\alpha}{r}$

משימור אנרגיה, מתקיים:

$$K + U = const$$

או:

$$K_{CM} + K' + \frac{\alpha}{r} = const$$

ללא כוחות חיצוניים, K_{CM} הוא קבוע ולכן:

$$E' = K' + U = const$$

(נבדוק את ה' מה - E' - ונסתכל רק על התנועה ב-$\dot{\vec{r}}$).

ונקבל:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{2}+\frac{k}{r}=E=const.$$

אבל, את $\dot{\vec{r}}^{2}$ ניתן לכתוב כ: $\dot{\vec{r}}^{2}=(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\varphi}\hat{\varphi})^{2}=\dot{r}^{2}+r^{2}\dot{\varphi}^{2}$

כפי שראינו כבר מקודם! לכן, שימור אנרגיה נותן:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^{2}+\frac{1}{2}\mu r^{2}\dot{\varphi}^{2}+\frac{k}{r}=E$$

אולם, משימור תנע זוויתי: $\mu r^{2}\dot{\varphi}=l=const$, לכן, נכתוב את הביטוי בעזרת הקבוע l:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^{2}+\frac{l^{2}}{2\mu r^{2}}+\frac{k}{r}=E$$

עכשיו, המשוואה הנ"ל עבור $\frac{dr}{dt}$ ניתנת לפתרון ע"י הפרדת משתנים:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^{2}=\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{l^{2}}{2\mu r^{2}}-\frac{k}{r}\right)$$

$$\int_{r(t=t_0)}^{r(t)}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{l^{2}}{2\mu r^{2}}-\frac{k}{r}\right)}}=\int_{t_0}^{t}dt$$

האינטגרל הזה מגעיל!

ניתן לפתור אותו ע"י החלפת משתנים: $dr=-1/u^{2}\,du \leftarrow u=1/r$

רק שמתקבל האינטגרל:

$$-\int_{u(t=t_0)}^{u(t)}\frac{du}{u^{2}\sqrt{E-\frac{l^{2}}{2\mu}u^{2}-ku}}$$

ולאינטגרל זה יש פתרון בספרי אינטגרלים.

אם משתמשים בפתרון, ניתן לקבל שאיזו שהיא פונקציה של u (ולכן גם של r) תלויה בזמן:

$$f(r)=t$$

זהו ביטוי סתום עבור $r(t)$. לא נחשב את זה כי זה לא יותר מידי ~~חש~~ חשוב!

אותנו מעניין, כרגע, לקבל ביטוי עבור $r(\varphi)$. נראה כי ניתן לקבל ביטוי פשוט יחסית ע"י טריק מתוחכם או לחילופין ע"י אינטגרל דומה לזה הכתוב למעלה.

17.11.04

חישוב $r(\varphi)$ בבעיית קפלר:

אותי מעניין כעת למצוא ביטוי עבור $r(\varphi)$ בבעיית קפלר. סיבה אחת היא שניתן למצוא ביטוי פשוט!

על התנועה, אנו יודעים ש-

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}$$

כשמוציאים שורש יש שתי אפשרויות. המשמעות היא שעבור אותו r, החלקיק יכול לנוע פנימה או החוצה.

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

אנו יכולים להחליף החוצה את t ע"י שימוש בשתי המשוואות:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi}}_{\text{חוק השרשרת.}} = \frac{dr}{dt}\frac{1}{\dot\varphi} = \pm\frac{\mu r^2}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

ע"י הפרדת משתנים ניתן לפתור את הבעיה ל- $r(\varphi)$:

$$\pm\int_{r(\theta_0)}^{r(\theta_1)} \frac{dr}{\frac{\mu r^2}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi$$

כשעוברים מ-r ל-φ, המשמעות היא של ± כזה שהחלקיק יכול לנוע בכיוון השעון או הפוך

האינטגרל נראה פשוט יותר אם מחליפים משתנים:

$u = 1/r \qquad du = -1/r^2\, dr$

$$\mp\int_{u(\varphi_0)}^{u(\varphi_1)} \frac{du}{\frac{\mu}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu}u^2 - \alpha u\right)}} = \varphi_1 - \varphi_0$$

גם לאינטגרל זה, כמו לאינטגרל בסעיף הקודם יש פתרון בספר אינטגרלים:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

עבור $a<0$

ז.א. עבור: $a = -\frac{l^2}{2\mu}$, $b = -\alpha$, $c = E$ מקבלים:

$$\pm\frac{l}{\sqrt{2\mu}}\left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{l^2}}\sin^{-1}\left(\frac{-\frac{l^2}{\mu}u - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2El^2/\mu}}\right)\right)\Bigg|_{u(\varphi_0)}^{u(\varphi_1)} = \varphi_1 - \varphi_0$$

$$\mp\left[\sin^{-1}\left(\frac{\frac{l^2}{\alpha\mu}u(\varphi_1) + 1}{\sqrt{1 + 2El^2/\mu\alpha^2}}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\frac{l}{\alpha\mu}u(\varphi_0) + 1}{\sqrt{1 - 2El^2/\mu\alpha^2}}\right)\right] = \varphi_1 - \varphi_0$$

17.11.04

נגדיר $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\alpha^2\mu}}$. לגודל זה קוראים אקסצנטריות (eccentricity)

ונקבל:

$$\sin^{-1}\left(\frac{\frac{\ell^2}{\alpha\mu}u(\varphi_1)+1}{\varepsilon}\right)=\pm(\varphi-\varphi_0)+\underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{\frac{\ell}{\alpha\mu}u(\varphi_0)+1}{\varepsilon}\right)}$$

נגדיר כ- $\tilde{\varphi}$ דהיינו, במקום להשתמש ב- φ_0 כקבוע אינטגרציה, נשתמש בגודל המסומן.

המשוואה ההופכית, דהיינו $u(\varphi)$ היא לכן:

$$\frac{1}{r}=u=\frac{\alpha\mu}{\ell^2}\left(1-\varepsilon\sin\left(\pm(\varphi-\varphi_0)\right)\right)$$

משמעות ה-"$\pm$" היא שהחלקיק (או כוכב) יכול לנוע בכיוון השעון או בכיוון ההפוך.

נחזור על הדריבציה במקום ע"י שימוש במשוואת שימור אנרגיה (שהיא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון) נשתמש במשוואה של כוחות (אפקטיביים במקרה זה).

אנו רואים את משוואת האנרגיה בצורה:

$$\frac{1}{2}\mu\dot r^2+\underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu r^2}+\overbrace{\frac{\alpha}{r}}^{U(r)}}_{U_{eff}(r)}=E$$

אם נגזור את המשוואה הנ"ל, נקבל:

$$\mu\dot r\ddot r-\frac{\ell^2}{2\mu r^3}\dot r-\frac{\alpha\dot r}{r^2}=0$$

היות ואנו איננו מעוניינים במקרה של $\dot r=0$, נחלק בו ונקבל:

$$\mu\ddot r=\frac{\alpha}{r^2}+\frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

המשוואה הנ"ל היא מהצורה:

$$"m"a=F_{eff}$$

כאשר:

$$F_{eff}=-\frac{dU_{eff}}{dr}=\frac{\ell^2}{\mu r^3}+\frac{\alpha}{r^2}$$

עם אותו ה- U_{eff} שהוגדר למעלה.

17.11.04

משוואה זו היא משוואה דיפרנציאלית מסדר שני (היות ונגזרת שנייה בזמן מופיעה). לרוב, משוואות כאלו הן מסובכות יותר לפתירה מאשר משוואות מסדר ראשון (כמו המשוואה המתקבלת משימור אנרגיה) אולם, במקרה זה ניתן להחליף משתנים ולקבל משוואה פשוטה הרבה יותר.

ראשית, אנו רוצים להפריד את המשוואה למשוואה עבור $r(\varphi)$ שתתן לנו את הצורה הגיאומטרית של המסלול. כדי לעשות זאת, יש להחליף $\frac{d}{dt}$ ים ב- $\frac{d}{d\varphi}$ ים.

* משימור תנע זוויתי:

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$$

לכן, נגזרת של פונקציה f כלשהי לפי t תהיה:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{df}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{df}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2}$$

ונגזור כעת שוב לפי הזמן:

מגדירים את g כ- $\frac{df}{dt}$

שימוש בנוסחה קודמת

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \equiv \frac{dg}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{dg}{d\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{df}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2}\right) \qquad \left(g = \frac{l}{\mu r^2}\frac{df}{d\varphi} \quad \text{כאשר}\right)$$

הצבה של g.

$$= \frac{l^2}{\mu^2 r^4}\frac{d^2 f}{d\varphi^2} - \frac{2l^2}{\mu^2 r^5}\frac{df}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi}$$

פתיחת ה().

ניקח כעת $f=r$ ונקבל:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{l^2}{\mu^2 r^4}\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2l^2}{\mu^2 r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

ומשוואתנו תראה לכן:

$$\frac{l^2}{\mu r^4}\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2l^2}{\mu r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

וכעת הניחוש לעבור למשתנה $u = 1/r$. אם נבצע החלפה זו נקבל:

$$u = 1/r \;\xrightarrow[\text{גזירה לפי } \varphi]{}\; \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \;\xrightarrow[\text{גזירה נוספת לפי } \varphi]{}\; -\frac{1}{r^2}\frac{d^2 r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

אם נכתוב את המשוואה הנ"ל בצורה קצת אחרת, נראה שהגדרה זו תועיל לנו!!

$$\frac{l^2}{\mu r^2}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}_{-\frac{d^2 u}{d\varphi^2}}\Bigg) = \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

ז.א. אנו מקבלים כי:

$$\frac{l^2}{\mu}u^2\left(-\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) = \frac{l^2}{\mu}u^3 + \alpha u^2 \qquad \left(\text{כאמור } 1/r = u\ !\right)$$

נחלק ב- u (לא מאבד אותנו הפתרון $u=0$) ונקבל:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\alpha\mu}{l^2}$$

משוואה זו היא משוואה דיפרנציאלית (מכילה נגזרות של u) מסדר שני (נגזרת שניה ב- φ) לינארית (מופיע רק u או נגזרותיו בחזקה ראשונה או אפס בכל איבר). למשוואות כאלו יש פתרון סטנדרטי.

ראשית, יש לשים לב שהמשוואה אינה הומוגנית, בהיות ויש איבר שאינו תלוי ב- u. הכלל אומר הוא שיש לחפש פתרון u המורכב מפתרון פרטי (כלשהו!) למשוואה הלא הומוגנית + פתרון כללי למשוואה ההומוגנית.

$$u = u_h + u_p$$

$$\hookrightarrow u'' + u = -a \qquad \left(a = \frac{\alpha\mu}{l^2}\right)$$

$$u_h'' + u_p'' + u_h + u_p = -a$$

ברור ש $u_p = -a$ הוא פתרון כי $u_p''=0$ במקרה זה: $u_p'' + u_p = -a$ נחסר משוואה זו ונקבל:

$$u_h'' + u_h = 0 \rightarrow u_h'' = -u_h$$

כעת נשאל, איזו פונקציה אם גוזרים אותה פעמיים מקבלים את אותה הפונקציה עם סימן הפוך? התשובה: sin ו- cos, אך גם sin כפול קבוע וכו'.

ז.א. הפתרון הכללי של החלק ההומוגני:

$$u_h = A\cos\varphi + B\sin\varphi \underset{\uparrow}{\equiv} A\cos(\varphi - \varphi_0)$$

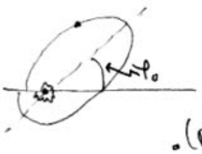
ניתן לכתוב זאת כמובן.

הפתרון הכללי למשוואה הלא הומוגנית:

$$u = u_h + u_p = A\cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{\alpha\mu}{l^2}$$

הפתרון פותר את המשוואה הלא הומוגנית ומכיל שני קבועי אינטגרציה (A ו- φ_0). היות והמשוואה היא מסדר שני הפתרון הכללי צריך להכיל שני קבועי אינטגרציה ולכן הפתרון שמצאנו הוא הכי כללי.

מהם הקבועים A ו- φ_0? φ_0 פשוט קובע את ציר המסלול:



ומהו A? כדי למצוא את A, נמצא את ערכי הקיצון של המסלול (אם מדובר בפלנטה סביב השמש, הנקודה הקרובה ביותר (ה- u הגדול ביותר!) נקראת פריהליון (perihelion).

בנקודות קיצון של המסלול, מתקיים שהאיבר הקינטי $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ מתאפס:

$$E - \alpha u - \frac{l^2}{2\mu}u^2 = 0$$

$$u_{1,2} = -\frac{\mu\alpha}{l^2}\left[1 \mp \underbrace{\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}\right] = -\frac{\mu\alpha}{l^2}\left[1 \mp \varepsilon\right]$$

מגדירים כאקסצנטריות ε (eccentricity)

<u>מה קורה עבור כח גרביטציה ו- $E<0$</u>. במקרה כזה:

$$0 < \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} < 1$$

כמו כן:

$$u_{max} - u_{min} = -\frac{2\mu\alpha}{l^2}\varepsilon$$

אולם ממשוואת המסלול שקבלנו:

$$u_{max} - u_{min} = 2A$$

ולכן:

$$A = \frac{(-\alpha)\mu}{l^2}\varepsilon$$

ומשוואת המסלול היא:

$$\frac{1}{r(\varphi)} = u(\varphi) = \frac{(-\alpha)\mu}{l^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

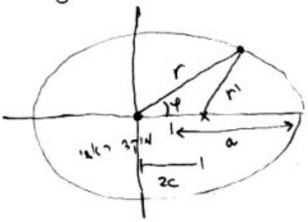
$$= \frac{Gm_1m_2\mu}{l^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

זוהי משוואה של אליפסה. (ראה ציור).

17.10.04

הוכחה כי המסלול שהתקבל הינו אכן בצורת אליפסה:

הגדרת אליפסה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משני מוקדי האליפסה הוא קבוע. נהוג לסמן סכום זה כ- $2a$. a נקרא semi-major axis (חצי הציר הראשי).



$$r + r' = 2a$$

נגדיר את המרחק בין המוקדים כ- $2c$.

לפי חוק הקוסינוסים

$$(2c)^2 + r^2 + 2(2c)r\cos\varphi = (r')^2 \quad (*)$$

מצד שני, לפי הגדרה של אליפסה:

$$r + r' = 2a \rightarrow (r')^2 = (2a-r)^2$$
$$= 4a^2 + r^2 - 4ar \quad (*)$$

נחסיר את שתי המשוואות (או, נציב $(r')^2$ ממשוואה שניה במשוואה ראשונה):

$$4c^2 + \cancel{r^2} + 4cr\cos\varphi = 4a^2 + \cancel{r^2} - 4ar$$

$$c^2 + cr\cos\varphi = a^2 - ar$$

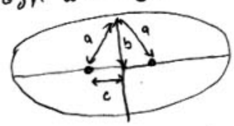
$$ar\left(1 + \frac{c}{a}\cos\varphi\right) = a^2 - c^2$$

או:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{a^2-c^2}\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right)$$

כאשר, $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$

מהגדרה של אליפסה:



לכן: $a^2 = b^2 + c^2$

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right)$$

$\Leftarrow$ מסלולי קפלר הם אליפסות עם אקסצנטריות:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu G^2 m_1 m_2}}$$

חוקי קפלר:

חוק ראשון: מסלולי כוכבי הלכת הם אליפסות כאשר השמש באחד מהמוקדים.
ראינו זאת בעמוד קודם:

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha\mu}{l^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

חוק שני: כוכב לכת גורף שטחים שווים ביחידת זמן. ראינו זאת משימור תנע:

$$r^2\dot{\varphi} = const = l/_{2\mu}$$

חוק שלישי: החוק השלישי אומר:

$$\underbrace{P^2}_{\text{זמן המחזור (סביב השמש).}} \propto \underbrace{a^3}_{\text{יחסי לחז׳ 3. הציר הגדול באליפסה.}}$$

הוכחה:

מהחוק השני (של קפלר):

$$\frac{\overset{\text{שטח כולל}}{\pi ab}}{\underset{\text{זמן כולל}}{P}} = r^2\dot{\varphi} = const = l/_{2\mu}$$

לכן:

$$P^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2 4\mu^2}{l^2}$$

אולם ממשוואת המסלול:

$$\frac{a}{b^2} = \frac{Gm_1m_2}{l^2}\mu$$

$$\downarrow$$

נקבל:

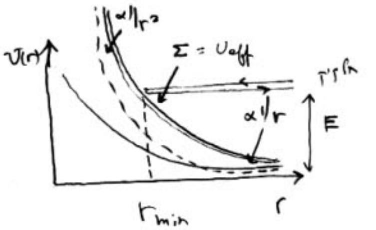
$$\frac{b^2}{l^2} = \frac{a}{Gm_1m_2\mu}$$

ונציב זאת בביטוי עבור P^2:

$$P^2 = 4\pi^2a^2\mu^2\cdot\frac{a}{Gm_1m_2\mu} \underset{\mu=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\cdot a^3$$

Q.E.D.

כח דחייה חשמלי:



כעת נבחן את המקרה בו: $\alpha = q_1q_2 > 0$

המתאר דחייה בין מטענים עם מטען בעלי אותו הסימן.

במקרה זה, לפוטנציאל האפקטיבי אין מינימום.

ז"א. חלקיק יגיע מ-∞, עד שכל האנרגיה E הקינטית הרדיאלית תהפוך לאנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית, ואז יחזור חזרה ל-∞. למה שווה r_{min}?

משימור אנרגיה בנקודה זו:

$$E - q_1q_2 u - \frac{l^2}{2\mu}u^2 = 0$$

משוואה ריבועית עם שני פתרונות!

$$u_{1,2} = -\frac{\mu q_1q_2}{l^2}\left[1 \pm \varepsilon\right]$$

אולם הפעם:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu q_1^2q_2^2}} > 1$$

ולכן, ישנו פתרון פיזיקלי אחד (עם $u>0$). התנועה תהיה בין $u=0$ לבין אותו u_{max} (המתאים ל- r_{min}):

$$u_{max} = (\varepsilon - 1)\frac{\mu q_1q_2}{l^2}$$

אם נזכר במשוואת המסלול:

$$u = A\cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{\mu q_1q_2}{l^2}$$

הערך המקסימלי של u לפי משוואת המסלול:

$$u_{max} = A - \frac{\mu q_1q_2}{l^2}$$

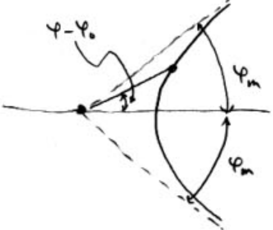
נשווה זאת ל-u_{max} משימור אנרגיה:

$$A - \frac{\mu q_1q_2}{l^2} = u_{max} = (\varepsilon - 1)\frac{\mu q_1q_2}{l^2}$$

ולכן: $A = \varepsilon\frac{\mu q_1q_2}{l^2}$ כלומר:

$$u = \frac{\mu q_1q_2}{l^2}\left(\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) - 1\right)$$

התנועה תהיה מוגבלת ב-φ כי הסוגריים צריכים להיות חיוביים.



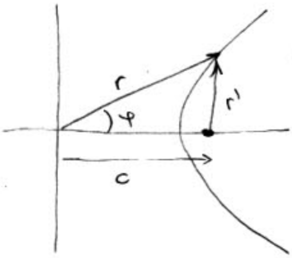
$$\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) - 1 > 0$$

$$\varepsilon\cos\varphi_m - 1 = 0 \implies \cos\varphi_m = 1/\varepsilon$$

17.11.04

נראה כי הפעם משוואת המסלול מתארת היפרבולה:

הגדרה גיאומטרית: המקום שהפרש המרחק לשני נקודות קבועות (מוקדים) הוא נתון.



הפעם: $r - r' = 2a$

משפט הקוסינוסים:

מצד אחד: $r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\varphi$

ומצד שני: $r'^2 = r^2 - 4a^2 - 4ar$

ולכן: $c^2 - rc\cos\varphi = a^2 - ar$

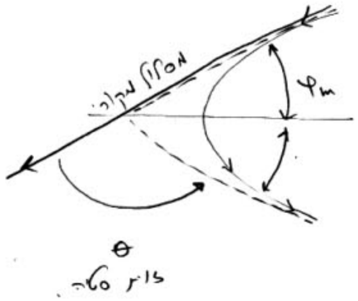
ונקבל: $ar\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right) = a^2 - c^2 = -b^2$

הפעם $c > a$!

סה"כ: $\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left(\varepsilon\cos\varphi - 1\right)$

על-ידי השוואה לתוצאות מעמוד קודם $\Rightarrow$ המסלול הוא היפרבולה עם:

$\frac{c}{a} = \varepsilon > 1 \qquad \frac{a}{b^2} = \frac{\mu q_1 q_2}{l^2}$



הסטיה של החלקיק מהמסלול המקורי:

$$\theta = \pi - 2\varphi_m = \pi - 2\cos^{-1}(1/\varepsilon)$$

המרחק המינימלי של החלקיק מן המרכז:

$$r_{min} = \frac{1}{u_{max}} = \frac{\mu q_1 q_2}{l^2}(\varepsilon - 1)$$

נוכל גם לכתוב:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi_m} = \frac{1}{\sin^2\theta/2} = 1 + ctg^2\frac{\theta}{2}$$

$\theta = \pi - 2\varphi_m$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \rightarrow 1 + ctg^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$

חלוקה ב- $\sin^2 A$

ולכן:

$$ctg^2\frac{\theta}{2} = \frac{2El^2}{\mu q_1 q_2}$$

17.11.04

דוגמאות:

1) נתון הפוטנציאל המרכזי:

$$U(r) = -\frac{k}{r^4}$$

א. האם ישנם מסלולים מעגליים בפוטנציאל זה? האם הם יציבים?

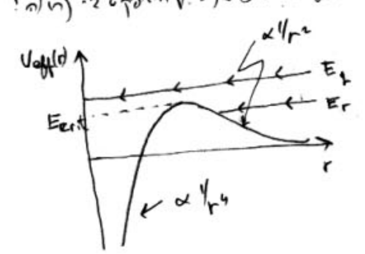
ב. נתון כי החלקיק מגיע מ-$r = \infty$ עם מהירות V, מה צריך להיות ה"אימפקט פרמטר" b (פרמטר פגיעה = הכמה מפספסים את "הכוון בפגיעה"), כדי שהחלקיק ייבלע ע"י הפוטנציאל.

פתרון:

האנרגיה האפקטיבית:

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \underbrace{\underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{\text{צנטריפוגלי}} - \underbrace{\frac{k}{r^4}}_{\text{משיכה}}}_{U_{eff}(r)} = E$$

הפעם הפוטנציאל האפקטיבי (ראה:)



כדי שתהיה תנועה מעגלית:

הפתרון ה"מעגלי": $\dot{r} = 0$

$$\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^4} = E$$

אנו מחפשים שיווי משקל/מינימום, נגזור לפי r:

$$-\frac{l^2}{mr^3} + \frac{4k}{r^5} = 0 \Rightarrow \frac{4k}{r^2} = \frac{l^2}{m} \Rightarrow r = \sqrt{4km}\,\frac{1}{l}$$

ז"א יש לנו את הרדיוס של התנועה המעגלית בהינתן ה-l של החלקיק (למשל).

פתרונות אלו אינם יציבים - היות וכל הפרעה קטנה, והחלקיק יברח מנקודת שיווי המשקל. כפי שניתן לראות מהפוטנציאל.

אם אנו רוצים קשר עם $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} = \frac{2\sqrt{km}}{mr^3} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{2}{r^3}$$

כדי לענות על חלק ב', אנו צריכים את התנאים (ומה אנרגיה) בשיא הפוטנציאל.

ד. נציב $r=\frac{\sqrt{4km}}{l}$ בביטוי עבור האנרגיה:

$$E_{crit}=\frac{l}{2mr^2}-\frac{k}{r^4}=\frac{l^2}{2mr^2}\frac{l^2}{4km}-\frac{kl^4}{16k^2m^2}=$$

$$=\frac{l^4}{m^2k}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)=\frac{l^4}{16m^2k}$$

כשהחלקיק רחוק מאוד, כל האנרגיה שלו זו אנרגיה קינטית. אם מגיע עם מהירות v_∞ (באינסוף):

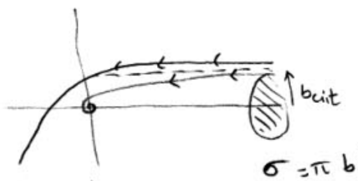
$$E_{crit}=\frac{1}{2}mv_\infty^2$$

ואילו התנע הזוויתי:

$$l=m|\bar{r}\times\bar{v}|=mbv_\infty$$

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2=E_{crit}=\frac{m^4 b^4 v_\infty^4}{16m^2k}\longrightarrow b_{crit}=\left(\frac{8k}{mv_\infty^2}\right)^{1/4}$$

כאשר חלקיק מגיע עם b גדול יותר הוא מתפזר ואילו אם מגיע עם b קטן יותר, הוא נבלע.



$\sigma=\pi b_{crit}^2$

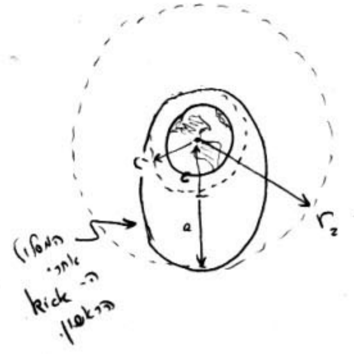
ניתן להגדיר חתך פעולה לבליעה:

$$\sigma=\pi b_{crit}^2=\pi\left(\frac{8k}{mv_\infty^2}\right)^{1/2}$$

זהו ה"שטח" שדרכו צריך להגיע החלקיק כד

דוגמא 2

לוויין נע מסביב לכדור הארץ ברדיוס r_1, במסלול מעגלי, איזו מהירות ובאיזה כיוון יש לתת ללוויין על מנת שהוא יגיע למסלול r_2, מה המהירות השניה שיש לתת לו על מנת שישאר במסלול מעגלי.



פתרון:

אחרי ה"בוסט" הראשון, אנו רוצים מסלול אליפטי שהנקודה הקרובה ביותר תהיה r_1 ושהנקודה הרחוקה ביותר תהיה r_2.

אליפסה: $2a = r_{min}+r_{max}$

c הוא המרחק מהמרכז אל המוקד $= c = a - r_1$

$$c = \frac{r_2-r_1}{2}$$

לכן, אנו מחפשים מסלול עם: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}$

מהשוואה למשוואת המסלול:

$$= m_\oplus m_s \cdot \frac{m_\oplus m_s}{m_\oplus + m_s} \cong m_\oplus m_s^2$$

$$\frac{G m_\oplus m_s \mu}{l^2} = \frac{a}{b^2} = \frac{r_1+r_2}{2r_1r_2}$$

$$b^2 = a^2+c^2 = \frac{(r_1+r_2)^2}{4} - \frac{(r_1-r_2)^2}{4} = r_1 r_2$$

לכן:

$$l = \sqrt{2G m_\oplus m_s^2 \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}} = m_s r_1 v$$

מצד שני תנע זוויתי זה $l = mrv$ כי $v \perp r$ בנקודה הנ"ל!

כלומר, המהירות צריכה להיות:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{r_1} \frac{r_2}{r_1+r_2}}$$

אולם המהירות ההתחלתית היא:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}}$$

(למשל, ניתן להציב $r_2=r_1$!).

7.11.04

לכן השינוי במהירות שיש לתת ללווין:

$$\Delta v = v - v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right)$$

בצורה דומה ניתן לתת שינוי במהירות בנקודה הרחוקה ביותר (הנקודות אפוג'יה והפך מפריג'יה, הנקודה הקרובה ביותר), כדי להשאיר את הלוין במסלול מעגלי שוב:

$$\Delta v_2 = v_2 - v_3 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

$r_2 \leftrightarrow r_1$ (החלפת תפקידים)

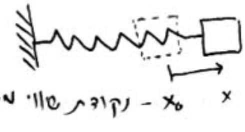
כך משנים מסלולים של לוויינים.

(זאת הדרך היעילה ביותר היות והעבודה אותו עושה הכח של המנועים נותנת הכי הרבה אנרגיה כי: $v \parallel F$).

24.11.04

המתנד ההרמוני (אוסצילטור הרמוני).

נדון, הפעם בהרחבה, במתנד ההרמוני. המשוואה המתארת מסה על קפיץ

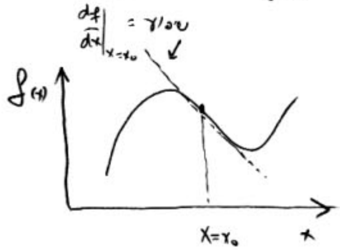


היא: $F = -kx \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

חשוב מאוד לציין שבעית המתנד מופיעה בפיסיקה הרבה מאוד לעזמין. הדרך להראות זאת, היא ע"י תיאור פוטנציאל כלשהו בעזרת טור טיילור.

טור טיילור.

- נניח אני רוצה לתאר בקרוב פונקציה כלשהי $f(x)$ בסביבות נקודה $X=x_0$. בסדר 0, הפונקציה שווה בסביבות הנקודה שלי לערכה בנקודה:



סדר 0: $f(x) \approx f(x_0)$

הסדר הבא: אני יתן תאור הפונקציה בעזרת הנגזרת שלה:

סדר 1: $f(x) \approx f(x_0) + \text{שיפוע}\,(x-x_0) = f(x_0) + \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)$

- מה קורה אם במקום את הפונקציה שלי $f(x)$ אני מתארים כקבוע + שיפוע לינארי: נתאר את הנגזרת שלה כקבוע + שיפוע לינארי? במקרה כזה, נכתוב:

סדר 1 לנגזרת:

$$f'(x) \approx f'(x_0) + \overbrace{\frac{df'}{dx}}^{=\frac{d^2f}{dx^2}}\Bigg|_{x=x_0}(x-x_0)$$

זהו הביטוי למעלה עבור $f(x)$, רק שהחלפנו $f(x)$ ב- $f'(x)$.

נבצע כעת אינטגרציה על x, ונקבל

24.11.04

אם נבצע אינטגרציה על הקירוב סדר 1 לנגזרת, נקבל קירוב סדר שני עבור הפונקציה $f(x)$:

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x=x_0}^{x} f'(x)\,dx = f(x_0)+\frac{df}{dx}(x-x_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x-x_0)^2$$

– מה קורה אם את הנגזרת סדר $(n-1)$ של הפונקציה f שלנו נקרב ע"י קירוב לינארי? במקרה כזה נרשום:

הנגזרת ה - $n-1$

$$f^{(n-1)} \simeq f^{(n-1)}(x_0)+\underbrace{\left.\frac{d f^{(n-1)}}{dx}\right|_{x=x_0}}_{f^{(n)}}(x-x_0)$$

נבצע כעת $n-1$ אינטגרציות:

$$f^{(n-2)}(x)=f^{(n-2)}(x_0)+\int_{x=x_0}^{x} f^{(n-1)}(x)\,dx = f^{(n-2)}(x_0)+f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f^{(n)}(x-x_0)^2$$

ונמשיך...

$$f^{(n-3)}=f^{(n-3)}(x_0)+f^{(n-2)}(x_0)(x-x_0)+f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}f^{(n)}(x-x_0)^3$$

ונמשיך.... עד שנגיע ל-

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+\dots+f^{(n)}\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

זהו טור טיילור. הוא נותן לנו ביטוי (מקורב עם n סופי) לפונקציה $f(x)$ בעזרת הנגזרות בנקודה x_0.

מה זה אומר? אם מדובר על קירוב פונקציה סביב המינימום (או מקסימום) שלה, אנחנו מפתחים אותה סביב נקודה x_0 בה $f'(x_0)=0$ (אחרת לא היה מינימום או מקסימום). לכן, אם הנגזרת השניה לא שווה לאפס ניתן לכתוב את $f(x)$ בצורה הבאה.

24.11.04

סביב מינימום פוטנציאל (אם הנגזרת השניה אינה שווה לאפס!):

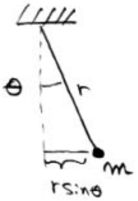
$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0} (x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

סביב מינימום פוטנציאל!

אם הנגזרת השניה שווה לאפס, נצטרך לעלות לסדרים גבוהים יותר כדי לתאר את המינימום שלנו. נראה זאת בדוגמא למטה. לרוב הנגזרת השניה אינה אפס וכך ניתן לקרב את הפוטנציאל שלנו כפרבולה סביב $x=x_0$.

<u>דוגמאות</u>

— מטוטלת מתמטית:



תנע זויתי:

$$l = m r \overbrace{v}^{r\dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

מומנט כח:

$$N = -mg\, r \sin\theta$$

משוואת תנועה בעזרת מומנטים:

$$\frac{dl}{dt} = N$$

$$m r^2 \ddot{\theta} = -mg\, r \sin\theta$$

כלומר:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\sin\theta$$

את ה- $\sin\theta$ ניתן לקרב ע"י פיתוח לטור טיילור:

$$\sin\theta \cong \underbrace{\sin(\theta=0)}_{=0} + \underbrace{\cos(\theta=0)}_{=1}\underbrace{(x-x_0)}_{=0} + \underbrace{(-)\sin(\theta=0)}_{0}\frac{(x-x_0)^2}{2} + \frac{(-)\cos(\theta=0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots$$

$$\sin\theta \cong 0 + x + 0 \quad (-)x^3/3! + \dots$$

ז"א. בקירוב הנמוך ביותר, ניתן לרשום:

$$\ddot{\theta} \cong -\frac{g}{r}\theta$$

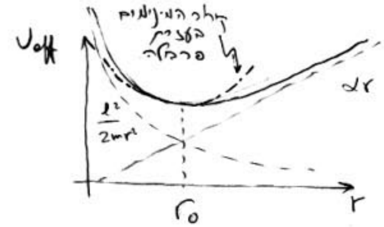
כאן הכח המחזיר (המומנט) יחסי ל- θ ולכן הפוטנציאל יהיה הרמוני.

24.11.04

- דוגמא: פוטנציאל מרכזי עם $U(r)=\alpha r$. במקרה כזה, הפוטנציאל האפקטיבי הוא:

$$U_{eff}(r)=\frac{\ell^2}{2mr^2}+\alpha r$$

והוא נראה כך:



את המינימום פוטנציאל ניתן לקרב בעזרת פרבולה ואת תנועת החלקיק ליד מינימום הפוטנציאל כתנועה הרמונית.

נמצא את המינימום:

תנאי למינימום:

$$\frac{dU_{eff}(r)}{dr}=0$$

$$-\frac{\ell^2}{3mr_0^3}+\alpha=0 \longrightarrow r_0=\left(\frac{\ell^2}{m\alpha}\right)^{1/3}$$

הנגזרת השניה היא:

$$\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}=+\frac{3\ell^2}{mr^4}$$

אולם מעניין אותנו הנגזרת השניה בנקודה $r=r_0$, ולכן נציב את ערך r_0:

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}=\frac{3\ell^2}{m}\frac{m^{4/3}\alpha^{4/3}}{\ell^{8/3}}=\frac{3m^{1/3}\alpha^{4/3}}{\ell^{2/3}}$$

לכן, בקירוב, ניתן לרשום את הפוטנציאל כ:

אין איבר סדר ראשון כאן כי הפיתוח הוא סביב המינימום!

$$U(r)=\underbrace{U(r_0)}_{\text{סתם קבוע}}+\frac{1}{2}U''_{eff}(r-r_0)^2=U(r_0)+\frac{3}{2}\frac{m^{1/3}\alpha^{4/3}}{\ell^{2/3}}\left(r-\left(\frac{\ell^2}{m\alpha}\right)^{1/3}\right)^2$$

משוואת התנועה תהיה כמו של אוסצילטור הרמוני:

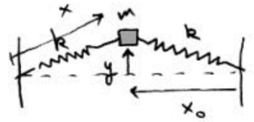
$$m\ddot{r}=-\frac{3m^{1/3}\alpha^{4/3}}{\ell^{2/3}}\left(r-\left(\frac{\ell^2}{m\alpha}\right)^{1/3}\right)$$

-5-
24.11.04

דוגמה לפוטנציאל שהמינימום שלו לא הרמוני.

כדי לראות שלא תמיד המינימום הוא הרמוני, נסתכל על הדוגמה הבאה:

נתונה מסה m המחוברת לשני קפיצים כמתואר בציור.



כמו כן נתון כי במצב y=0 הקפיצים באורך שיווי משקל x_0 שלהם.

א. מהו הפוטנציאל כתלות בהסחה y? מהו הקירוב הנמוך ביותר בו ניתן לתאר אותו?

תחת הסחה y, אורך קפיץ אחד הוא: $x = x_0^2+y^2$

הפוטנציאל הוא לכן:

שני קפיצים

$$U(y) = 2\cdot\frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = k\left(\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0\right)^2$$

א. כעת נשתמש בטור טיילור על מנת למצוא את האיברים המובילים:

דרך I: נחשב את הנגזרות בדרך ישרה: (אוכו!)

$$U'(y) = \frac{2k\left(\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0\right)y}{\sqrt{x_0^2+y^2}}\Bigg|_{y=0} = 0$$

$$U''(y) = \frac{2k\left(x_0^2\sqrt{x_0^2+y^2}+y^2\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0^3\right)}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}\Bigg|_{y=0} = 0$$

$$U'''(y_0) = \frac{6k\,x_0^3 y}{(x_0^2+y_0^2)^{5/2}}\Bigg|_{y=0} = 0$$

$$U^{(4)}(y_0) = \frac{6kx_0^3\left(x_0^2-4y^2\right)}{(x_0^2+y^2)^{7/2}}\Bigg|_{y=0} = \frac{6k}{x_0^2}$$

$$\rightarrow U(y) \simeq \frac{6k}{4!\,x_0^2}y^4 + O(y^6)$$

לא יכול להכיל איבר מהצורה ay^5 כי הפוטנציאל סימטרי ב- y ולכן יכול רק חזקות זוגיות!

איברים מסדר y^6 ומעלה.

דרך 2: נפתח כבר את השורש:

$$U(y) = k\left(\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0\right)^2 \simeq k\left(x_0+\frac{y^2}{2x_0}-x_0\right)^2 = \frac{ky^4}{4x_0^2}$$

$$\sqrt{x_0^2+y^2} \simeq x_0 + \frac{y^2}{2x_0}$$

אותו הדבר כמו למעלה,

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x_0}}(x-x_0)\Big|_{x_0=0} = 1+\frac{x}{2}$$

פיתוח טיילור

כעת משראינו כיצד מתקבל פוטנציאל הרמוני ממינימום של פוטנציאלים שונים,
עלינו לפתור את משוואת התנועה.

המשוואה אותה אנו צריכים לפתור היא:

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0)$$

ראינו בעבר כי ניתן לפתור בעיה לא הומוגנית זו (בגלל האיבר kx_0)
ע"י פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית + פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית.
הפעם נפתור ע"י החלפת משתנים.

נגדיר: $\xi \equiv x - x_0$ ואז $\dot{\xi} = \dot{x}$ ו- $\ddot{\xi} = \ddot{x}$ ונקבל משוואה הומוגנית:

$$m\ddot{\xi} = -k\xi$$

אנו מחפשים פונקציה שהנגזרת השניה שלה פרופורציונית לפונקציה עצמה,
ננחש פתרון מהצורה:

$$\xi = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$-mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -kA\cos(\omega t + \varphi_0)$$

נמצא שהמשוואה מתקיימת אם: $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ω - התדירות הזויתית. (רדיאנים לשניה)

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ - התדירות (מחזורים לשניה)

$P = 1/f$ - זמן מחזור של התנודה.

28.11.04

שימו לב כי ישנם שני קבועי אינטגרציה למשוואה שהיא <u>מסדר שני</u>

(דהיינו, מופיעות נגזרות שהן עד סדר שני) ולכן הפתרון שנמצא הינו הכללי ביותר.

ניתן גם לכתוב את הפתרון בצורה:

$$\xi = A\cos(\omega t+\varphi_0) = A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)$$

ועדין מתואר ע"י שני קבועים.

הפתרון עבור x הוא:

$$x = \xi + x_0 = x_0 + A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

למה שווים A ו-φ_0? תלוי בתנאי התחלה!

<u>דוגמא:</u>

נניח כי נתון שב- $t=0$ המהירות היתה אפס ואילו הקפיץ מתוח עד x_i.

מה ערכם של קבועי האינטגרציה?

* <u>פתרון:</u>

נרשום את הפתרון בעזרת sin ו-cos לשם נוחות.

$$x = x_0 + A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$x(t=0) = x_0 + A_1 \overset{\text{נתון}}{=} x_i$$

$$v(t=0) = \frac{dx}{dt} = A_2\omega \overbrace{\cos(\omega t)}^{1} \overset{\text{נתון}}{=} 0$$

לכן:

$$A_1 = (x_i - x_0)$$

$$A_2 = 0$$

והפתרון המקיים את תנאי ההתחלה:

$$x = x_0 + (x_i - x_0)\cos(\omega t)$$

<u>דוגמא שנייה</u>:

נניח כי ב- $t=0$ הקפיץ היה בנקודת שיווי משקל יחד עם מהירות v_i. מה ערכם של קבועי האינטגרציה הפעם?

<u>פתרון</u>:

$$x(t=0) = x_0 + A \overset{\text{נתון}}{=} x_0$$

הפעם:

$$v(t=0) = \omega B \overset{\text{נתון}}{=} v_i \quad \Rightarrow \quad A=0 \,;\, B = v_i/\omega$$

ולכן הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הפעם הוא:

$$x = x_0 + \frac{v_i}{\omega}\sin(\omega t)$$

<u>פתרון האוסצילטור ההרמוני בעזרת אנרגיה</u>:

היות והכח הוא תלוי מיקום, הוא משמר. נרשום לכן את האנרגיה של המערכת:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}k\xi^2$$

נגדיר שוב $\xi = x - x_0$

נקבל:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \underbrace{\frac{2E}{m}}_{\equiv a \ (\text{נגדיר})} - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\equiv b}\xi^2 = a - b\xi$$

(אני מגדירים את a ו-b לשם נוחות כדי לא לסבך יותר מדי אותיות...)

אינטגרציה:

$$\int_{\xi(t=0)}^{\xi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{a-b\xi^2}} = \int_{t=0}^{t} dt$$

נפתח ספר אינטגרלים ונמצא:

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,\xi\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi(t)} = t - t_0$$

ע"י הגדרה מחדש של קבוע האינטגרציה:

$$\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,\xi\right) = \sqrt{b}\,(t-\tilde{t})$$

28.11.04

או לחילופין:

$$\xi = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\sin\left(\sqrt{b}\,(t-\tilde{t})\right)$$

הצבה של a ו- b נותנת:

$$\xi = \sqrt{\frac{2E}{\cancel{m}}\,\frac{\cancel{m}}{k}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,(t-\tilde{t})\right)$$

אם נגדיר: $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ ונגדיר מחדש את קבוע האינטגרציה (עוד לא נקבע ערכו ולכן מותר לנו לעשות פה הגדרה נוחה לנו).

$$\xi = \sqrt{\frac{2E}{k}}\,\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$$x = x_0 + \sqrt{2E/k}\,\sin(\omega t + \varphi_0)$$

הפעם המשוואה שהיתה לנו היא משוואה מסדר ראשון, ולכן הופיע רק קבוע אינטגרציה אחד. הסיבה היא ש- E הוא כבר קבוע אינטגרציה שהתקבל מהפיכת משוואת התנועה השנייה לשימור אנרגיה (כלומר כבר עשינו אינטגרציה אחת עוד קודם!).

ע"י שינוי פאזה φ_0 ניתן כמובן לקבל cos ובדיוק כפי שהתקבל קודם.

אנרגיה ממוצעת באוסילטור הרמוני

למה שווה האנרגיה הקינטית הממוצעת של אוסילטור הרמוני?

$$\underbrace{\overline{K} \equiv \langle K \rangle}_{\text{שני סימונים מקובלים לממוצע}} = \frac{1}{P}\int_0^P K(t)\,dt = \frac{1}{P}\int_0^P \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

נציב את $\dot{x}$:

$$x = x_0 + A\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

לכן:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{P}\int_0^P \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\,dt =$$

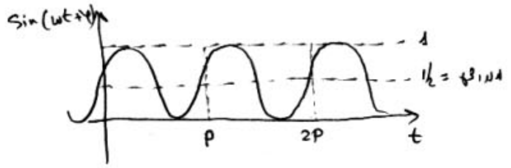
$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{P}\int_0^P \sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$

28.11.04

אולם, $\overline{\sin^2(\omega)} = \frac{1}{2}$, בהינתן, אם מסתכלים על מספר מחזורים שלם מקבלים:

$$\frac{1}{np}\int_0^{np} \sin^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2}$$

באופן גרפי:



לכן: $\langle K\rangle = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2$

באופן דומה, האנרגיה הפוטנציאלית הממוצעת:

$$\langle U\rangle = \frac{1}{p}\int_0^{p} \frac{1}{2} k(x-x_0)^2\,dt = \frac{1}{2} k A^2 \underbrace{\frac{1}{p}\int_0^{p} \cos^2(\omega t+\varphi_0)\,dt}_{=1/2}$$

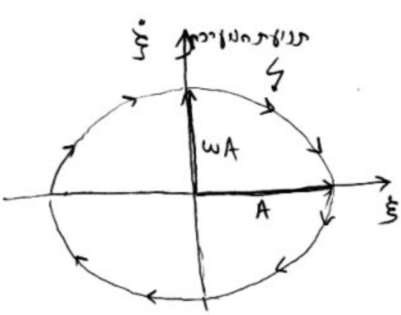
$$\langle U\rangle = \frac{1}{4} kA^2 = \frac{1}{4} m\omega^2 A = \langle K\rangle \;!$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow k = \omega^2 k$$

<u>מסקנות:</u> * האנרגיה של נדנוד הרמוני יחסית לאמפליטודה בריבוע. $\left(E = \frac{1}{2}kA^2\right)$

* בממוצע האנרגיה מתחלקת שווה בשווה בין אנרגיה קינטית לאנרגיה פוטנציאלית.

<u>נדנוד הרמוני במרחב הפאזה</u>



במרחב של $\{\xi,\dot\xi\}$

הנדנוד מתואר ע"י תנועה לאורך אליפסה וזאת מכיוון שרכיב "x" (שהוא ξ) יחסי ל- $\cos(\omega t)$ ואילו רכיב "y" שהוא $\dot\xi$ יחסי ל- $\sin(\omega t)$

30.11.04

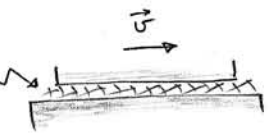
אוסצילטור הרמוני עם דעיכה:

ראינו שכשחלקיק נע בתוך נוזל במהירות (נמוכה), פועל עליו כח חיכוך היחסי למהירות היחסית בין החלקיק לבין הנוזל:

$$\vec{F}_d = -\alpha\vec{v}$$

כח חיכוך דומה פועל למשל כשיש חומר סיכה בין תנועה של שני גופים:

חומר סיכה (שמן למשל).



מה קורה אם המסה שלנו נמצאת בנוזל כך שפועל עליה כח החיכוך הנ"ל בנוסף לכח הקפיץ? הסיבה שאנו מתעניינים בבעיה זו היא מפני שבעיות דומות, דהיינו של פוטנציאל הרמוני עם ריסון מופיעות בהרבה מקרים בפיסיקה.

* **מסה ללא קפיץ:** לפני שנחבר את המסה לקפיץ, נזכר מה קורה ללא הכח ההרמוני:

משוואת התנועה:

$$ma = F_d \longrightarrow m\frac{dv}{dt} = -\alpha v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m}dt$$

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{\alpha}{m}(t-t_0)$$

$$v = v_0\, e^{-\alpha/m\,(t-t_0)}$$

כלומר, המהירות של המסה דועכת בצורה אקספוננציאלית. לכן, ננסה לחפש פתרון דומה למשוואת האוסצילטור המרוסן שלנו.

משוואתינו:

$$m\ddot{x} = -\alpha\vec{v} - k(x-x_0)^2$$

נעבור ל- $\xi = x - x_0$ ונקבל:

$$m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + k\xi = 0$$

ננחש פתרון מהצורה:

$$\xi = A\underbrace{e^{-t/\tau}}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

כפי שמסה ללא קפיץ דועכת תנועתה בצורה אקספוננציאלית, ננחש פתרון דועך עבור האוסצילטור ונמצא את τ

30.11.04

כדי להציב במשוואה, נחשב את הנגזרות של ξ :

$$\dot{\xi} = -\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t+\varphi_0) - A\omega e^{-t/\tau}\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$\ddot{\xi} = +\frac{A}{\tau^2}e^{-t/\tau}\cos(\omega t+\varphi_0) + \frac{2A\omega}{\tau}e^{-t/\tau}\sin(\omega t+\varphi_0) - A\omega^2 e^{-t/\tau}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

נציב את הנגזרות במשוואה ונקבל:

$$m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + k\xi = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{mA}{\tau^2}e^{-t/\tau}\cos() + \frac{2mA\omega}{\tau}e^{-t/\tau}\sin() - Am\omega^2 e^{-t/\tau}\cos() -$$

לא נרשום $\omega t+\varphi$ לשם נוחות.

$$- \frac{A\alpha}{\tau}e^{-t/\tau}\cos() - A\omega\alpha e^{-t/\tau}\sin() + kAe^{-t/\tau}\cos() = 0$$

המשך המשוואה!

המשוואה הזו נכונה עבור כל ω ולכן עבור כל ארגומנט של ה- sin וה- cos.
לכן, מה שמכפיל את הקוסינוסים ומה שמכפיל את הסינוסים צריך להתאפס באופן בלתי תלוי. נקבל:

מה שמכפיל את הסינוסים:

$$\frac{2m\omega}{\tau} - \alpha\omega = 0$$

(וחלוקה ב- $Ae^{-t/\tau}\sin()$)

מה שמכפיל את הקוסינוסים:

$$\frac{m}{\tau^2} - m\omega^2 - \frac{\alpha}{\tau} + k = 0$$

מהמשוואה הראשונה:

$$\tau = \frac{2m}{\alpha}$$

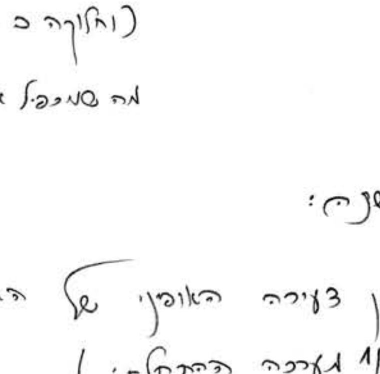
τ הוא הזמן דעיכה האופייני של האמפליטודה (כמה זמן לוקח לאמפליטודה של האוסצילטור להגיע לכדי $1/e$ מערכה ההתחלתי).

נציב במשוואה השניה ונקבל:

$$\underbrace{\frac{\alpha^2}{4m^2}}_{1/\tau^2}m - m\omega^2 - \underbrace{\frac{\alpha}{2m}}_{1/\tau}\cdot\alpha + k = 0$$

$$\hookrightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} - \underbrace{\frac{\alpha^2}{4m^2}}_{1/\tau^2}$$

וכך נראה הפתרון:



מה שמצאנו הוא כי הריסון משנה את תדר האוסצילטור – הוא מקטין אותו. אולם, עבור τ קטן מדי (ריסון חזק מדי) אנו מקבלים שאין פתרון עבור ω. מה קורה אז?

ובכן, מה קורה כאשר τ נהיה קטן מדי, כלומר שהריסון α גדול מדי?
במקרה כזה אין פתרון עבור ω. המשמעות היא שאין לנו פתרון אוסצילטורי.

במקום זה, ננחש פתרון מהצורה: $\xi = Ae^{-t/\tau} \equiv Ae^{-rt}$

ונראה שישנם למעשה שני פתרונות עבור r במקרה ש- τ קטן מדי.

נגזור את ξ:

$$\xi = Ae^{-rt}$$
$$\dot{\xi} = -rAe^{-rt}$$
$$\ddot{\xi} = +r^2Ae^{-rt}$$

נציב במשוואת התנועה ונקבל:

$$m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + k\xi = 0$$

$$mr^2Ae^{-rt} - \alpha rAe^{-rt} + kAe^{-rt} = 0$$

$$\underbrace{m}_{a} r^2 - \underbrace{\alpha}_{b} r + \underbrace{k}_{c} = 0$$

פתרון משוואה ריבועית:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4mk}}{2m}$$

$$= \frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

הפעם השורש הוא חיובי עבור המקרה בו הוא שלילי כשניחשנו פתרון מהצורה $\xi = Ae^{-t/\tau}\cos()$, המשמעות שישנם כעת שני פתרונות הדועכים אקספוננציאלית.

$$\xi = Ae^{-r_1t} + Be^{-r_2t}$$

את הקבועים A ו- B ניתן למצוא אם נתונים שני תנאי התחלה למשל.
(לדוגמא, הסחה ומהירות ב t נתון).