מספרים קומפלקסיים

נעבור בקצרה על כלי מתמטי שימושי מאוד לבעיית האוסצילטור ההרמוני (ולבעיות רבות מאד בחיי היום יום!). כלי זה הוא המספרים הקומפלקסיים, או בעברית - מספרים מרוכבים (complex number).

* הגדרת i :

$$i \equiv \sqrt{-1}$$

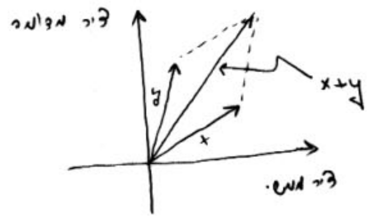
* מספר מרוכב כללי, מכיל רכיב ממשי ורכיב מדומה:

$$\underbrace{x}_{\text{מספר מרוכב}} = \underbrace{a}_{\substack{\text{חלק ממשי}\\ \text{(Real)}}} + i\underbrace{b}_{\substack{\text{חלק מדומה}\\ \text{(Imaginary)}}}$$

מספר מרוכב דומה לוקטור דו מימדי, כך שחיבור שני מספרים קומפלקסיים הוא חיבור הרכיבים:

$$x+y = \overbrace{(a+ib)}^{x} + \overbrace{(c+id)}^{y} = (a+c) + i(b+d)$$

ובצורה גרפית:



וחיסור באופן דומה:

$$x-y = (a+ib)-(c+id) =$$
$$=(a-c)+i(b-d)$$

מה שווה הכפלה של שני מספרים מרוכבים?

$$x\cdot y = (a+ib)(c+id) = ac + aid + ibc + (i)^2 bd =$$
$$=(ac-bd) + i(ad+bc)$$

ובאופן פרטי:

$$x^2 = x\cdot x = (a^2-b^2) + 2iab$$

1.12.04

ניתן להגדיר גודל של מספר קומפלקסי (modulus):

$$|x|^2 = a^2 + b^2$$

וצמוד קומפלקסי (complex conjugate):

$$\bar{x} = a - ib$$

אנו יכולים לראות מיד כי מתקיים הקשר:

$$x\bar{x} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$$

$x \cdot y$ - בנוסחת "c" "d"

ז.א: $x\bar{x} = |x|^2$.

כעת נראה כיצד ניתן לחלק במספר קומפלקסי:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\cdot\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

(כפול בצמוד למעלה ולמטה.

ולכן:

$$\frac{y}{x} = \frac{c+id}{a+ib} = \frac{(c+id)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{ac+bd+i(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

דוגמא: למה שווה $1/i$?

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

מוזר!

* דוגמא, למה שווה הפתרון של המשוואה הריבועית $x^2+1=0$?

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

* והמשוואה $x^2-2x+2=0$, מה פתרונה?

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = 1\pm i$$

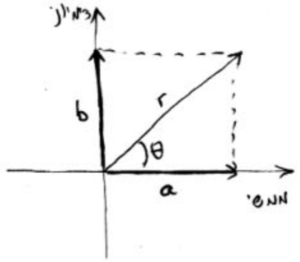
פתרון משוואה ריבועית

באופן כללי ניתן להראות שאם המשוואה היא ממשית אז הפתרונות הקומפלקסיים יופיעו עם הצמוד שלהם.

1.12.04

מספרים קומפלקסיים בתיאור פולרי:

כמו שוקטור רגיל דו-מימדי ניתן לתאר בקואורדינטות קרטזיות ובקואורדינטות פולריות, כך ניתן לעשות עם מספרים קומפלקסיים.



דהיינו:

$$x = a + ib = r\cos\theta + i r\sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

למה שווה הביטוי בסוגריים?

נוכיח כי $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

נעשה זאת ע"י פיתוח לטור טיילור סביב האפס:

הנגזרת ה-n-ית

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(i)}_{(0)} \frac{x^n}{n!}$$

עבור e^x, כל הנגזרות שוות! ב- $x=0$ הן שוות ל- 1, לכן:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[x=i\theta]{} e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\theta^n}{n!}$$

אולם:

$$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \ ....$$

כלומר, אם נחלק לחזקות זוגיות ואי זוגיות:

$$i^{2n-1} = i(-1)^{n-1}$$
$$i^{2n} = (-1)^n$$

לכן, אם נחלק את הסכום של $e^{i\theta}$ לאיברים זוגיים ואי זוגיים:

$$e^{i\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!} + i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\theta^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

כעת נראה מה הפיתוח טיילור של כל סכום בנפרד - נעשה זאת ע"י פיתוח לטור של sin ו- cos.

1.12.09

כדי לפתח $\cos(\theta)$, אני צריך את הנגזרות הפונקציה:

$$\cos(x)\Big|_{x=0} = 1 \qquad \frac{d\cos(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \sin x\Big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{d^2\cos(x)}{dx^2}\Big|_{x=0} = -\cos(x)\Big|_{x=0} = -1$$

כך באופן כללי:

$$\frac{d^n\cos(x)}{dx^n}\Big|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{n/2} & n - \text{זוגי} \\ 0 & n - \text{אי זוגי} \end{cases}$$

לכן:

$$\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n\cos(\theta)}{d\theta^n}\Big|_{\theta=0} \frac{\theta^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\theta^{2m}}{(2m)!}$$

סכימה רק על ה-n הזוגי. $n=2m$

זהו האיבר הראשון שמופיע בסכום.

וכעת לסינוס:

$$\frac{d^n\sin(x)}{dx^n} = \begin{cases} 0 & n - \text{זוגי} \\ (-1)^{(n-1)/2} & n - \text{אי זוגי} \end{cases}$$

ולכן:

$$\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n(\sin(\theta))}{d\theta^n}\Big|_{\theta=0} \frac{\theta^n}{n!} = \sum_{m=1} \frac{(-1)^{m-1}\theta^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

סכימה רק על ה-n-ים האי זוגיים: $n=2m-1$

ז"א הסכומים המופיעים בכלליים עבור $e^{i\theta}$ הם בדיוק $\cos\theta$ ו- $\sin\theta$, לכן

זהות אוילר – $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

מספרים הם זהים אם החלק הממשי והחלק המדומה שווים בין שני המספרים.

לכן, אם: $x_1 = r_1e^{i\theta_1}$ ו- $x_2 = r_2e^{i\theta_2}$, נקבל שהמספרים זהים: $x_1 = x_2$

אם $r_1 = r_2$ ו- $\theta_1 = \theta_2 + n2\pi$ כאשר n מספר שלם.

הכפלה של שני מספרים:

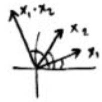
$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\ &= r_1r_2\Big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big) \\ &= r_1r_2\Big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big) \end{aligned}$$

הכפלה היא הכפלת הגדלים r וחיבור הזוית θ.

1.12.04

כמובן, שאם עובדים עם $e^{i\theta}$ ההכפלה נהיית טריוויאלית!

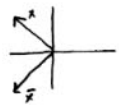
$$x_1\cdot x_2 = r_1 e^{i\theta_1}\cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$



לכן הרבה יותר קל לעבוד עם $e^{i\theta}$ מאשר סינוס וקוסינוס...

* צמוד קומפלקסי:

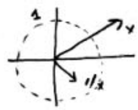
$$\bar{x} = \overline{re^{i\theta}} = r\left(\overline{\cos\theta + i\sin\theta}\right) = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) =$$
$$= r\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) = re^{-i\theta}$$



ז.א. הצמוד הקומפלקסי מתקבל ע"י החלפת i ב- $-i$. ולא קשה להבין היכן נמצא בפונקציה שלו. (וזה נכון באופן כללי).

* חלוקה:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$



דוגמא:
במקרה הפרטי של $x=i$ ישנו: $x = 1\cdot e^{i\pi/2}$ ולכן: $\frac{1}{i} = \frac{1}{e^{i\pi/2}} = e^{-i\pi/2} = -i$

ובאופן כללי:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

* חזקה:

$$x^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$$

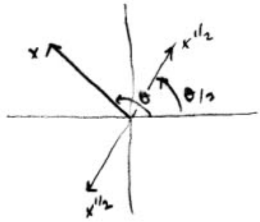
α יכול להיות שלם, אבל לא חייב להיות!

הערה חשובה: היות ו- $re^{i\theta}$ ו- $re^{i(\theta+n2\pi)}$ הם אותו מספר, להעלות מספר בחזקת α יש לעשות עבור כל האפשרויות של n. לדוגמא:

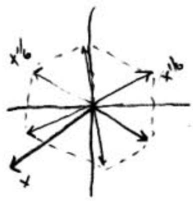
$$x = re^{i\theta} \quad x^{1/2} = r^{1/2}e^{i\theta/2}, \quad r^{1/2}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)} = r^{1/2}e^{i(\theta+\pi)}$$

1.12.04

בצורה גרפית:



עבור חזקה גבוהה יותר:



באופן כללי למשוואה פולינומית מסדר n ישנם n פתרונות במישור הקומפלקסי!

תרגיל. למה שווה i^i?

$$i^i=\left(e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}\right)^i=e^{i\cdot i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}$$

$$=e^{-\pi/2-2\pi n}$$

כלומר ישנם אין-סוף פתרונות ממשיים - i^i! המספר המתקבל מ- $n=0$ נקרא: principle value.

ואנו כבר רגילים לאפשרות הזו, למשל כשאנו כותבים: $x^2=a \rightarrow x=\pm\sqrt{a}$
אנו אומרים לקחת את ה- principle value של השורש כמו $+a$ או $-a$!

דוגמא נוספת היא הפונקציה $\sin^{-1}(x)$. יש לה אין סוף ערכים! אולם אנו רגילים לקחת רק אחד.

ודוגמא אחרונה:

$$\ln x=\ln\left(re^{i(\theta+2\pi n)}\right)=\ln r+i(\theta+2\pi n)$$

5.12.04

הנדנד ההרמוני - פתרון בעזרת מספרים מרוכבים

נחזור חזרה למשוואת האוסצילטור, אולם הפעם נשתמש במספרים מרוכבים ונראה שהפתרון נהיה פשוט הרבה יותר - ראשית, "המקרים" השונים אותם פגשנו בבעית הנדנד המרוסן מתוארים כולם בעזרת תיאור יחיד. שנית, המתמטיקה פשוטה יותר וכך ניתן ביתר קלות לפתור בעיות מורכבות (אה, ז.א., מסובכות יותר).

מסה על קפיץ:

נתחיל במקרה הפשוט ביותר, עם משוואה:

$$m\ddot{x} = -kx$$

ננחש פתרון מהצורה: $x = Ae^{\lambda t}$ אולם נרשה ל-λ להיות מספר מרוכב, וגם כמובן ל-A, כדי שנוכל לקבל x ממשי טהור!

נגזור ונקבל:

$$\dot{x} = \lambda A e^{\lambda t} \qquad \ddot{x} = \lambda^2 A e^{\lambda t}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$(m\lambda^2 + k) A e^{\lambda t} = 0$$

לכן,

$$\lambda^2 = -k/m \longrightarrow \lambda = \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{\omega}}}_{\equiv \omega}$$

היות וישנם שני פתרונות, הפתרון הכללי של המשוואה הוא:

$$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

נוכל לתאר את הפתרון בעזרת סינוס וקוסינוס:

$$x = A_1\cos(\omega t) + A_1 i \sin(\omega t) + A_2\cos(\omega t) - A_2 i \sin(\omega t)$$

כי $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

או לחילופין:

$$x = (A_1 + A_2)\cos(\omega t) + i(A_1 - A_2)\sin(\omega t)$$

אמנם אנו משתמשים במספרים מרוכבים כדי לפתור את הבעיה אולם x מתאר גודל פיזיקלי ולכן הוא חייב להיות ממשי טהור.

מה התנאים על A_1 ו-A_2 כדי ש-x אכן יהיה ממשי?

5.12.04

כדי ש- x יהיה ממשי, הפקטור לפני ה- cos צריך להיות ממשי
ואילו הפקטור המכפיל את sin צריך להיות מדומה.

נניח כי $A_1=a+ib$, ואילו $A_2=c+id$, לכן:

$$A_1+A_2=(a+c)+i(b+d)\overset{\text{צריך להיות}}{=}\text{ממשי}\Rightarrow b=-d$$
$$A_1-A_2=(a-c)+i(b-d)=\text{מדומה}\Rightarrow a=c$$

כלומר: $A_1=a+ib,\quad A_2=a-ib=A_2^*$

לכן, את הפתרון ניתן לרשום בצורות הבאות:

$$x=Ae^{i\omega t}+A^*e^{-i\omega t}=2\underbrace{Re(A)}_{\text{חלק ממשי של }A}\cos(\omega t)+2\underbrace{Im(A)}_{\text{חלק מדומה של }A}\sin\omega t$$
$$x=2Re(Ae^{i\omega t})$$
$$x=2|A|\cos(\omega t+\varphi)$$

ואם רושמים את A בצורה $A=|A|e^{i\varphi}$ אז:

ז.א. הפאזה ב- A היא גם הפאזה המופיעה ב- cos.

שימו לב שאמנם A_1 ו- A_2 מכילים 4 נעלמים, היות ונדרשים להיות מרוכבים, אולם הדרישה כי x יהיה ממשי מחזירה אותנו למצב שישנם רק שני רכיבים חופשיים (למשל $Re(A)$ ו- $Im(A)$ או $|A|$ ו- φ) רק שעדיין ישנם שני קבועי אינטגרציה.

<u>נדנוד עם דעיכה</u>

נחזור שוב למשוואת הנדנוד עם דעיכה: $m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$

ננחש, שוב, פתרון מהצורה $x=Ae^{\lambda t}$ ונקבל: $m\lambda^2+\alpha\lambda+k=0$

למשוואה ריבועית זו שני הפתרונות:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{\alpha}{2m}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}$$

הפתרון הכללי הינו:

$$x=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}$$

הפתרון הכללי הנ"ל מכיל את שני הגבולות שראינו בשבוע שעבר: עבור $\sqrt{\ }$ שהוא ממשי ועבור $\sqrt{\ }$ שהוא מדומה.

במקרה בו ה-$\sqrt{\ }$ ממשי, האקספוננטים הם גם ממשיים, וכדי לקבל x שהוא ממשי, עלינו פשוט לבחור A_1 ו-A_2 שהם ממשיים.

עבור $\sqrt{\ }$ שהוא מדומה, ניתן לכתוב את $\lambda_{1,2}$ בצורה:

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{1}{\tau}}_{\text{החלק הממשי}} \pm i\underbrace{\omega}_{\text{החלק המדומה מה-}\sqrt{\ }} \quad ; \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{2m} \, , \quad \omega = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}$$

במקרה כזה, ניתן לכתוב את הפתרון הכללי בצורה:

$$x = A_1 e^{(-1/\tau + i\omega)t} + A_2 e^{(-1/\tau - i\omega)t}$$

נפריד את החלק הממשי מהחזקה ב-exp, ונקבל:

$$x = e^{-t/\tau}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

זהו פתרון כמו הפתרון לאוסצילטור ללא דעיכה עם ההבדל שהפתרון דועך כמו $e^{-t/\tau}$ ו-ω הוא ביטוי יותר מורכב.

את x ניתן לרשום לכן:

$$x = e^{-t/\tau}\left(A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}\right)$$

או בצורה:

$$x = \mathrm{Re}\left(2A e^{i\omega t} e^{-t/\tau}\right) = 2|A| \cos(\omega t + \overset{\text{פאזה של } A}{\varphi}) e^{-t/\tau}$$

כזכור: A מספר מרוכב ולכן מכיל שני קבועי אינטגרציה.

אוסצילטור הרמוני עם אילוץ

כעת מעניין אותנו לפתור את הבעיה של נדנד עליו פועל כח חיצוני מחזורי בתדירות מסוימת. (נניח לרגע כי אנו מפעילים כח בצורה: $\underbrace{F_E}_{\text{External}} = F_0 e^{i\underbrace{\omega_e}_{\text{תדירות חיצונית}} t}$

(כמובן, ש-F זה הוא מורכב ולכן לא מציאותי, אולם את הפתרון של הבעיה ה"ממשית" נשיג ע"י חיבור של השפעת כח זה עם הבעיה ה"מדומה" הקומפלקסית" – כך נראה זאת עוד מעט). המשוואת תנועה שלנו:

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\frac{dp}{dt}} + \underbrace{\alpha\dot{x}}_{\underset{\text{חיכוך}}{-F_d}} + \underbrace{kx}_{\underset{\text{קפיץ}}{-F_k}} = \underbrace{F_0 e^{i\omega_e t}}_{\underset{\text{כח חיצוני}}{F_{ext}}}$$

כיצד פותרים משוואה כזו? אנו יודעים כבר שפתרון כללי של משוואה לינארית לא הומוגנית הוא בצורה של פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית + פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית. הפתרון ההומוגני כבר נתון לנו ממקודם, הוא מתאר אוסצילציות דועכות (או שני אקספוננטים דועכים). נתמקד כעת על מציאת פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית. ננחש פתרון פרטי מהצורה: $x_p = A_p e^{i\omega_e t}$ ז"א. פתרון המתנדנד ביחד עם הכח המאלץ. נציב במשוואה ונקבל:

$$\left(-m\omega_e^2 + i\omega_e\alpha + k\right) A_p e^{i\omega_e t} = F_0 e^{i\omega_e t}$$

הניחוש עם $e^{i\omega_e t}$ השתלם היות וכופל זה מצטמצם! נקבל שאמפליטודת הפתרון הפרטי היא:

$$A_p = \frac{F_0}{\left(-m\omega_e^2 + i\omega_e\alpha + k\right)} \underset{\text{ע"י הכפלה בצמוד הקומפלקסי}}{=} F_0 \frac{k - m\omega_e^2 - i\omega_e\alpha}{\left(k - m\omega_e^2\right)^2 + \omega_e^2\alpha^2}$$

היות ו- F_e שלקחנו מרוכב, רק גם הפתרון. כדי לקבל פתרון ממשי, אנו צריכים כח שהוא ממשי. נקח $F_e = F_0\cos(\omega t)$, את ה-cos נכתוב בעזרת ה-exp:

$$\left.\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos\omega t + i\sin\omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos\omega t - i\sin\omega t \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{חיבור המשוואות}]{} \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

לכן: $F_0\cos\omega_e t = \frac{F_0}{2} e^{i\omega_e t} + \frac{F_0}{2} e^{-i\omega_e t}$. הפתרון הפרטי המתקבל מכח זה הוא: הפתרון הפרטי שקבלנו קודם + הפתרון הצמוד הקומפלקסי!

$$x_p = \underbrace{\frac{F_0}{2} \frac{\left(k - m\omega_e^2\right) - i\omega_e\alpha}{\left(k - m\omega_e^2\right)^2 + \omega_e^2\alpha^2}}_{\equiv A_p/2} e^{i\omega_e t} + \underbrace{\frac{F_0}{2} \frac{\left(k - m\omega_e^2\right) + i\omega_e\alpha}{\left(k - m\omega_e^2\right)^2 + \omega_e^2\alpha^2}}_{\equiv A_p^*/2} e^{-i\omega_e t}$$

$$= \frac{A_p}{2} e^{i\omega_e t} + \frac{A_p^*}{2} e^{-i\omega_e t} = \mathrm{Re}\left(A_p e^{i\omega_e t}\right)$$

את A_p ניתן לכתוב בצורה:

$$A_p = |A_p| \exp(i\varphi_p)$$

עם:

$$|A_p| = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega_e^2\right)^2 + \omega_e^2\alpha^2}} \;;\quad \tan\varphi_p = -\frac{\omega_e\alpha}{\left(k - m\omega_e^2\right)}$$

את הפתרון הכללי ניתן לכתוב בצורה:

נקבעים עפ"י קבועי המשוואה ההומוגנית.

$$x = x_p + x_h = Re\left(|A_p| e^{i\omega_e t + i\varphi_p}\right) + Re\left(|A| e^{i\omega t + \varphi}\right) e^{-t/\tau}$$

אמפליטודת הפתרון יחסית לכח המאלץ.
נקבע ע"פ הכח המאלץ.
פאזת הפתרון יחסית לכח המאלץ!
נקבעים ע"פ תנאי ההתחלה.
דעיכה אקספוננציאלית!

אם נחכה מספיק זמן ($t \gg \tau$) לא ישאר דבר מתנאי ההתחלה היות והללו ידעכו. כל מה שישאר זאת תנועת המערכת כתגובה לכח החיצוני.

<u>מה תכונות הפתרון הפרטי (שהוא התגובה לכח)?</u>

אם נסתכל על הביטוי עבור אמפליטודת הפתרון:

$$|A_p| = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega_e^2)^2+\omega_e^2\alpha^2}}$$

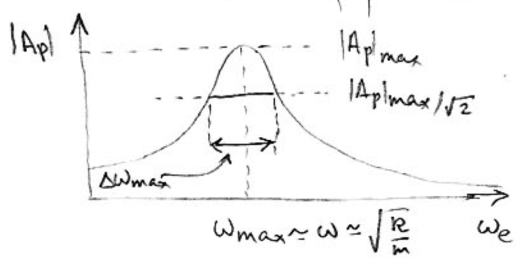
נוכח כי האמפליטודה מקסימלית עבור $\sqrt{\ }$ מינימלי. תנאי זה יתקבל עבור:

$$\frac{d\left((k-m\omega_e^2)^2+\omega_e^2\alpha^2\right)}{d\omega_e} = 0 \Rightarrow 2(k-m\omega_e^2)\cdot 2m\omega_e + 2\omega_e\alpha^2 = 0 \Rightarrow \omega_e^2 = \frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}$$

עבור $\tau = \frac{\alpha}{2m} \gg \frac{1}{\omega}$ התנאי יתקבל עבור

$$\omega_e \simeq \sqrt{\frac{k}{m}} \cong \omega$$

כלומר, אם התדירות של הכח המאלץ היא תדירות הנדנד (+ תיקון עבור דעיכה לא זניחה), האמפליטודה של התנודות מקסימלית. עבור תדירות גבוהה יותר או תדירות נמוכה יותר, ההיסט הנדנד קטן יותר!



המצב בו $\omega_e = \omega$ נקרא רזוננס. ⇐ תדירות המאלץ תואמת את תדירות המערכת.

ראינו בסמסטר כי האנרגיה באוסצילטור יחסית לאמפליטודה בריבוע. נהוג להגדיר את רוחב הרזוננס כתחום תדרים בו האנרגיה היא לפחות חצי מהמקסימום כלומר, התחום בו $|A_p|^2$ יורד לא יותר מכדי $1/2$ מערכו המקסימלי.

בגבול בו $1/\omega \ll \tau$, תחום זה מתקבל עבור

$$\left|(k-m\omega_e^2)\right| < \omega_e\alpha$$

5.12.04

אם נכתוב: $\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}} + \Delta\omega_e$

$$\omega_e^2 = \left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \Delta\omega_e\right)^2 = \left(\frac{k}{m}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{m}{k}}\,\Delta\omega_e\right)^2 \underset{\text{טור טיילור}}{\simeq} \frac{k}{m}\left(1 + 2\sqrt{\frac{m}{k}}\,\Delta\omega_e\right)$$

לכן:

$$k - m\omega_e^2 = \left|k\left(-2\sqrt{\frac{m}{k}}\,\Delta\omega_e\right)\right| \overset{\text{הגדרת הרוחב}}{\leq} \omega_e\alpha$$

ולכן תחום התדירויות המוגדר כחלק מהרזוננס הוא:

$$|\Delta\omega_e| \leq \frac{\omega_e\alpha}{2\sqrt{mk}}$$

הרוחב הכולל של הרזוננס הוא לכן:

$$\Delta\omega_{max} = \frac{\omega_e\alpha}{\sqrt{mk}}$$

מגדירים את מקדם האיכות Q (Quality factor) כמספר חסר המימדים:

$$Q \equiv \frac{\omega_{max}}{\Delta\omega_{max}} = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha} \qquad \left(\alpha = \frac{\sqrt{mk}}{Q}\right)$$

הוא מתאר כמה "צר" הרזוננס וכמה גבוה:

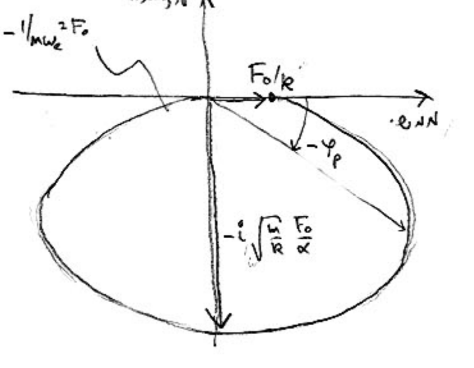
$$|A_p|_{max} \underset{\omega \gg \frac{1}{\tau}}{\simeq} \frac{F_0}{\sqrt{\omega_{max}^2\alpha^2}} \simeq \frac{F_0}{\sqrt{\frac{k}{m}\,m\cdot k/Q^2}} = \frac{F_0}{k}\cdot Q$$

עבור כח קבוע ההסטה היא $\Delta x = F_0/k$. כאן, כח נתון יכול לתת אמפליטודה ענקית עבור Q גדול, הרבה יותר מה-Δx של כח קבוע!

הפאזה: כתלות ב- ω_e נסתכל על A_p במישור הקומפלקס:

$$A_p = \frac{(k - m\omega_e^2) - i\omega_e\alpha}{(k - m\omega_e^2)^2 + \omega_e^2\alpha^2}F_0$$

בדיקה גרפית



מספר מקרים:

$$\omega_e \to 0 \Rightarrow A_p \simeq \frac{1}{k}F_0$$

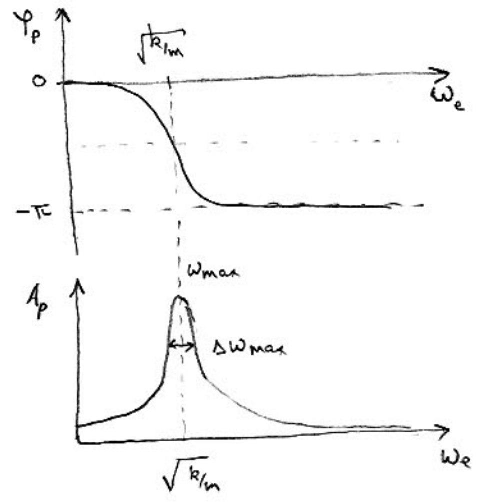
$$\omega_e^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow A_p = -\frac{i}{\omega_e\alpha}F_0$$

$$\omega_e^2 \gg \frac{k}{m} \Rightarrow A_p = -\frac{1}{m\omega_e^2}F_0$$

5.12.04

הפאזה היא לכן:

והאמפליטודה שוב:



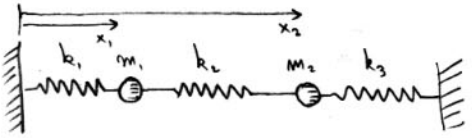
* בתדירויות נמוכות מהרזוננס, האוסצילטור מתנודד באמפליטודה נמוכה ובאותה הפאזה כמו הכח החיצוני.
* בסביבת הרזוננס (באיזור ברוחב יחסי של $1/Q$ מהתדר) האמפליטודה גדלה מאוד והפאזה האוסצילטור משתנה מהר מאוד עם התדר ω_e. בשיא, ב- $\omega_e=\sqrt{\frac{k}{m}}$ (בקירוב אם Q לא גדול מאוד) הפאזה היא פיגור של 90° ($\pi/2$) אחרי הכח החיצוני.
* בתדירויות גבוהות ההגבר של הקפיץ קטן עד התאפס והפאזה היא בדיוק הפוכה לכח החיצוני.

התדירויות הטבעיות של מערכות (דהיינו, ה-ω או שווים) שמתקבלות בפתרון המערכת ההומוגנית ללא כוחות מאלצים נקראות תדירויות עצמיות. עבור קפיץ עם דרגת חופש אחת יש תדירות אחת כזו. עבור שתי מסות על קפיצים, יהיו שתי תדירויות וכו'...

במערכת של הקפיץ הבודד ראינו שכאשר מאלצים כח בתדירות העצמית, ההיגב של המערכת עצום, והסיבה היחידה שאין התבדרות היא מפני שיש דעיכה במערכת! מצב כזה נקרא רזוננס.

דוגמא מורכבת יותר - שתי מסות על קפיצים

נסתכל על בעיה מורכבת יותר המכילה שתי מסות הקשורות זו לזו ולקירות כמתואר בציור:



כדי "לפתור" את הבעיה הזו אנו צריכים ראשית למצוא את משוואות התנועה.

נגדיר אורכי שיווי משקל לקפיצים $l_{1,2,3}$. במקרה כזה, משוואות התנועה תהיינה:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1-l_1) + k_2(x_2-x_1-l_2)$$

קפיץ 1 "רוצה" למשוך את המסה שמאלה אם x_1 גדל ממצב שיווי משקל.

אם קפיץ 2 מתארך הוא רוצה למשוך את m_1 ימינה, ואת m_2 שמאלה

אם x_2 גדל משיווי משקל, k_3 רוצה להקטין את x_2 (לדחוף שמאלה)

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2-x_1-l_2) - k_3(x_2-l_3)$$

שלב I: המשוואות אינן הומוגניות. הסיבה הפיסיקלית היא ש- x_1 ו- x_2 אינם מוגדרים סביב מצב השיווי משקל. לכן, בשלב ראשון, יש למצוא את נקודת שיווי המשקל. נסמן כ- $x_{1,0}$ ו- $x_{2,0}$:

$$\begin{cases} -k_1(x_{1,0}-l_1) + k_2(x_{2,0}-x_{1,0}-l_2) = 0 \\ -k_2(x_{2,0}-x_{1,0}-l_2) - k_3(x_{2,0}-l_3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,0}(-k_1-k_2) + x_{2,0}(k_2) = l_1k_1 + l_2k_2 \\ x_{1,0}(k_2) + x_{2,0}(-k_2-k_3) = -l_2k_2 - k_3l_3 \end{cases}$$

נכפיל משוואה השניה ב- k_2 ומשוואה הראשונה ב- (k_2+k_3) ונחבר:

$$x_{1,0}\left(k_2^2-(k_1+k_2)(k_2+k_3)\right) = (l_1k_1+l_2k_2)(k_2+k_3) - (l_2k_2+l_3k_3)k_2$$

$$x_{1,0} = \frac{(l_1k_1+l_2k_2)(k_2+k_3) - (l_2k_2+l_3k_3)k_2}{\left(k_2^2-(k_1+k_2)(k_2+k_3)\right)}$$

באותה דרך ניתן לקבל ביטוי דומה עבור $x_{2,0}$. אבל נקודת שיווי המשקל לא מעניינת אותנו יותר מדי. אותנו מעניינת התנועה של המסות.

לאחר שיש את נקודת שיווי המשקל, נוכל לרשום משוואה להפרש משיווי משקל:

(נגדיר: $\xi_1 = x_1 - x_{1,0}$ $\quad \xi_2 = x_2 - x_{2,0}$

ונקבל:

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = -k_1 \xi_1 + k_2(\xi_2 - \xi_1)$$

$$m_2 \ddot{\xi}_2 = -k_2(\xi_2 - \xi_1) - k_3 \xi_2$$

ננחש פתרון מהצורה: $\xi_1 = Ae^{\lambda t}$ ו- $\xi_2 = Be^{\lambda t}$. (נציב במשוואות

ונקבל:

$$m_1 \lambda^2 A = -k_1 A + k_2(B - A)$$

$$m_2 \lambda^2 B = -k_2(B - A) - k_3 B$$

(נרשום בצורה קצת אחרת:

$$(m_1\lambda^2 + k_1 + k_2)A - k_2 B = 0$$

$$-k_1 A + (m_2\lambda^2 + k_2 + k_3)B = 0$$

יש לנו שתי משוואות אלגבריות לינאריות ב- A ו- B שהן <u>הומוגניות</u>
(אין אף איבר שלא תלוי ב- A או B). מתי נוכל לקבל פתרון <u>לא</u> טריוויאלי
עבור A ו- B? באופן כללי, אם המשוואות אינן תלויות זו בזו לא יהיה
פתרון לשתי המשוואות עם שתי הנעלמים חוץ רק $A=B=0$. נוכל לקבל
פתרון אחר שבו $A\neq 0$ ו/או $B\neq 0$ רק אם המשוואות הן תלויות אחת בשניה,
כלומר, אם משוואה אחת היא כפולה של המשוואה השניה:

כדי להראות זאת, נניח שהמשוואות הן מהצורה:

$$a_1 A + b_1 B = 0$$
$$a_2 A + b_2 B = 0$$

מהמשוואה הראשונה מקבל: $A = -\frac{b_1 B}{a_1}$

ואילו מהמשוואה השניה מקבל: $A = -\frac{b_2}{a_2}B$. כדי שיהיה פתרון לא טריוויאלי
(שאינו $A=B=0$), צריך ש- $\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1} \leftarrow a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$

ואם נציב את המקדמים:

$$(m_1\lambda^2 + k_1 + k_2)(m_1\lambda^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0$$

8.12.04

לשם נוחות נגדיר:

$$\omega_1^2 \equiv \frac{k_1+k_2}{m_1} \qquad \omega_2^2 \equiv \frac{k_2+k_3}{m_2}$$

$$\delta\omega^4 = \frac{k_2^2}{m_1 m_2}$$

ω_1 היא התדירות שהיתה למסה 1 אילו מסה 2 היתה נחה (היתה למשל קיר)
ואילו ω_2 היא התדירות שהיתה למסה 2 אילו 1 היתה קיר. $\delta\omega$ היא איזה
שהוא "תדירות" אופיינית שמתארת את הצימוד (coupling) בין שתי המסות.

נחלק את המשוואה בסוף העמוד הקודם ב- $m_1 m_2$ ונקבל:

$$\left(\lambda^2+\frac{k_1+k_2}{m_1}\right)\left(\lambda^2+\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)-\frac{k_2^2}{m_1 m_2}=0$$

או בעזרת ההגדרות:

$$(\lambda^2+\omega_1^2)(\lambda^2+\omega_2^2)-\delta\omega^4=0$$

נפתח:

$$(\lambda^2)^2+(\omega_1^2+\omega_2^2)\lambda^2+(\omega_1^2\omega_2^2-\delta\omega^4)=0$$

הפתרון הוא כמובן:

$$\lambda^2=-\frac{\omega_1^2}{2}-\frac{\omega_2^2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2-4\omega_1^2\omega_2^2+4\delta\omega^4}$$

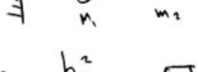
נפתח את ה () בתוך השורש:

$$\lambda^2=-\frac{\omega_1^2}{2}-\frac{\omega_2^2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\underbrace{(\omega_1^2)^2+2\omega_1^2\omega_2^2+(\omega_2^2)^2-4\omega_1^2\omega_2^2}_{(\omega_1^2)^2-2\omega_1^2\omega_2^2+(\omega_2^2)^2}}_{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}+4\delta\omega^4}$$

סה"כ נקבל:

$$\lambda^2=-\frac{\omega_1^2}{2}-\frac{\omega_2^2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4\delta\omega^4}$$

נסתכל כעת על מספר דוגמאות.

* מה קורה אם $k_1=k_3=0$? במקרה כזה אנו דנים בשתי מסות המחוברות בקפיץ בינ יהן, ללא קשר לקירות! 

הביטוי ב- $\sqrt{\ }$ נהיה:

$$\omega_1^2=\frac{k_2}{m_1} \quad \omega_2^2=\frac{k_2}{m_2} \quad \delta\omega^4=\frac{k_2^2}{m_1m_2} \rightarrow \sqrt{\ } = k_2\left(\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)^2+4\frac{1}{m_1m_2}\right)^{1/2}$$

8.12.04

לכן:

$$V = k_2\left(\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2\right)^{1/2}$$

וה-λות יהיו:

$$\lambda^2 = -\frac{k_2}{2m_1}-\frac{k_2}{2m_2} \pm\frac{1}{2}\left(\frac{k_2}{m_1}+\frac{k_2}{m_2}\right) = 0,\ -\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1 m_2} = -\frac{k_2}{\mu}$$

פתרון אחד.   מסה מצומצמת

מה מתארים הפתרונות האלו? נציב $\lambda^2=0$ במשוואות עבור A ו-B, ונגלה שמספיק לקחת משוואה אחת כי השניה תלויה בראשונה.

$$\left(m_1\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\lambda^2}}+(\underset{0}{\cancel{k_1}}+k_2)\right)A - k_2 B = 0 \implies A = B$$

הפתרון הראשון, עם $\lambda=0$ נראה:

$$x_1 = Ae^{\lambda t} = A$$
$$x_2 = Be^{\lambda t} = B$$

אולם זה פתרון אחד, עם תנאי התחלה אחד עבור x_1 ועבור x_2. מה עם הפתרון השני? הבעיה מסתתרת בעובדה שיש לנו שני שורשים $\lambda=0$ למשוואה $\lambda^2=0$. כשפותרים משוואות דיפרנציאליות רגילות, לומדים שהפתרון הנוסף למשוואה הוא: $\begin{cases}\xi_1 = A_2 t e^{\lambda t}\\ \xi_2 = B_2 t e^{\lambda t}\end{cases}$ ובמקרה שלנו: $A_2 t$, $B_2 t$. רק נבדוק:

ישנה המשוואה;

$$0 = +k_2(B_2 t - A_2 t) \Longleftarrow m_1\ddot{\xi}_1 = -\underset{0}{\cancel{k_1}}\xi_1 + k_2(\xi_2-\xi_1)$$

$\xi_1 = A_2 t$

$\xi_2 = B_2 t$

עבור המקרה בו אנו עובדים.

$$\downarrow$$

$$B_2 = A_2$$

ז"א, הפתרונות המתקבלים מהשורש $\lambda=0$ הם:

$$x_1 = A_1 + A_2 t$$
$$x_2 = B_1 + B_2 t$$

פתרון זה מתאר את תנועת מרכז המסה של שתי המסות! היות ואין כח חיצוני על מערכת שתי המסות, מתקבלת תנועה שוות תאוצה!

מה קורה עבור הפתרון השני של λ?

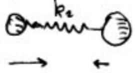
8.12.04

נציב את $\lambda^2 = -\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1 m_2}$ במשוואה, ונקבל:

$$(m_1\lambda^2 + k_2)A - k_2 B = 0$$

$$\left(k_2 - \frac{k_2(m_1+m_2)}{m_2}\right)A = k_2 B \Rightarrow B = -\frac{m_1}{m_2}A$$

התנודות המתוארות ע"י תדירות זו הן תנודות בהן כל מסה נעה בכיוון הפוך עם אמפליטודה היחסית הפוך למסה – כך שמרכז המסה נשאר במקום!



צורת הפתרון כאן, נתונה ע"י:

$$\begin{cases} \xi_1 = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \\ \xi_2 = -\frac{m_1}{m_2}A_1 e^{i\omega t} - \frac{m_1}{m_2} e^{i\omega t} \end{cases}$$

כאשר: $(-\lambda^2 =)\ \omega^2 = \frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1 m_2}$

פלמינוס!

או בדרך כללית אחרת, כדי לקבל ξ ממשיים:

$$\xi_1 = |A| \cos(\omega t + \varphi_A)$$

$$\xi_2 = -\frac{m_1}{m_2}|A| \cos(\omega t + \varphi_A)$$

לכן, הפתרון הכללי שלנו המכיל את שתי ה-λ יראה:

הקבועים A_1 ו-A_2 מהמקרה $\lambda=0$.

$$\xi_1 = C_1 + C_2 t + |C_3| \cos(\omega t + \varphi_{C_3})$$

$$\xi_2 = C_1 + C_2 t - \frac{m_1}{m_2}|C_3| \cos(\omega t + \varphi_{C_3})$$

צורת תנועה עם תדירות מסוימת ω (או λ) הבאה לידי ביטוי: כיחס בין ξ_1 ל-ξ_2 בתנועה (למשל $(+1, -\frac{m_1}{m_2})$ הפתרון עם $\lambda = -\frac{k}{m}$) נקרא אופן תנועה (או מוד עצמי). ולו יש תדירות עצמית ω.

(מתמטיקאים קוראים לאופן התנועה "וקטור עצמי" (Eigenvector) ולתדירות המתאימה – ערך עצמי (Eigenvalue)

במקרה שלנו יש מוד אחד עם "וקטור עצמי" $(1,1)$ – היחס בין תנועת ξ_1 ו-ξ_2, עם ערך עצמי $\lambda=0$ ואילו מוד שני הוא עם "וקטור עצמי" $(+1, -\frac{m_1}{m_2})$ עם "ערך עצמי" $\lambda = -\frac{k_2(m_1+m_2)}{m_1 m_2}$".

8.12.04

נסתכל על דוגמא אחרת, בה כל הקפיצים שווים והמסות שוות גם כן. במקרה כזה:

$$\omega_1^2 = 2\frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = 2\frac{k}{m} \quad \delta\omega^4 = \frac{k^2}{m^2}$$

ומשוואת הערכים העצמיים תהיה:

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} - \frac{k}{m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\left(\frac{2k}{m} - \frac{2k}{m}\right)}_{=0}^2 + 4\frac{k^2}{m^2}}$$

$$\lambda^2 = -\frac{2k}{m} \pm \frac{k}{m}$$

נקבל לכן שני זוגות של ערכים עצמיים: $\lambda^2 = -\frac{3k}{m}$ ו- $\lambda^2 = -\frac{k}{m}$

ננסה למצוא את אופני התנודה. נתחיל עם $\lambda^2 = -\frac{k}{m}$, נציב במשוואה אחת ונקבל:

$$(\underbrace{m\lambda^2}_{-k} + 2k)A - kB = 0$$

$$\hookrightarrow kA = kB \rightarrow A = B$$

נציב כעת את המקרה $\lambda^2 = -\frac{3k}{m}$:

$$(\underbrace{m\lambda^2}_{-3k} + 2k)A - kB = 0$$

$$\hookrightarrow -kA = kB \rightarrow A = -B$$

הפתרון הכללי של המשוואות הללו הינו אם כן:

A של המקרה הראשון · כדי שיהיה ממשי · A של המקרה השני

$$\xi_1 = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{+i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t}$$

$$\xi_2 = \underbrace{A_1}_{B_1 = A_1 \text{ כי}} e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t} - \left(A_2 e^{i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t}\right)$$

נגדיר:

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}}$$

או בצורה אחרת:

פקטור 2 נבלע בהגדרה של A חדש

$$\xi_1 = |A_1|\cos(\omega_1 t + \varphi_{A_1}) + |A_2|\cos(\omega_2 t + \varphi_{A_2})$$

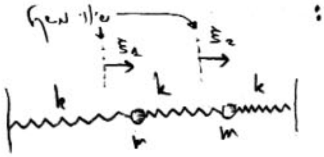
$$\xi_2 = \underbrace{|A_1|\cos(\omega_1 t + \varphi_{A_1})}_{\text{אופן תנודה ראשון}} - \underbrace{|A_2|\cos(\omega_2 t + \varphi_{A_2})}_{\text{אופן תנודה שני}}$$

8.12.04

שימו לב כי הפעם ישנן שתי קואורדינטות ξ_1 ו- ξ_2 לשתי מסות, היות ומשוואות התנועה הן מסדר שני, הפעם ארבעה קבועי אינטגרציה אותם יש למצוא מתנאי התחלה.

מה מתארת תנועה זו?

תנועת המסות מורכבת משתי תנועות בלתי תלויות:

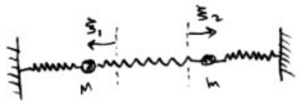


<u>אופן תנודה</u> 1: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = ערך עצמי

(Eigen mode)

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{וקטור עצמי}} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$ – "וקטור דו מימדי"

<u>אופן תנודה</u> 2:



$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

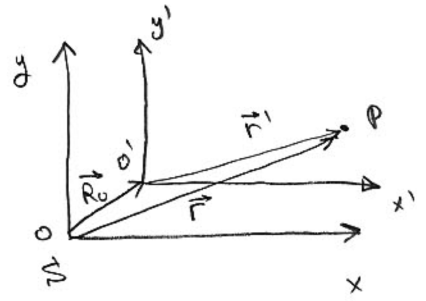
$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

סה"כ בכתיב וקטורי (אבל לא וקטור מרחבי אלה וקטור דו-מימדי של מרחב הקואורדינטות $\{\xi_1, \xi_2\}$):

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

מערכות ייחוס לא אינרציאליות

ננסה לראות כעת כיצד יראו משוואות התנועה במערכת S' המאוצה ביחס למערכת S, שאינה מאוצה.



הנקודה P מתוארת ע"י הוקטור $\vec{r}'$ במערכת S' ואילו במערכת S היא מתוארת ע"י הוקטור $\vec{r}$.
ראשית המערכת S' נמצאת בנקודה $\vec{R}_0$ יחסית ל-S.

ישנו הקשר:
$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{r}'$$

נגזור פעמיים לפי הזמן ונקבל:
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}'$$

משוואות התנועה (החוק השני של ניוטון) נותנות:
$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

כלומר:
$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}' + m\ddot{\vec{R}}_0$$

וזאת מפני שהתאוצה הכוללת-האמיתית של החלקיק היא לא התאוצה $\ddot{\vec{r}}'$ יחסית ל-O' אלא היא כוללת גם את התאוצה של המערכת. ניתן אולם להעביר את האיבר $m\ddot{\vec{R}}_0$ לצד שמאל ונקבל:

$$\underbrace{\vec{F} - m\ddot{\vec{R}}_0}_{\text{סכום הכוחות הכולל כח דמיוני}} = \underbrace{m\ddot{\vec{r}}'}_{\text{תאוצת החלקיק במערכת } S'}$$

לכן, אם אנו רוצים לתאר את תנועת החלקיק במערכת S' המאוצה יתווסף לנו כח דמיוני $-m\ddot{\vec{R}}_0$ הנובע מתאוצת המערכת. כח זה הוא כח מדומה.

במערכות אינרציאליות, שאינן מאוצות, אין כוחות מדומים. לכן, חוקי הפיסיקה אינם יכולים לתת לנו את מהירות המערכת (ניסוים בקרון נח או בקרון הנע במהירות קבועה נתנו לנו את אותן התוצאות). עקרון זה הוא עקרון בסיסי הנשמר גם ביחסות פרטית.

דוגמאות:

– אם מכונית מאיצה, ואנו מתארים את תנועתנו יחסית למכונית בה אנו יושבים, נרגיש כח מדומה אחורה.

– אם נעים בתנועה מעגלית (למשל בקרוסלה). תאוצת המערכת שלנו היא פנימה ונרגיש כח דמיוני החוצה (הכח הצנטריפוגלי).

- אם אנו נופלים במעלית בנפילה חופשית, המעלית תאיץ כלפי מטה ↓
ויפעל כח דמיוני כלפי מעלה. במערכת המעלית:

$$F'_{TOT} = \underbrace{m\vec g}_{\text{כח אמיתי כלפי מטה.}} - \underbrace{m\vec a}_{\text{כח דמיוני}} = 0$$

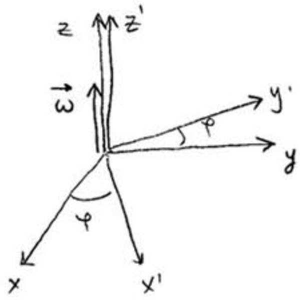
אולם $\vec a = \vec g$

ז"א. נרגיש כאילו וכח הכבידה אינו פועל!

מערכות מסתובבות

נסתכל על דוגמא יותר מורכבת בה מערכת S' מסתובבת ביחס למערכת אינרציאלית S במהירות סיבוב ושן סביב ציר בכיוון $\hat\omega$ – כלומר סיבוב המתואר ע"י $\vec\omega$.

* נתחיל בהסתכלות על גודל $\vec A$ כלשהו במערכת הלא אינרציאלית S'.
כיצד יראה הוקטור $\frac{dA}{dt}$ במערכת המסתובבת S'? כיצד יראה במערכת הלא מסתובבת S?
ברור שהוא לא יראה כקבוע ב-S היות והמערכת מסתובבת, גם אם $\frac{dA}{dt}$ נראה אפס במערכת S'.
לשם נוחות, נעבוד עם ציר סיבוב המתלכד עם ציר z ו-z'.



במערכת S': $A = A'_x\hat x' + A'_y\hat y' + A'_z\hat z'$

כדי לבטא את הוקטור A במערכת S עלינו לבטא את $\hat x'$ $\hat y'$ ו-$\hat z'$ בעזרת $\hat x$ $\hat y$ ו-$\hat z$:

נרשום: $\varphi = \omega t + \varphi_0$. ואז:

$$\hat z' = \hat z$$
$$\hat x' = \hat x\cos\varphi + \hat y\sin\varphi$$
$$\hat y' = -\hat x\sin\varphi + \hat y\cos\varphi$$

לכן, הוקטור $\vec A$ במערכת S יהיה בעל הרכיבים:

$$\vec A = \underbrace{(A'_x\cos\varphi - A'_y\sin\varphi)}_{A_x}\hat x + \underbrace{(+A'_x\sin\varphi + A'_y\cos\varphi)}_{A_y}\hat y + \underbrace{A'_z}_{A_z}\hat z$$

מה השינוי של $\vec A$ לפי הזמן?

על השאלה כיצד $\vec{A}$ יראה משתנה בזמן ניתן לענות לצופה הנמצא ב- $\hat{S}$ ולצופה הנמצא ב- S'.

צופה הנמצא ב- S' לא יראה את $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ ו- $\hat{z}'$ משתנים בזמן ולכן:

$$\underbrace{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s'}}_{\text{השינוי בזמן כפי שצופה ב- } S' \text{ יראה}} = \dot{A}_x' \hat{x}' + \dot{A}_y' \hat{y}' + \dot{A}_z' \hat{z}'$$

את הוקטור הנ"ל, שהוא השינוי שצופה S' יראה ניתן לבטא גם במערכת קואורדינטות S (ע"י הקשר בין $\hat{x}', \hat{y}'$ ל- $\hat{x}, \hat{y}$). נקבל:

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s'} = \left(\dot{A}_x' \cos\varphi - \dot{A}_y' \sin\varphi\right)\hat{x} + \left(\dot{A}_x' \sin\varphi + \dot{A}_y' \cos\varphi\right)\hat{y} + \dot{A}_z' \hat{z}$$

מה יהיה השינוי של A כפי שימדוד צופה ב- S? הוקטור A במערכת S נתון לנו ע"י השורה האחרונה בעמוד הקודם. אם נגזור את שורה זו בזמן נקבל:

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s} = \overbrace{\left(\dot{A}_x' \cos\varphi - \dot{A}_y' \sin\varphi\right)\hat{x} + \left(\dot{A}_x' \sin\varphi + \dot{A}_y' \cos\varphi\right)\hat{y} + \dot{A}_z' \hat{z}}^{= dA/dt|_{s'}}$$
$$+ \left(-A_x' \sin\varphi - A_y' \cos\varphi\right)\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{|\omega|}\hat{x} + \left(A_x' \cos\varphi - A_y' \sin\varphi\right)\frac{d\varphi}{dt}\hat{y}$$

שלושת האיברים הראשונים הם- פשוט $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s'}$ — שינוי הוקטור $\vec{A}$ כפי שצופה ה- S' רואה (רק מבוטא בקואורדינטות של S).

מהם שני האיברים הנוספים? כדי לראות למה הם שווים, נסתכל על הגודל:

$$\vec{\omega}\times\vec{A} \underset{\uparrow}{=} \hat{y}\,\omega_z A_x - \hat{x}\,\omega_z A_y = \hat{y}\underbrace{\omega_z}_{\frac{d\varphi}{dt}}\left(A_x' \cos\varphi - A_y' \sin\varphi\right) - \hat{x}\,\omega_z\left(A_x' \sin\varphi + A_y' \cos\varphi\right)$$

כי $\vec{\omega}$ רק רכיב $\hat{z}$

ולכן שורה זו היא בדיוק שני האיברים הנוספים בביטוי עבור $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s}$. כלומר, אנו יכולים לכתוב כך:

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s'} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

הוכחנו זאת למערכת הצירים S ו-S' אנו יכולים תמיד לבחור רק ש- z ו- z' מתלכדים עם $\vec{\omega}$, תמיד ניתן לקבל את הגזירה הוקטורית הנ"ל, ללא קשר לבחירה שלנו ש- $\vec{\omega}$ בכיוון $\hat{z}$.

15.12.04

משמעות הגזירה שקבלנו: היא שהשינוי שצופה ימדוד לוקטור מסוים במעבדה (במערכת הלא מואצת S) וזה השינוי שימדוד צופה במערכת המסתובבת + האיבר $\vec{\omega}\times\vec{A}$. גם אם $\vec{A}$ נראה קבוע במערכת S', הוא יראה כמשתנה בזמן במערכת S!

הגזירה הזו נכונה עבור כל $\vec{A}$ שנבחר בפרט. ניתן לבחור $\vec{A}=\vec{r}$ ואז נקבל:

$$\underbrace{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{s}}_{\substack{\text{המהירות שימדוד צופה ב-}S\\ \equiv v}} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{s'}}_{\substack{\text{המהירות שימדוד צופה}\\ \text{ב-}S',\ \equiv v'}} + \vec{\omega}\times\vec{r} \quad \Rightarrow \quad v = v' + \omega\times r$$

גם אם צופה נח במערכת מסתובבת $\left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_{s'}=v'=0\right)$ תמדד לו מהירות במערכת המעבדה. $v|_s=\vec{\omega}\times\vec{r}$

כעת ניתן להשתמש בגזירה שוב על A, אולם הפעם נקח ש- $\vec{A}=\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_s$. ונקבל:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_s \left.\frac{dr}{dt}\right|_s = \left.\frac{d}{dt}\right|_{s'}\left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_s\right) + \omega\times\left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_s\right)$$

נציב את $\left.\frac{dr}{dt}\right|_s$ מלמעלה ונמצא:

$$\overbrace{\left.\frac{d}{dt}\right|_s \left.\frac{dr}{dt}\right|_s}^{\substack{\text{תאוצה}\\ \text{ב-}S\ \vec{a}}} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{s'}\left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_{s'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \omega\times\left(\left.\frac{dr}{dt}\right|_{s'} + \omega\times r\right)$$

בגזירה, נזכור כי $\vec{\omega}$ הוא קבוע (גם לצופה ב-S וגם ב-S'). ולכן:

$$\vec{a} = \underbrace{\left.\frac{d}{dt}\right|_{s'}\left.\frac{dr}{dt}\right|_{s'}}_{\vec{a}'\text{ — תאוצה לצופה במערכת }S'} + 2\vec{\omega}\times\Big(\underbrace{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{s'}}_{\substack{v'\text{ — המהירות}\\ \text{אותה רואה צופה ב-}S'}}\Big) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

התאוצה אותה ימדוד צופה במערכת המעבדה היא התאוצה אותה ימדוד צופה במערכת S' מסתובבת + שני תיקונים: האיבר $2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ נקרא תאוצת קוריאוליס ואילו $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ הוא התאוצה הצנטריפוגלית.

את משוואת התנועה ב- Σ ניתן לכתוב: $m\vec{a} = \vec{F}$

את $\vec{a}$ ניתן לכתוב בעזרת התאוצה במערכת Σ' ולקבל:

$$m\left(\vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')\right) = F$$

אם נסדר אגפים נקבל:

$$m\vec{a}' = F - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

כלומר, אם אנו רוצים לתאר את תנועת החלקיק במערכת Σ', שמסתובבת, נצטרך להוסיף שני כוחות מדומים $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ — (זהו הכח הצנטריפוגלי) ואילו $-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$ הוא כח קוריאוליס.

דוגמא:

* נפילת גוף ממגדל אייפל. ילד מפיל גולה ממגדל אייפל. בכמה יפספס את האנך?

הכח הפועל על הגולה הוא: $\vec{F}'_{TOT} = m\vec{g} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

הוקטור $\vec{r}$ המחבר את ראשית הצירים אל הגולה כמעט ואינו משתנה בין תחתית המגדל לראשו (300 מטר על 6400 ק"מ). לכן האיבר השני הוא קבוע וניתן לרשום:

$$F'_{TOT} = m\underbrace{\left(\vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right)}_{\vec{g}_{eff}} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

האיבר בסוגריים מתאר תאוצה קבועה והוא מכיל את תאוצת הכובד + הכח הצנטריפוגלי המדומה, אנו מרגישים כח כבידה אפקטיבי המכיל את שני האיברים. האנך שלנו מוגדר לפי הכובד האפקטיבי!

אז יש תנועה עם כח: $F' = m\vec{g}_{eff} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

הואיל וכח קוריאוליס הוא קטן ביחס לכח הכבידה, את ה- $\vec{v}'$ שנכנס לחישוב כח קוריאוליס ניתן לחשב בעזרת הנפילה ב- $\vec{g}_{eff}$ בלבד. משוואות התנועה:

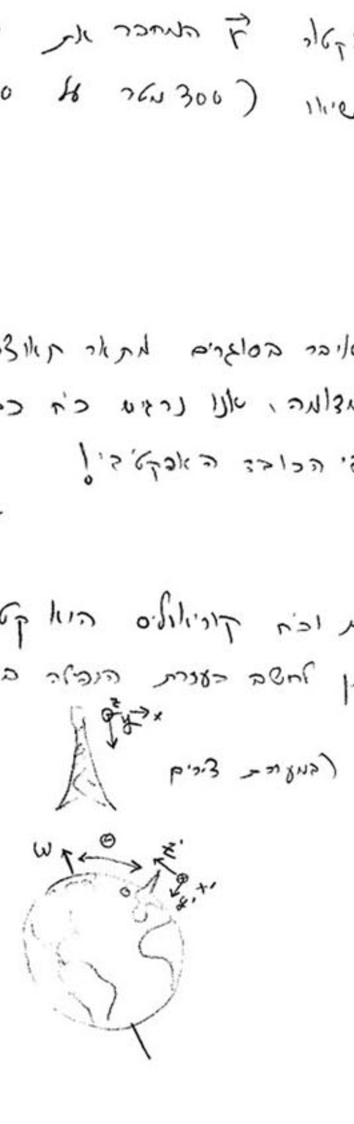
מזניחים איבר קוריאוליס הנובע מ- v_x.

$$\ddot{y}' = g_{eff} \Rightarrow y' = y_0' - \frac{1}{2}g_{eff}t^2$$

$$\ddot{x}' = +2m\omega v_y \sin\theta$$

$$\ddot{z}' = 0$$

נסביר על איבר זה למה חיובי אח"כ



15.12.04

המהירות בציר y' היא: $v_{y'} = g_{eff} t$ ולכן:

$$\ddot{x}' = 2\omega g_{eff} t \sin\theta \Rightarrow \dot{x}' = +\omega g_{eff} t^2 \sin\theta \qquad x' = \omega g_{eff} \frac{t^3}{3} \sin\theta$$

$x'|_0 = 0 \quad \dot{x}'|_0 = 0$ תנאי התחלה

הפגיעה תתרחש כאשר: $t_f = \left(\frac{2h}{g_{eff}}\right)^{1/2} \leftarrow y(t=t_f) = h$

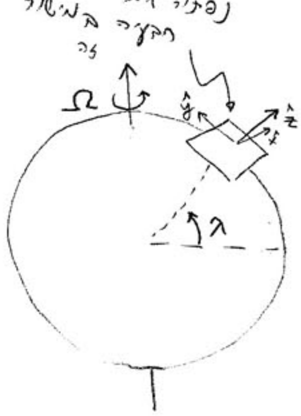
נציב, ונקבל:

$$x' = \frac{\omega}{3}\left(\frac{8h^3}{g_{eff}}\right)^{1/2} \sin\theta$$

והצבת מספרים:

$$x' = \frac{2\pi\ s^{-1}}{3\cdot 24\cdot 3600}\left(\frac{8(300m)^3}{9.8\ m/s^2}\right)^{1/2} \sin(90^\circ - 48^\circ) = \approx 0.08m$$

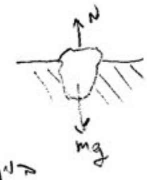
הקליע תפספס את האנך בשמונה ס"מ.



דוגמא נוספת: משוואות התנועה של קרחון בים

נסתכל על קרחון הנע בים בהשפעת כח קוריוליס, נזניח כוחות חיכוך. משוואות התנועה (במערכת המסתובבת בכדור):

$$m(\ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})] = +m\vec{g} + \underbrace{\vec{N}}_{\text{מהמים}}$$



במערכת צירים שלנו, וקטור הסיבוב $\vec{\Omega}$ הוא:

$$\vec{\Omega} = 0\hat{x} + \Omega\cos\lambda\,\hat{y} + \Omega\sin\lambda\,\hat{z}$$

ולכן:

$$2\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} = \hat{x}(2\dot{z}\Omega\cos\lambda - 2\dot{y}\Omega\sin\lambda) + \hat{y}(2\dot{x}\Omega\sin\lambda) - \hat{z}\,2\dot{x}\Omega\cos\lambda$$

משוואת התנועה שלנו:

$\vec{g}_{eff}$ = ראינו אותו,

$$m\ddot{\vec{r}} = +m(\overbrace{\vec{g} - \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})}^{\text{גרביטציה אפקטיבית}}) - 2m\vec{\Omega}\times\dot{\vec{r}} + \underbrace{\hat{N}}_{\text{וקטור בכיוון } \hat{z}}$$

אותנו מעניינים רכיבי $\hat{x}$ ו-$\hat{y}$. רכיב $\hat{z}$ מכיל את $\hat{N}$ המונע מהקרחון לטבוע.

כמו כן, לקרחון אין תנועה בכיוון ציר $\hat{z}$ ולכן $\dot{z}=0$. נקבל שתי משוואות משני רכיבים $\hat{x}$ ו-$\hat{y}$:

15.12.04

נגדיר $f = 2\Omega\sin\lambda$ ונקבל שתי משוואות:

$$\ddot{x} - f\dot{y} = 0$$
$$\ddot{y} + f\dot{x} = 0$$

נגדיר $u = \dot{x}$ ו- $v = \dot{y}$ ונקבל:

$$\dot{u} - fv = 0 \qquad \underbrace{\dot{v} + fu = 0}_{\text{נגזור}}$$

$$\ddot{v} + f\dot{u} = 0$$
$$\downarrow$$
$$\dot{u} \xrightarrow{\text{הצבה}} \quad \ddot{v} + fv = 0$$

זהו משוואה הרמונית וזה הפתרון:

$$v = A\cos(ft) + B\sin(ft)$$

נגזור ונקבל:

$$\dot{v} = -fA\sin(ft) + fB\cos(ft)$$

ולכן:

$$u = -\frac{\dot{v}}{f} = A\sin(ft) - B\cos(ft)$$

אם בזמן $t=0$ $v=v_0$ ו- $u=u_0$ אזי: $A = v_0$ ו- $B = -u_0$ ונקבל:

$$v = +v_0\cos(ft) - u_0\sin(ft)$$
$$u = v_0\sin(ft) + u_0\cos(ft)$$

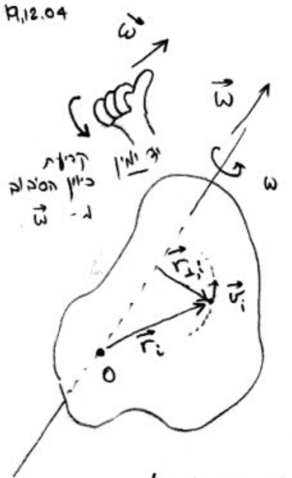
אם נבצע אינטגרציה נוספת:

$$y = y_0 + \frac{v_0}{f}\sin(ft) + \frac{u_0}{f}\cos(ft)$$
$$x = x_0 + (-)\frac{v_0}{f}\cos(ft) + \frac{u_0}{f}\sin(ft)$$

תנועת החלקיק היא בכיוון השעון (עבור חצי כדור צפוני) ברדיוס של $\frac{\sqrt{v_0^2 + u_0^2}}{f}$ ובזמן מחזור של $\frac{2\pi}{f}$. רדיוס הסיבוב נקרא רדיוס רוסבי (Rossby) ואילו המעגל של המסלול נקרא בפי אוקינוגרפים המעגל האינרציאלי.

19.12.04

גוף קשיח: תנועה סביב ציר קבוע



* עבור גוף קשיח, מה התנועה של חלקיק (או אלמנט) i ?

מהציור ניתן לראות שגודל המהירות: $v_i = r_{\perp i}\,\omega$

בנוסף $\vec v_i$ ניצב גם ל- $\vec\omega$ וגם ל- $\vec r_i$ ולכן:

$$\vec v_i = \vec\omega\times\vec r_i$$

זה נכון כל עוד ראשית הצירים נמצאת על ציר הסיבוב (אחרת $\omega r_{\perp i} \neq v_i$).

* למה שווה התנע הזוויתי של המערכת ?

סביב ציר הסיבוב, התנע הזוויתי הוא:

$$\vec L = \sum_i r_i \times m_i v_i = \sum_i \vec r_i \times m_i(\vec\omega_i\times\vec r_i)$$

(נפרק את $\vec r_i$ ל- $\vec r_{\perp,i}$ ו- $\vec r_{\parallel,i}$ ונקבל):

$$\vec L = \underbrace{\sum_i \vec r_{\perp,i}\times m_i(\vec\omega\times\vec r_{\perp,i})}_{\text{תנע זוויתי בכיוון של } \vec\omega} + \underbrace{\sum_i \vec r_{\parallel}\times m_i(\vec\omega\times\vec r_{i,\perp})}_{\text{תנע זוויתי בכיוון ניצב ל- } \omega}$$

באופן כללי, התנע הזוויתי לא צריך להיות בכיוון של $\vec\omega$.

ניתן להוכיח שלכל גוף ישנם שלושה צירים ייחודיים שסיבוב סביבם יתן $\vec L$ בכיוון של $\vec\omega$. נדון בכך שוב בהמשך.

באופן פרטי, ניתן לראות שאם הגוף סימטרי לסיבוב ב- 180° סביב ציר מסוים, $\vec L_\perp$ יהיה אפס אם הגוף מסתובב סביב ציר זה (ההפך אינו נכון בהכרח).

דוגמא:
ניתן לראות שהאלמנטים בצדדים מנוגדים תורמים תרומה הפוכה ל- $\vec r_\parallel\times\vec v$.

* למה שווה $L_{\parallel}$?

$$L_{\parallel} = \sum_i r_{\perp,i} \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp,i}) = \sum_i m_i \omega r_{\perp,i}^2 = \omega \sum_i m_i r_{\perp,i}^2$$

* נחשב את האנרגיה הקינטית:

$$K = \sum_i m_i v_i^2 = \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_{i,\perp}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_{i,\perp}^2$$

באופן ברור, עוזר להגדיר גודל:

$$I = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2$$

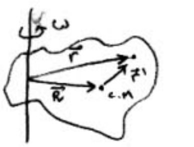
זהו המומנט אינרציה. התנע הזוויתי עבור סיבוב סביב ציר הוא:

$$L_{\parallel} = \omega \underbrace{I}_{\text{מוגדר לא רק לפי הגוף אלא של הציר}} \qquad K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

אם הציר אינו "ראשי" יהיה גם $L_{\perp}$.

* משפט שטיינר: מומנט האינרציה סביב ציר מסוים הוא מומנט האינרציה סביב הציר המקביל העובר דרך מרכז המסה + MR^2, R המרחק בין הצירים.

הוכחה: נגדיר:



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$$

ובאופן דומה גם: $\vec{r}_{\perp,i} = \vec{R}_{\perp} + \vec{r}'_{\perp,i} \quad (|\vec{R}_{\perp}| = R)$

מומנט האינרציה יהיה:

$$I = \sum m_i r_{i\perp}^2 = \sum m_i \left(\vec{R}_{\perp}^2 + 2\vec{R}_{\perp} \cdot \vec{r}'_{\perp,i} + \vec{r}'^2_{\perp,i}\right)$$

$$= R^2 \underbrace{\sum_i m_i}_{M} + 2\vec{R}_{\perp} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_{\perp,i}}_{=0} + \sum_i m_i r'^2_{\perp,i}$$

(I) סביב הציר סיבוב שאינו עובר במרכז המסה.

(=0) כי זה מוגדר יחסית למרכז המסה.

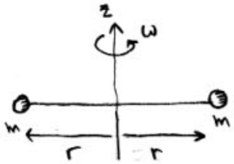
אנחנו רואים שמשפט שטיינר הוא:

$$\underset{\text{סביב ציר כלשהו}}{I} = \overbrace{MR^2}^{\text{המרחק בין הצירים}} + \underbrace{I'}_{\text{סביב ציר מקביל העובר דרך מרכז המסה.}}$$

והוא נכון רק עבור I' המחושב יחסית למרכז המסה. אחרת, האיבר האמצעי לא ייתן תוצאה שווה לאפס.

חישוב מומנט אינרציה במערכות שונות

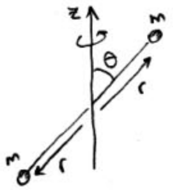
1) שתי מסות על מוט:



$$I_z = \sum_i m_i r_\perp^2 = 2mr^2$$

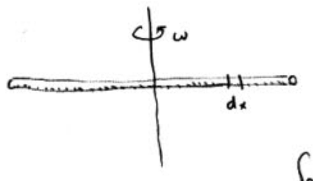
לסיבובים סביב ציר z

כעת רק יש זווית θ בין ציר z לבין המוט:



$$I_z = \sum_i m_i r_\perp^2 = 2mr^2\sin^2\theta$$

2) נתון מוט בצפיפות אחידה, אורך L ומסה כוללת M. למה שווה I_z?
(לסיבוב סביב ציר ניצב למוט).



נחלק את המוט לקטעים קטנים dx, כל אלמנט מכיל מסה

$$dM = dx \cdot \frac{M}{L}$$

לכן:

הסכום הופך לאינטגרל

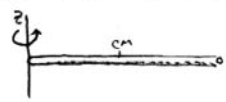
$$I_z = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 = \int_{m=0}^{m=M} dm \cdot r_\perp^2 = \int_{x=-L/2}^{L/2} dx\, \frac{M}{L} x^2$$

(החלפנו את dm ל- dx)

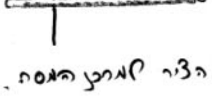
ולכן

$$I_z = \frac{M}{L}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-L/2}^{x=L/2} = 2\,\frac{M}{L}\,\frac{8x^3}{3} = \frac{1}{12}ML^2$$

3) מה המומנט אינרציה לסיבוב המוט סביב ציר בקצה, וסביב ציר העובר רבע הדרך מהקצה לקצה השני?

א - 

כדי לפתור בעיה זו נשתמש בתוצאה הקודמת ביחד עם משפט שטיינר.

ב - 

המרחק בין הציר למרכז המסה.

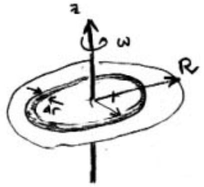
במקרה הראשון: $I = I_{cm} + M\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$

19.10.09

ובמקרה השני: $I = I_{CM} + M(\frac{1}{4}L)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)ML^2 = \frac{7}{48}ML^2$

4) נסתכל על דיסקה  ונחשב את מומנט האינרציה לסיבוב סביב ציר.

(נעשה זאת ע"י חלוקת הדיסקה לטבעות דקות ברדיוס r ובעובי dr:



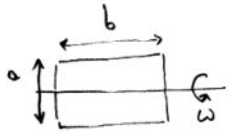
כמות המסה בשטח הטבעת הוא:

$$dM = \text{מסה כוללת}\cdot\frac{\text{שטח טבעת}}{\text{שטח כולל}} = M\cdot\frac{2\pi r\,dr}{\pi R^2}$$

מומנט האינרציה הוא:

$$I_z = \int dM r_\perp^2 = \int_{r=0}^{r=R} M\frac{2r\,dr}{R^2}r^2 = \frac{2}{4}\frac{r^4}{R^2}\Big|_0^R = \frac{1}{2}MR^2$$

5) למה שווה מומנט האינרציה של פלטה מלבנית?



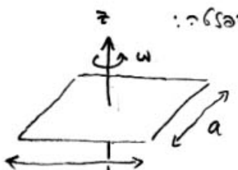
א) אם ציר הסיבוב הוא לאורך ציר ראשית של המלבן:

אזי המלבן הוא כמו מוט (לא מעניין שהמוט "מרוח" על b,

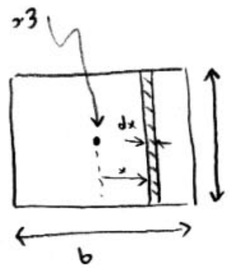
כי מה שמופיע בחישוב מומנט האינרציה הוא רק $r_\perp$) לכן, עבור מקרה זה, מומנט האינרציה הוא:

$$I_z = \frac{1}{12}Ma^2$$

ב. המקרה היותר מעניין הוא סיבוב סביב ציר הניצב לפני הפלטה:
למה שווה I_z במקרה זה?



נשתמש במשפט שטיינר על-מנת למצוא את התרומה ל-I מרצועה קטנה dx כמתואר בציור



כמות המסה ברצועה היא: $dM = \frac{M}{b}\cdot dx$

מומנט האינרציה של הרצועה סביב מרכז המסה של עצמה הוא:

$$dI_{cm} = \frac{1}{12}dMa^2 = \frac{M\,dx}{b}\frac{a^2}{12}$$

כעת, נוכל לחשב את מומנט האינרציה של הרצועה סביב מרכז המסה של הפלטה.

19.12.04

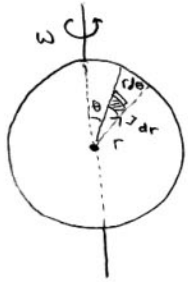
בעזרת משפט שטיינר, המומנט אינרציה של הרצועה סביב מרכז המסה של הלוח:

$$dI = \underbrace{\frac{M}{b}dx}_{\text{"}M\text{"}}\ \underbrace{x^2}_{\text{"}R^2\text{"}} + \frac{M\,dx}{b}\,\frac{1}{12}a^2$$

כעת יש לבצע אינטגרציה על x:

$$I = \int_{x=-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dI = \int_{x=-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \frac{M}{b}\underbrace{x^2dx}_{x^3} + \frac{1}{12}\frac{M}{b}a^2\underbrace{\int_{x=-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dx}_{b} = \frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right)$$

6) סיבוב דיסקה סביב ציר במישור הדיסקה:



הפעם נסתכל על אלמנט קטן יותר כמתואר בציור.

שטחו: $dA = dr \cdot r\,d\theta$

המסה שלו: $dM = \frac{M}{\pi R^2} \cdot dA$

$$= \frac{M}{\pi R^2}\, r\,dr\,d\theta$$

התרומה של האלמנט למומנט האינרציה:

$$dI = dM \cdot r_\perp^2 = dM \cdot r^2\sin^2\theta = \frac{M}{\pi R^2} r^3 \sin^2\theta\, dr\, d\theta$$

מומנט האינרציה הכולל יהיה אינטגרציה גם על r וגם על θ:

$$I = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{סכום על כל האלמנטים.}}}{\int dI} = \int_{r=0}^{R} dr \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underbrace{\frac{M}{\pi R^2} r^3}_{\substack{\text{קודם נבצע} \\ \int \text{ על } d\theta.}} \cdot \sin^2\theta\, d\theta =$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2\theta = \pi$$

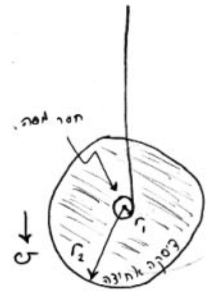
$$= \int_{r=0}^{R} \frac{M}{\pi R^2} r^3\, \pi \cdot dr = \frac{1}{4}MR^2$$

7) לכדור, ניתן להראות שמומנט האינרציה שלו נתון ע"י $I = \frac{2}{5}MR^2$

בסוף זה מתקבל ע"י שלוש אינטגרציות (r,θ,φ).

דינמיקה של גופים קשיחים סביב ציר קבוע

דוגמא ראשונה: נפילת יו-יו. למה שווה תאוצתו של יו-יו נופל?



נניח לשם פשטות כי הדיסקה הקטנה חסרת מסה ואילו הדיסקה הגדולה מפולגת אחיד.

נחשב את תאוצת היו-יו בעזרת האנרגיה הקינטית של הגוף. ראינו בעבר כי האנרגיה הקינטית ניתנת לכתיבה כאנרגיה הקינטית של מרכז המסה + אנרגיה קינטית של התנועה יחסית למרכז המסה. לכן, נוכל לרשום:

$$K = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

כאשר I הוא מומנט האינרציה לסיבוב סביב ציר הדיסקה, $I = \frac{1}{2} MR^2$.

כדי למצוא את תאוצת v, יש לקשר את ω ל-v. מה הקשר?

הקשר בין שינוי הזווית לבין תנועת היו-יו למטה: $dy = r_1 d\theta$

והמהירות: $v = \frac{dy}{dt} = r_1 \frac{d\theta}{dt} = r_1 \omega$

לכן האנרגיה הקינטית היא:

$$K = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} M r_2^2}_{I} \cdot \left(\frac{v}{r_1}\right)^2 = \frac{1}{2} M v^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)$$

שימור אנרגיה אומר:

$$K + U = \text{const} \Rightarrow \cancel{M} g y + \frac{1}{2} \cancel{M} v^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right) = \text{const}$$

נגזור לפי הזמן ונקבל:

$$g \cancel{\dot{y}} + \cancel{\dot{y}} \ddot{y} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right) = 0$$

ולכן התאוצה היא:

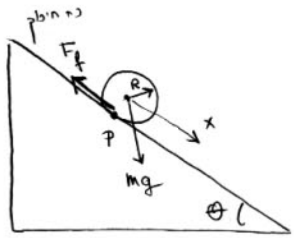
$$\ddot{y} = -\frac{g}{1 + \frac{1}{2}(r_2/r_1)^2}$$

ז"א תאוצת היו-יו קטנה יותר מ-g. הסיבה היא שהאנרגיה הפוטנציאלית לא הופכת רק לתנועה קווית אלא גם לתנועה סיבובית כך שהתנועה הקווית קטנה יותר. אם r_2 גדול בהרבה מ-r_1 נקבל תאוצה הרבה יותר קטנה מ-g.

הפתרון עבור y הוא לכן:

$$y = y_0 + \underbrace{v_0}_{\text{מהירות התחלתית}} t - \frac{1}{2} \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} t^2$$

נסתכל על גלגול ללא החלקה



נחשב כעת את תאוצת הנפילה של גוף המתגלגל ללא החלקה במורד של מישור משופע. נעשה זאת מספר דרכים שונות.

דרך I: שימור אנרגיה.

האנרגיה הקינטית של הגוף:

$$K = \underbrace{K_{cm}}_{\text{תנועת מרכז המסה}} + \overbrace{K'}^{\text{יחסית למרכז המסה}} =$$

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \omega = \dot{x}/R$$

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}M\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)\dot{x}^2$$

כאילו והמסה הכוללת של הגוף גדולה יותר מ-M.

האנרגיה הפוטנציאלית: $U = -Mgx\sin\theta$

האנרגיה הכוללת קבועה: $E = K+U = \frac{1}{2}M\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)\dot{x}^2 - Mg\sin\theta\, x = \overset{\text{קבוע}}{C}$

נגזור לפי הזמן: $M\left(1+\frac{I}{MR^2}\right)\cancel{\dot{x}}\ddot{x} - Mg\sin\theta\,\cancel{\dot{x}} = 0$

ולכן: $\ddot{x} = \frac{g\sin\theta}{(1+I/MR^2)}$

דרך II

נחשב ע"י כוחות - תאוצת מרכז המסה ותאוצה זוויתית סביב מרכז המסה:

יש לנו כעת שתי משוואות

חוק II למרכז המסה: $Ma = \sum F$

מומנטים סביב מרכז המסה: $I\frac{d\omega}{dt} = \sum N_c$

שני כוחות פועלים על המסה M: ראשית, Mg כלפי מטה ו- F_f - כח החיכוך במעלה המישור. לכן:

x מוגדר כלפי מטה.

$$Ma = M\ddot{x} = Mg\sin\theta - F_f$$

אם נסתכל על מרכז המסה, כח הכבידה אינו מפעיל מומנט, ולכן התרומה היחידה היא מכח החיכוך:

$$N_c = \underbrace{F_f R}_{\text{כח} \times \text{זרוע}} = I\frac{d\omega}{dt}$$

סביב מרכז המסה. אגף שני

היות ונהו גלגול ללא החלקה, מתקיים:

$$\omega R = v \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

ולכן: (ממשוואת המומנט):

$$F_f = \frac{I}{R}\frac{d\omega}{dt} = \frac{I}{R^2}\ddot{x}$$

נציב במשוואה עבור תאוצת מרכז המסה:

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2}\ddot{x}$$

נקבל.

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\theta}{1 + I/MR^2} \quad //$$

היות והדרך הזו מכילה מפורשות את F_f, ניתן לחשב את התנאי להחלקה ללא החלקה.

$$F_f = \frac{I}{R^2}\ddot{x} = \frac{I/R^2}{1 + I/R^2}\,g\sin\theta = \frac{I}{MR^2 + I}\,g\sin\theta$$

הכוח הנורמלי הוא:

$$F_N = Mg\cos\theta$$

כדי שלא תהיה החלקה

מקדם חיכוך סטטי
היות ואין תנועה
בין הגלגל ובין המשטח
בנקודה המגע

$$\mu_s F_N > F_f$$

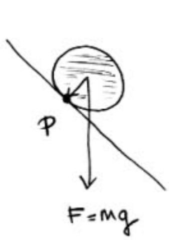
$$\mu_s\cos\theta > \frac{I}{I + MR^2}\sin\theta$$

ולכן:

$$tg\,\theta < \mu_s\left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)$$

תנאי ללא החלקה.

דרך $\underline{III}$: חישוב תאוצת הגלגל ע"י מומנט סביב נקודת המגע.



מומנט האינרציה לסיבוב סביב נקודה זו:

$$I_P = I_c + MR^2$$

ממשפט שטיינר.

המהירות הזוויתית הרגעית סביב נקודה P:

$$\omega = v/R$$

התנע הזוויתי יהיה לכן:

$$L_P = I_P\,\omega = (I + MR^2)\frac{v}{R}$$

סביב סביב P.

המומנט הכוחי הפועל הוא:

$$N_P = \underbrace{Mg}_{\text{כוח}}\ \underbrace{R\sin\theta}_{\text{זרוע}}$$

שינוי התנע הזוויתי הינו:

$$\frac{dL_p}{dt} = N_p$$

לכן:

$$(I + MR^2)\frac{\dot v}{R} = MgR\sin\theta$$

כלומר:

$$a = \frac{1}{1 + I/MR^2}\, g\sin\theta$$

כפי שקבלנו קודם. עבור גליל חלול $I = MR^2$ $\quad a = \frac{1}{2} g\sin\theta$

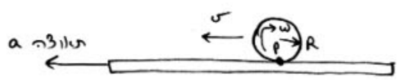
גליל מלא $I = \frac{1}{2}MR^2$ $\quad a = \frac{2}{3} g\sin\theta$

עבור כדור $I = \frac{2}{5}MR^2$ $\quad a = \frac{5}{7} g\sin\theta$

חשוב לציין שהסיבה היחידה שניתן היה לחשב את התאוצה בעזרת המומנט סביב נקודה P היא שהנקודה P אינה מאיצה. לא נוכל סביב הציר, אזי ניתן להסתכל, לפחות באופן רגעי על התנועה כסיבוב סביב P. (נסתכל על דוגמא בה לא ניתן לעשות זאת.

<u>חישוב מומנט סביב נקודה מאיצה</u>

נסתכל על גוף עגול הנמצא על משטח המאיץ בתאוצה a. למה שווה תאוצת הגוף?



נפתור בעיה זו בשתי דרכים.

<u>דרך I</u>: נסתכל על הכח שפועל על מרכז המסה ועל המומנט סביב מרכז המסה.

תאוצת מרכז המסה:

$$M\frac{dv}{dt} = \overset{\text{חיכוך}}{F_f}$$

מומנט הכח סביב מרכז המסה:

$$N_c = F_f R = I_c\frac{d\omega}{dt}$$

לכן:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_f}{M} = \frac{I_c}{MR}\frac{d\omega}{dt}$$

קשר נוסף הוא בין ω ל- v ו- a הנובע מכך שהגליל מתגלגל ללא החלקה.

יחסית למעבדה.

$$\Delta x = \underbrace{V}_{\text{מהירות המשטח ברגע נתון.}}\Delta t - R\Delta\theta$$

נחלק ב- Δt ונשאיף לאפס:

$$v_c = V - \omega R$$

(גזירה לפי הזמן:

$$\frac{dv}{dt} = a - R\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\text{מהמשוואה: } = \frac{dv}{dt}\frac{MR}{I}}$$

אם נשווה את התוצאות:

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{dv}{dt}\frac{MR}{I} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{a}{1+\frac{MR^2}{I}}$$

והתאוצה הזוויתית:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{MR}{I} = \frac{MR^2/I}{1+MR^2/I}\frac{a}{R} = \frac{MR^2}{I+MR^2}a/_R$$

<u>דרך</u> II: נעבוד עם המומנטים סביב נקודה P. אולם הפעם נקודה P אינה אינרציאלית! בתחילה, גם אם אין תנועה סיבובית של הגוף יש תאוצה של נקודת המגע. הדרך להתמודד עם זה, היא לעבור למערכת המאוצה ביחד עם השטיח המאוץ. במערכת זו יפעלו כוחות מדומים על הגופים.

שינוי התנע הזוויתי סביב הציר העובר ב-P במערכת המאוצה עם השטיח (בה הנקודה P אינה מאוצה ולא אין סיבוב) נתון ע"י:

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\sum r_i F_i}_{\text{הפעם הסכום מכיל את הכח המדומה על הגוף.}} = \underset{\uparrow}{0} + Rma$$

חיכוך ונורמל פועל עם כיוון

סימן הכח המדומה הוא "בכיוון" המנצה להגדיל" את ω.

$$I\frac{d\omega}{dt} = Rma$$

אולם: $L = I_p\omega$ ולכן:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{MR^2}{I_p}\frac{a}{R} = \frac{MR^2}{MR^2 + I_c}\frac{a}{R}$$

סביב ציר P.

שטיינר

סביב מרכז המסה

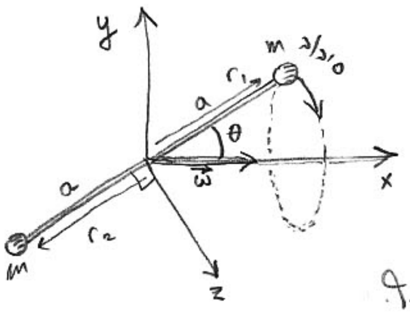
כמו כן, מצאנו כבר:

$$\frac{dv}{dt} = a - R\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = a\left(1 - \frac{MR^2}{MR^2+I_c}\right) = \left(\frac{I_c}{MR^2+I_c}\right)a$$

התנע הזויתי בסיבוב סביב ציר קבוע

ראינו כבר שלא בכל מקרה מקבלים תנע זויתי $\vec{L}$ שמקביל ל- $\vec{\omega}$. אולם, היות ומדובר סביב ציר קבוע מעניינו אותנו רק רכיבי $\vec{L}$ ו- $\vec{\tau}$ (מומנט הכח) בכיוון הציר. כעת נבחן דוגמא בה $\vec{L}$ אינו בכיוון $\vec{\omega}$ ונבחן את המומנט $\vec{\tau}$ שיש להפעיל על מנת לשמור על תנועה זו. (היות ויופיע בשעור גם הכח הנורמל המשתנה, נסמן ב- $\vec{N}$ ואת מומנט הכח ב- $\vec{\tau}$).



* דוגמא: סיבוב סביב ציר קבוע.

נעבוד במערכת צירים הקבועה לגוף.

אמנם במערכת הגוף אין תנועה אולם אנו יכולים לתאר את תנועת הגוף ומסית המעבדה במערכת הגוף.

(למשל, ומסית הכדור אין אנו רואים תנועה אולם את תנועת כדור-הארץ ומסית לכוכבים ניתן לתאר בעזרת וקטור $\vec{\omega}$ ואת רכיביו במערכת הגוף או מערכת המעבדה).

התנע הזויתי הוא:
$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m(\vec{\omega}\times\vec{r}_1) + \vec{r}_2\times m(\vec{\omega}\times\vec{r}_2)$$

במערכת הגוף המסתובב, המתוארת בציור, יש לנו:

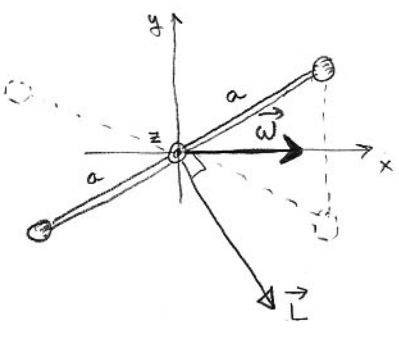
$$\vec{r}_1 = a\cos\theta\,\hat{x} + a\sin\theta\,\hat{y}$$
$$\vec{r}_2 = -\vec{r}_1 = -a\cos\theta\,\hat{x} - a\sin\theta\,\hat{y}$$
$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{x}$$

כדי לחשב את $\vec{L}$, נשתמש בזהות הוקטורית:
$$A\times(B\times C) = (A\cdot C)\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

כך שמתקבל:
$$\vec{r}_1\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_1) = \underbrace{(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1)}_{a^2}\vec{\omega} - (\vec{r}_1\cdot\vec{\omega})\vec{r}_1$$

לכן:
$$\vec{L} = 2\vec{r}_1\times m(\vec{\omega}\times\vec{r}_1) = 2a^2m\omega\,\hat{x} - 2ma\cos\theta\,\omega(a\cos\theta\,\hat{x} - a\sin\theta\,\hat{y})$$
$$= 2ma^2\omega(\sin^2\theta\,\hat{x} - \sin\theta\cos\theta\,\hat{y})$$
$$= 2ma^2\omega\sin\theta\underbrace{(\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})}_{\text{כיוון ניצב ל- }\hat{r}\text{ הנמצא ב- }(\cos\theta,\sin\theta)}$$

התרומה של האיבר עם r_2 זהה ל- r_1 היות וה- $\vec{r}_2$ מופיע כפול כך שסימן המינוס ב- $\vec{r}_2=-\vec{r}_2$ נעלם.



ניתן לראות זאת בציור:

כיוון ש- $\vec{\omega}$ אינו מקביל ל- $\vec{L}$. במערכת הגוף $\vec{L}$ קבוע אולם היות והגוף מסתובב והיות ו $\vec{L}$ אינו בכיוון ציר הסבוב, גם $\vec{L}$ יסתובב במערכת המעבדה.

אם $\vec{L}$ אינו קבוע במערכת המעבדה, אזי בהכרח חייב לפעול מומנט כח:

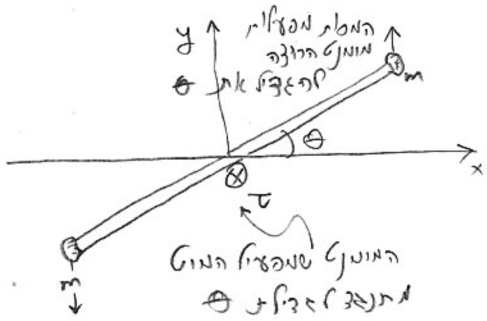
$$\vec{\tau} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{lab}} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{body}}_{=0} + \vec{\omega}\times\vec{L}$$

צופה במעבדה יראה את התנע הזויתי מסתובב מסביב לציר $\hat{x}$ ביחד עם הגוף.

לצופה הצמוד לגוף וקטור התנע הזויתי נראה כקבוע

$$\vec{\tau} = \vec{\omega}\times\vec{L} = \omega\hat{x}\times 2m\omega a^2\sin\theta(\sin\theta\hat{x}-\cos\theta\hat{y})$$
$$= -2m\omega^2 a^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{z}$$

ז"א, חייב לפעול מומנט כח $\vec{\tau}$ על הגוף על מנת לשמור אותו בתנועה סיבובית זו: מומנט זה מופעל ע"י ציר הסיבוב.

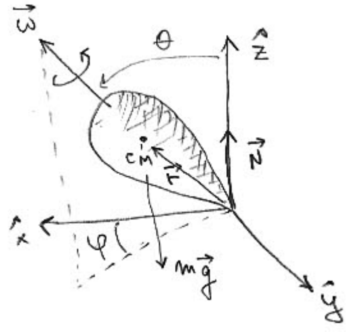


במערכת הגוף המומנט נראה כוקטור קבוע הניצב ל-$\hat{x}$ ו-$\hat{y}$. צופה חיצוני יראה את מומנט הכח הזה מסתובב ביחד עם הגוף.

אם יש לנו גלגל לא מאוזן, המסתובב על ציר העובר דרך מרכזו אזי חייב לפעול מומנט כדי לשמור על הגלגל מסתובב סביב הציר המקורי. במערכת הגלגל, כיוון המומנט הוא קבוע ואילו במערכת המעבדה כיוון המומנט מסתובב עם הגלגל ולכן הרעידות.

סיבוב של גוף במערכת המעבדה - ג'ירוסקופ

נסתכל על גוף בו מערכת הצירים אינה קבועה - של סביבון או ג'ירוסקופ. (נסתכל על בעיה זו תחת מספר קירובים בהם נדון בסוף).



סכום הכוחות על ציר $\hat z$ מתאפס כדי שלא תהיה תנועה בכיוון זה. לכן: $\vec N = -m\vec g$,

המומנט שמפעיל $\vec N$ על מרכז המסה זהה למומנט שמפעיל $m\vec g$ על נקודת המגע. אנו יכולים לעבוד סביב ציר אחד או השני. נעבוד סביב נקודת המגע.

מומנט הכח הכולל סביב נקודת המגע הוא:

$$\vec\tau = \vec r \times m\vec g$$

נעבוד במערכת המעבדה. שינוי התנע הזויתי (במערכת זו) שווה למומנט הכח:

$$\left.\frac{d\vec L}{dt}\right|_{lab} = \vec N = \vec r \times m\vec g$$

נחשב בעזרת הרכיבים במערכת המעבדה:

$$\vec r = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$\vec g = (0,0,-g)$$

ולכן:

$$\vec\tau = \vec r \times m\vec g = rmg(\hat y\cos\varphi - \hat x\sin\varphi)\sin\theta$$

רכיבי המשוואה לשינוי התנע הזויתי יהיו אם כן:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0$$

$$\frac{dL_x}{dt} = -rmg\sin\theta\sin\varphi$$

$$\frac{dL_y}{dt} = rmg\sin\theta\cos\varphi$$

אם מניחים כי $\vec L$ בכיוון של $\vec\omega$ (הגוף מסתובב סביב ציר הסימטריה שלו) ושני הוקטורים הללו בכיוון של $\vec r$, אזי

$$\vec L = (L\sin\theta\cos\varphi,\ L\sin\theta\sin\varphi,\ L\cos\theta)$$

ואז ניתן לכתוב את המשוואות ל- $\frac{dL_i}{dt}$:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \qquad \frac{dL_x}{dt} = -\overbrace{\frac{rmg}{L}}^{\equiv\Omega} L_y$$

$$\frac{dL_y}{dt} = +\underbrace{\frac{rmg}{L}} L_x$$

גודל עם מימדים של $\frac{1}{זמן}$. נגדיר אותו "תדירות" Ω.

-4-
26.12.04

נגזור משוואה אחת ונציב בשניה:

$$\frac{d^2L_x}{dt^2} = -\Omega^2 L_x$$

למשוואה זו הפתרון:

$$L_x = L_\perp \cos(\Omega t + \phi)$$

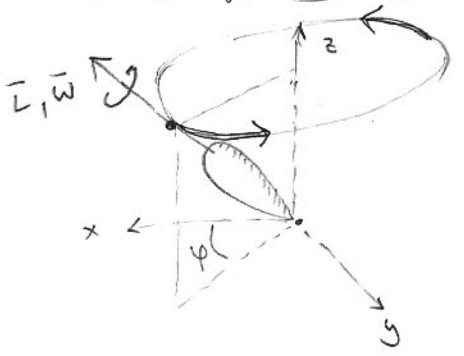
קבוע אינטגרציה, הוא גודל הרכיב הניצב של L.

עוד קבוע אינטגרציה.

נציב במשוואה עבור L_y ונקבל:

$$L_y = -\frac{1}{\Omega}\frac{dL_x}{dt} = L_\perp \sin(\Omega t + \phi)$$

אנו רואים כי תנועת הסביבון מורכבת מרכיב $\hat{z}$ (L_z) קבוע ואילו הרכיב הניצב מבצע תנועה מעגלית סביב ציר $\hat{z}$. לתנועה זו קוראים פרצסיה. תדירות תנועה זו היא



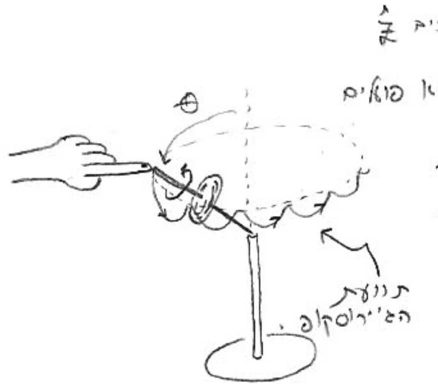
$$\Omega = \frac{rmg}{L} = \frac{rmg}{I\omega}$$

למעשה הנחנו מספר הנחות חשובות מאוד.

הפרצסיה משמעותה עוד רכיב ל-$\vec{\omega}$ בכיוון ציר $\hat{z}$. לכן, הוקטור $\vec{\omega}$ המלא של הסביבון לא מכיל רק את הסיבוב סביב הציר, $\vec{\omega}$ מכיל גם את הסיבוב של הפרצסיה. במקרה כזה לא ניתן להניח ש- $\vec{L} \parallel \vec{r}$ כפי שהנחנו מקודם. קירוב זה טוב עבור $|\omega| \gg \Omega$.
בתנועה הלא מקורבת, הסביבון יכול לבצע נוטציות - תנועה בה ציר הסיבוב עולה ויורד.

אם למשל מסובבים סביבון ולפני השחרור מחזיקים את הציר, אז בתחילה הסביבון יהיה מאוזן מבחינת מומנטים (האצבע תפעיל מומנט כוח מתנגד לכבידה).

בעקבות $\vec{g}$, הסביבון ימשך כלפי מטה. וכתוצאה מגדילת θ, רכיב $\hat{z}$ של התנע הזויתי מהסביבון יקטן. היות ובציר זה הוא נשמר (לא פועלים מומנטים סביב ציר זה!) כי הסביבון יתחיל להסתובב סביב $\hat{z}$.



אולם, θ לא יכול לגדול באופן בלתי מוגבל היות וזה ידרוש אנרגיה קינטית סיבובית (סביב ציר $\hat{z}$) מעבר למה שיש למערכת. מנקודה זו, הסביבון יחזור למעלה ויבצע תנועה מחזורית:

אפשר לתאר את התנועה ב-θ בעזרת פוטנציאל אפקטיבי....
אולם זה יבוא רק במכניקה אנליטית.

26.12.04

תנועת גוף קשיח - תאור במערכת הגוף - משוואות אוילר

נסתכל שוב על התנע הזויתי של הגוף:
$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$$

נעבוד במערכת הקשורה לגוף, במערכת זו רכיבי $\vec{r}_i$ הם קבועים: $\vec{r}_i = x_i\hat{x}+y_i\hat{y}+z_i\hat{z}$

אולם וקטור הסיבוב אינו קבוע, במערכת הגוף נכתוב: $\vec{\omega} = \omega_x\hat{x}+\omega_y\hat{y}+\omega_z\hat{z}$

למה שווה וקטור התנע הזויתי באופן כללי? לשם פישוט ההגדרה שלו, נשתמש בזהות הוקטורית:
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

כדי לקבל:
$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i\times m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \sum_i m_i\left(\vec{\omega}\, r^2-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}\right)$$

נסתכל על רכיב x של L_x:

$$L_x = \sum_i m_i\Big(\underbrace{\omega_x r_i^2 - (\omega_x x_i}_{=\omega_x(y_i^2+z_i^2)}+\omega_y y_i+\omega_z z_i)\,x_i\Big)$$

ולכן:
$$L_x = \Big(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\Big)\omega_x + \Big(-\sum_i m_i x_i y_i\Big)\omega_y + \Big(-\sum_i m_i x_i z_i\Big)\omega_z$$

ובאופן דומה:
$$L_y = \Big(-\sum_i m_i y_i x_i\Big)\omega_x + \Big(\sum_i m_i(x_i^2+z_i^2)\Big)\omega_y + \Big(-\sum_i m_i y_i z_i\Big)\omega_z$$

$$L_z = \Big(-\sum_i m_i z_i x_i\Big)\omega_x + \Big(-\sum_i m_i z_i y_i\Big)\omega_y + \Big(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\Big)\omega_z$$

אנו רואים כי ניתן לרשום את המשוואה כ-

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$L_y = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

* איברי האלכסון הם למעשה מומנטי האינרציה לסיבוב סביב הצירים $\hat{x}$ $\hat{y}$ או $\hat{z}$, (I_{xx}, I_{yy} או I_{zz}). האיברים המעורבים נקראים "מכפלות האינרציה". הם אלה הנותנים ל- $\vec{L}$ רכיב שניצב לציר סיבוב אם ציר הסיבוב סביב $\hat{x}$ $\hat{y}$ או $\hat{z}$, למשל, אם: $\vec{\omega}=(\omega_x,0,0)$, התנע הזויתי יהיה הוקטור: $\vec{L}=(I_{xx}\omega_x, I_{yx}\omega_x, I_{zx}\omega_x)$

* אנו רואים מההגדרה כי - $I_{ij}=I_{ji}$ ולכן ישנם למעשה 6 מספרים המתארים את הקשר בין $\vec{\omega}$ לבין $\vec{L}$.

26.12.04

<u>לידע כללי</u>! ניתן לכתוב את הקשר בין $\vec{L}$ ל- $\vec{\omega}$ בעזרת מטריצה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}}_{\text{וקטור 3-מימדי.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה } 3\times3} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

* כשמכפילים מטריצה בוקטור, הרכיב ה-i של התוצאה יהיה "המכפלה הסקלרית" של השורה ה-i-ית של המטריצה כפול העמודה של הוקטור.

מומנט האינרציה $\overline{\overline{I}}$ הוא למעשה מטריצה ולא "מספר" כפי שעבדנו קודם.

* לידע כללי: שוב, אם מכפילים מטריצה במטריצה אזי התוצאה תהיה מטריצה שהאיבר ה- i,j שלה יהיה השורה ה-i של המטריצה (בצד שמאל של המכפלה) "כפול סקלרית" בעמודה ה-j של המטריצה השניה (בצד ימין של המכפלה).

* מספר הוא גודל "מדרגה אפס", וקטור הוא גודל מדרגה ראשונה (יש לו רק "מימד" אחד של רכיבים). מטריצה היא גודל מדרגה שניה (עם שני מימדים של רכיבים). ניתן להכליל לגדלים עם מספר מימדים כלשהו, באופן כללי הם נקראים טנסורים, כך שמטריצה היא טנסור דו-מימדי. סקלר הוא טנסור אפס מימדי וכו'...

<u>חשוב מאוד לציין</u>, אך לא ניתן להוכיח בעזרת הכלים המתמטיים שברשותינו כעת, כי <u>תמיד</u> ניתן לבחור מערכת צירים הצמודה לגוף כך שהאיברים <u>שלא</u> על האלכסון יתאפסו.

* המשמעות עבורינו היא שניתן למצוא מערכת צמודה לגוף בה התנע הזויתי יראה:

$$\vec{L} = \underbrace{I_{xx}}_{I_x}\hat{x} + \underbrace{I_{yy}}_{I_y}\hat{y} + \underbrace{I_{zz}}_{I_z}\hat{z}$$

- לשם נוחות.

* אינטואיטיבית, ניתן לראות את ההגיון שבמשפט למעלה. מספר האיברים הבלתי תלויים שיש לא על האלכסון (האיברים המעורבים) הם 3 (כזכור מפני ש- $I_{ij}=I_{ji}$). ניתן להעלימם ע"י בחירת מערכת צירים הולמת ובבחירת מערכת צירים יש לנו גם 3 דרגות חופש - הכיוון של ציר $\hat{z}$ למשל (כיוון = 2 דרגות חופש) + הזוית של ציר $\hat{x}$ (למשל) במישור הניצב לציר $\hat{z}$.

26.12.04

כעת, שאנו יודעים שניתן לעבוד במערכת צירים של הגוף בה הביטוי עבור $\vec{L}$ פשוט הרבה יותר, נבחר לעבוד במערכת זו. היא נקראת "מערכת הצירים הראשיים".

נוכל עכשיו לשאול למה שווה השינוי בזמן של $\vec{L}$? היות ומערכת הגוף היא לא אינרציאלית נרצה לענות על השאלה במערכת הגוף ובמערכת המעבדה, התשובה במערכת המעבדה היא שהשינוי שווה למומנט הכח הפועל על הגוף. כלומר:

$$\underbrace{\vec{\tau}}_{\text{מומנט הכח}} = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_{lab}$$

אולם אנו עובדים במערכת הגוף ולכן יש לבטא את הנגזרה בעזרת קואורדינטות במערכת הגוף.

נשתמש ב-

$$\frac{d}{dt}\Big|_{lab} = \frac{d}{dt}\Big|_{body} + \vec{\omega}\times$$

ולכן:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_{lab} = \frac{d\vec{L}}{dt}\Big|_{body} + \vec{\omega}\times\vec{L} =$$

ובעזרת הרכיבים: (במערכת הראשית!)

$$\vec{L} = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)$$

$$\Longrightarrow \frac{dL}{dt}\Big|_{body} = I_x\frac{d\omega_x}{dt}\hat{x} + I_y\frac{d\omega_y}{dt}\hat{y} + I_z\frac{d\omega_z}{dt}\hat{z}$$

ואילו הרוטור:

$$\vec{\omega}\times\vec{L} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)\times(I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) =$$

$$= \hat{x}(\omega_y\omega_z I_z - \omega_z\omega_y I_y) + \hat{y}(\omega_z\omega_x I_x - \omega_x\omega_z I_z) + \hat{z}(\omega_x\omega_y I_y - \omega_y\omega_x I_x)$$

אם נציב את $\frac{dL}{dt}\Big|_{body}$ ו- $\vec{\omega}\times\vec{L}$ במשוואה למעלה, נקבל משוואה וקטורית ששלושת הרכיבים הם:

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_x\omega_y = \tau_x$$

$$I_y\frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = \tau_y$$

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = \tau_z$$

משוואות אלו נקראות משוואות אוילר. הן מתארות את התנהגות $\vec{\omega}$ במערכת הגוף. לכן, יש לבטא את $\vec{\tau}$ במערכת הגוף! (לא בהכרח משימה פשוטה היות ואם המומנט הוא חיצוני (לדוגמא גרביטציה על סביבון) יש לדעת את המצב הרגעי) ולכן במקרה כזה יותר נוח לעבוד במערכת המעבדה.

26.12.04

גדלים שימושיים, אם יודעים את ω ו- L :

האנרגיה הקינטית הסיבובית: $$K=\frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2+I_y\omega_y^2+I_z\omega_z^2\right)$$

ואילו הגודל של התנע הזוויתי: $$|L|=\sqrt{(I_x\omega_x)^2+(I_y\omega_y)^2+(I_z\omega_z)^2}$$

אם הגוף הוא גוף חופשי אזי גם K וגם $|L|$ ישארו קבועים למרות שהרכיבים המרכיבים את L משתנים במערכת הגוף.

שימושים למשוואות אוילר

1) סיבובים סביב צירים ראשיים. אם $\vec{\omega}$ הוא סביב אחד מהצירים הראשיים האיברים המעורבים במשוואות אוילר נופלים, ואם אין מומנטים חיצוניים, הגוף ימשיך להסתובב סביב אותו הציר, עבור $\vec{\omega}$ אחרת, $\vec{\omega}$ בהכרח ישתנה אלה אם $\vec{\omega}$ נמצא בין שני צירים שסביבם I הוא זהה. נראה בהמשך כי הסיבוב סביב ה- I הבינוני אינו יציב ואילו הסיבוב סביב ה- I הגדול או הקטן כן יצ.

2) מערכת בה שני מומנטי אינרציה קבועים: (נעבוד עם: $I_y=I_z=I_\perp$. כמו כן $\vec{\tau}=0$ (גוף חופשי)
במקרה זה, משוואות אוילר נהיות:

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt}=0$$

$$I_\perp\frac{d\omega_y}{dt}=(I_\perp-I_x)\omega_z\omega_x$$

$$I_\perp\frac{d\omega_z}{dt}=(I_x-I_\perp)\omega_y\omega_x$$

נגזור משוואה שניה: $\frac{d}{dt}$

$$I_\perp\frac{d^2\omega_z}{dt^2}=(I_x-I_\perp)\omega_x\frac{d\omega_y}{dt}$$

כזכור: $\dot{\omega}_x=0$,

נציב את המשוואה עבור $\dot{\omega}_y$:

$$I_\perp\frac{d^2\omega_z}{dt^2}=\frac{(I_x-I_\perp)(I_\perp-I_x)}{I_\perp}\omega_z\omega_x^2$$

נגדיר $\Omega^2=\frac{(I_x-I_\perp)^2}{I_\perp^2}\omega_x^2$ ונקבל:

$$\frac{d^2\omega_z}{dt^2}+\Omega^2\omega_z=0$$

26.12.04

משוואה זו מתארת תנועה הרמונית ב- ω_z עם הפתרון הכללי:

$$\omega_z = \underbrace{\omega_\perp}_{\text{קבוע אינטגרציה.}} \cos(\Omega t + \underbrace{\phi}_{\text{קבוע אינטגרציה}})$$

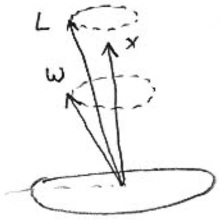
הפתרון עבור ω_y יהיה:

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \underbrace{\frac{I_\perp - I_x}{I_\perp}\omega_x}\cdot\omega_z = +k\Omega\omega_z$$

Ω או $-\Omega$ – תלוי באם $I_\perp > I_x$ או $I_\perp < I_x$. לכן נכתוב: $\omega_y = k\Omega\omega_z$ אם $k = \pm 1$ בהתאם לסימן ב- $I_\perp - I_x$.

$$\omega_y = k\omega_\perp \sin(\Omega t + \phi)$$

ω_y, ω_z מבצעים סיבוב סביב ציר $\hat{x}$. כלומר הגוף שלנו מבצע <u>פרצסיה</u> בתדירות Ω. כיוון הפרצסיה תלוי באם $I_\perp > I_x$ או להפך.



ב) יציבות סיבוב סביב ציר ראשי. (נסתכל על מערכת עם I-ים שונים) ונראה שאם הסיבוב קרוב לציר ראשי, אזי הפרצסיה תהיה יציבה אם מדובר בציר סביב ה- I הגדול או הקטן ביותר ואילו הסיבוב אינו יציב אם הציר הוא ציר בעל ה- I הבינוני.

אם אנו מסתובבים בסביבות ציר ראשי (נניח והוא $\hat{x}$) אזי האיברים עם $\omega_x\omega_z$ או $\omega_x\omega_y$ יהיו גדולים הרבה יותר מ- $\omega_y\omega_z$ (גודל קטן לעומת גודל קטן בריבוע...).

לכן, בקירוב סדר ראשון, נרשום:

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt} = (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \simeq 0 \implies \omega_x \simeq \text{const}$$

לעומת זאת:

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt} = (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

גזירה.

$$\frac{d^2\omega_z}{dt^2} \simeq \frac{(I_x - I_y)}{I_z}\omega_x \underbrace{\frac{d\omega_y}{dt}}_{\text{הצבה מאוילר.}} = \overbrace{\frac{(I_x - I_y)(I_z - I_x)}{I_z I_y}\omega_x^2}^{\equiv \lambda^2}\omega_z$$

כי זרקנו את $\dot{\omega}_x$

באופן דומה:

$$\frac{d^2\omega_y}{dt^2} \simeq \frac{(I_z - I_x)(I_x - I_y)}{I_z I_y}\omega_x^2\,\omega_y$$

הפתרון עבור ω_z (או ω_y) הוא תנועה הרמונית אם λ^2 הוא שלילי, והתנועה היא לא יציבה (עם: $e^{\pm\lambda t}$) עבור λ^2 שהוא חיובי. כדי ש- λ^2 יהיה חיובי והתנועה לא יציבה, I_x צריך להיות בין I_y ל- I_z!

מבוא לתורת היחסות הפרטית

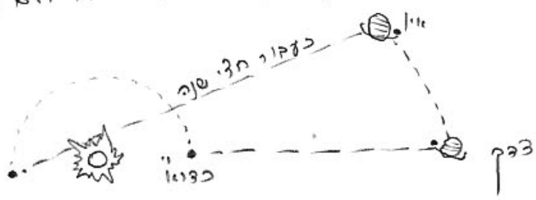
ישנן שתי עובדות תצפיתיות שהובילו לתורת היחסות הפרטית. הן:

1) מהירות האור היא סופית.

2) לאור אין תווך הכרחי על מנת להתעבר אותו (דהיינו אור אינו כמו גל קול הדורש אוויר או גל ים הדורש שפת מים וכו'..) ולכן אין משמעות למהירות אבסולוטית היות ואין למה להשוות!

מהירות האור הסופית

* מעט היסטוריה. הראשון שמדד את מהירות האור והסיק הגיע שהיא סופית היה Ole Roemer הדני. הוא מדד שהליקויים של איו (הקרוב לצדק מבין ארבעת הירחים הגדולים של צדק) מפגרים ב- 22 דקות (הערך האמיתי הוא 17 דקות) כאשר כדוה"א וצדק נמצאים בצדדים הפוכים של השמש לעומת המצב בו הם באותו הצד.



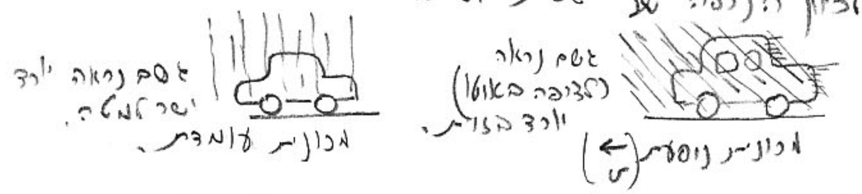
הוא הסיק שפיגור זה נובע מכך שלאור לוקח יותר זמן להגיע מצדק לכדוה"א היות והמרחק גדול יותר כאשר כוכבי הלכת בצדדים השונים של השמש. הפרש המרחקים הוא פעמיים המרחק מכדוה"א אל השמש. ולכן:

$$\underbrace{c}_{\text{מהירות האור}} = \frac{\text{פעמיים מרחק כדוה"א-שמש}}{\text{פיגור זמן}}$$

למזלו של רומר, שפרסם את תוצאות מדידותיו ב- 1676, המרחק אל השמש היה כבר ידוע על-ידי קסיני (שמדד ב- 1672 את המרחק אל השמש ע"י כך שמדד את המרחק אל מאדים ע"י מדידת פרלקסה - דהיינו, משתי נקודות על כדוה"א מאדים לא נראה בדיוק באותו הכיוון), ובכן, קיבל מהירות אור הקטנה בפקטור של כ- $\frac{22}{17}$, מערכה הידוע היום.

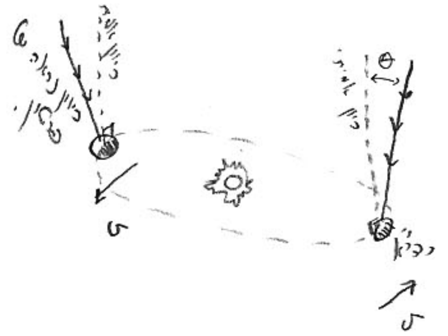
29.12.09

* ב- 1726 מדד האנגלי ג'ימס ברדלי (James Bradley) את מהירות האור ע"י תופעה הנקראת "אברציה" (aberration) בה האור אינו מגיע מהכיוון "האמיתי" שלו. הדבר דומה לכיוון הנצפה של טיפות גשם.



בעת נסיעה במכונית (או בריצה בגשם) אני רואה את הגשם נופל בזוית יחסית למאונך (גם אם אין רוח). וזאת מפני שיחסית לנו לטיפות יש מהירות אופקית בנוסף למהירות האנכית שלהם.

מה שברדלי גילה היה שהאור המגיע מכוכב צפוני (דהיינו בניצב לכיוון התנועה שלנו סביב השמש משנה את מיקומו



יחסית לקוטב הצפוני, הכוכב נראה נע באליפסה (כמעט מעגל) בקוטר של 40 שניות קשת.

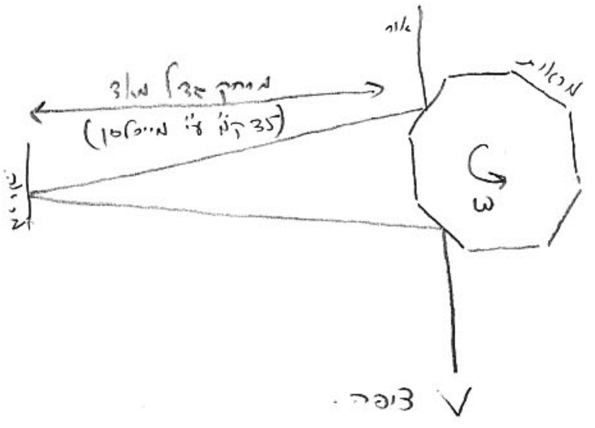
הוא העריך את מהירות האור כי:

$$c = \frac{v(\text{כדה"א})}{\theta} \cong \frac{30\ km/s}{\underbrace{20/(3600\cdot\frac{180}{\pi})}} \approx 300{,}000\ \frac{km}{sec}$$

20 שניות קשת ברדיאן.

* המדידה הראשונה על כדה"א נעשתה ע"י פיזו (Fizeau) הצרפתי. ב- 1849 הוא בנה מערכת המורכבת מגלגל שיניים מסתובב. קרן אור עוברת דרך הגלגל עוברת מרחק גדול (5 ק"מ במקרה הראשון) וחוזרת חזרה. אם הגלגל שיניים מסתובב במהירות מאוד נמוכה האור יעבור דרך אותו המרווח בין השניים. במהירות גבוהה יותר, הקרן אור החוזרת תפגע בשן ולא תראה. אם הגלגל מסתובב מספיק מהר, הקרן תעבור דרך המרווח הבא. ע"י ידיעת המרחק והמהירות, חישב כי מהירות האור היא: $2.98\times10^{10}\ cm/sec$.

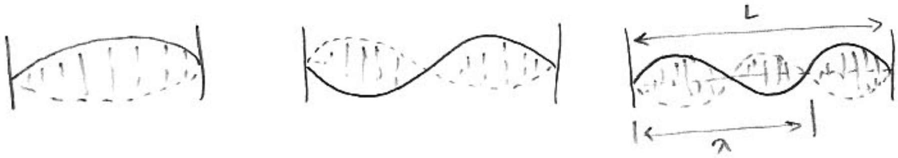
* יותר מאוחר, פוקו פיתח שיטה דומה (ששופרה אחר כך ע"י מייקלסון) והיא התבססה על מראות מסתובבות:



במערכת זו, צופה יראה קרן אור רק אם בעת הפגיעה הראשונה והשניה המראות ב- 45° ביחס לאופק/אנכי של המערכת. אם הגלגל מסתובב עליו לעשות בדיוק כפולה של 45° בזמן מעבר האור את המרחק למראה ובחזרה.

29.12.04

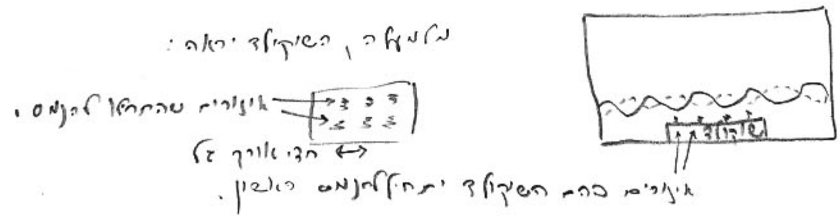
* בשיטות נוספות למדידת C מודדים את התדירות f הדרושה על מנת לקבל גל עומד בתוך. לדוגמא, אם מסתכלים על מיתר קשור בקצותיו, הגלים העומדים נראים:



ואורכי הגל המותרים הם $\lambda = 2L$, $\lambda = L$, $\lambda = \frac{2L}{2}$ וכו'... (או $\lambda = \frac{nL}{2}$) אם יודעים את האורך גל מ- L (ו- n) ויודעים את התדירות f, מהירות הגל תהיה:

$$c = \lambda f$$

דוגמא מודרנית למדידת c היא מדידת c בעזרת מיקרוגל וחבילת שוקולד. שמים את השוקולד במיקרוגל (מוציאים את הצלחת המסתובבת אם יש כזו). מחממים את השוקולד עד שמתחיל להימס. המרחק בין הנקודות הנמסות יהיה חצי אורך הגל. (כ- 20 שניות)



אנו רואים כי בעזרת אורך וזמן (תדירות) מוגדרים אנו יכולים למדוד את מהירות האור. למעשה, משנות השבעים, מדידות אלו הרבה יותר מדויקות מהדיוק בו אנו יודעים את האורך! ולכן, כיום, מהירות האור מוגדרת (ולא מדודה!) כ-

$$c = 2.99792458 \times 10^{10}\ cm/sec$$

ויחידת האורך (למשל מטר) מוגדרת בעזרת מהירות זו של האור ויחידת הזמן (השניה, שהיא מוגדרת ככפולה מסוימת של מעבר אטומי בצזיום).

בכל מקרה, מסקנה ראשונה:

* <u>מהירות האור היא סופית</u>

כעת נדון בשאלה האם ישנה מערכת אבסולוטית למעבר האור.

29.12.04

מערכת אבסולוטית לאור?

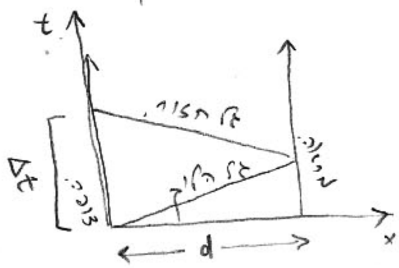
לפי הפיסיקה הקלאסית, דיברו כי ישנו מדיום המעביר את גלי האור ושיחסית למדיום זה מהירות האור היא c. כך הדבר בגלי קול למשל. הקול צריך את האויר שיעביר אותו. אם האויר במנוחה, מהירות הגלים היא מהירות הקול. אם האויר נע, או לחלופין אנו נעים יחסית לאויר, מהירות הגלים יחסית לנו יהיה מהירות המדיום (האויר) + מהירות הגלים במדיום.

המדיום שאמור היה להעביר את גלי האור נקרא אתר (Aether) ודיברו שהוא ממלא גם את החלל שמחוץ לכדור הארץ ואור עובר דרך התווך הזה!

נחשב מה המשמעות של תנועה יחסית לתווך לגבי זמן מעבר הגל במערכת המורכבת מצופה ומראה הנעים במהירות v יחסית לתווך.

צופה פולט גל ← הגל פוגע במראה ← הגל חוזר אל הצופה.

אם הצופה והמראה במנוחה יחסית לתווך, התהליך יראה בדיאגרמת "מרחק-זמן" כך:

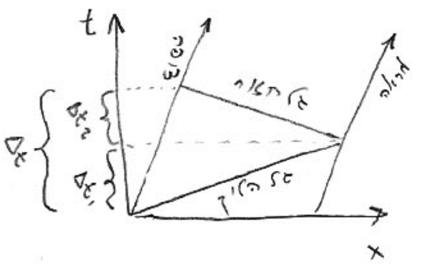


זמן המעבר של הגל יהיה

$$\Delta t = d/V$$

כאשר V הוא המהירות של הגל בתווך (למשל $V=v_s$ אם גל זה הוא גל קול). אם המערכת מתארת אור, $V=c$.

מה קורה אם הצופה והמראה נעים במהירות v יחסית לתווך? הדיאגרמה נראית כך:



בגלל שהמראה מתרחקת כל הזמן, המרחק הגל לעבור עד הפגיעה הוא לא d אלא $\Delta x_1=d+\Delta t_1 v$ כי בזמן המעבר Δt_1, המראה התרחקה מרחק $v\Delta t_1$.

באותה דרך, בזמן שהגל חוזר, הצופה מתקרב אל נקודת הפליטה, כך שבזמן המעוף Δt_2, הצופה התקרב במרחק $\Delta t_2 v$ כך שהדרך הכוללת אותה צריך לעבור הגל בדרך חזרה היא רק: $\Delta x_2 = d - \Delta t_2 v$. הזמן שיקח לגל בהלוך הוא:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{V} = \frac{d+\Delta t_1 v}{V} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{d}{V-v}$$

ואילו בחזור:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{V} = \frac{d-\Delta t_2 v}{V} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{d}{V+v}$$

זמן המעוף הכולל הוא אם כן:

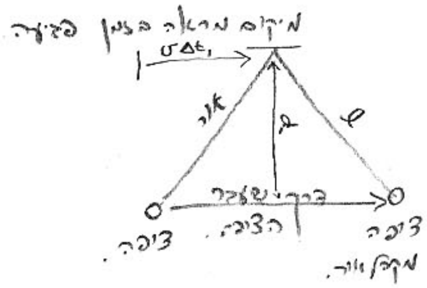
$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{d}{V-d} + \frac{d}{V+d} =$$

$$= d\left(\frac{(V+v)+(V-v)}{(V-v)(V+v)}\right) = \frac{2dV}{V^2-v^2} = \frac{2d}{V}\,\frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

צ.ו.ל. אם האור נע על תווך (כמו אתר), זמן המעוף של האור אמור להתארך בפקטור של $\frac{1}{1-(v/c)^2}$

לשאלת צ.ו.ל, מה היה קורה אילו תנועת הצופה והמראה היו בניצב לתנועת התווך?

במקרה כזה, יחסית לתווך העומד, המראה והצופה נעים, אני נראה:



במקרה זה, הלוך Δt_1 וחזור Δt_2 יהיו שווים. הדרך אותה עובר הגל היא:

$$l = \sqrt{d^2+v^2\Delta t_1^2}$$

ולכן יקחו זמן שהוא:

$$\Delta t_1 = \frac{l}{V} = \frac{\sqrt{d^2+v^2\Delta t_1^2}}{V} \Leftarrow V^2\Delta t_1^2 = d^2+v^2\Delta t_1^2$$

ולכן: $\Delta t_1 = \frac{d}{\sqrt{V^2-v^2}}$

הזמן הכולל שיקח לגל (אור) לעבור את הדרך הוא:

$$\Delta t = 2\Delta t_1 = \frac{2d}{V}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

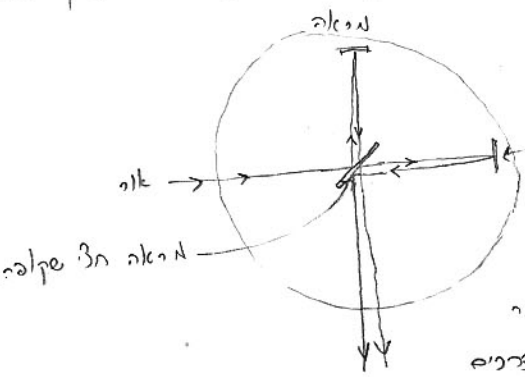
צ.ו.ל. גם אם התנועה היא בניצב, יקח לגל יותר זמן לעבור את הדרך וחזרה, אולם ההגדלה הזו בפחות מההגדלה אם התנועה היא בכיוון תנועת האור.

נחשב את הפרש הזמנים:

$$\Delta(\Delta t) = \underbrace{\Delta t_{\parallel}}_{\text{כשהגל הולך בכיוון התנועה}} - \underbrace{\Delta t_{\perp}}_{\text{כשהגל בניצב לתנועה היחסית}} = \frac{2d}{V}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right)$$

$$\underset{\text{בעזרת טיילור}}{\simeq} \frac{2d}{V}\left[\left(1+\left(\frac{v}{V}\right)^2\right)-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\right] = \frac{2d}{V}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2$$

מיכלסון ומורלי ניסו למדוד אפקט זה עבור האור. דהיינו, אם האור נע על אתר אזי תנועת כדור הארץ יחסית לאתר תגרום לכך שאור העובר מרחק בכיוון התנועה יעבור אותו בזמן אחר מאשר אותו המרחק בניצב. היות וקשה לייצר שני מרחקים השווים בדיוק רב מאוד, מייכלסון ומורלי בנו את המערכת שלהם על שולחן מסתובב.



צופה המסתכל על הקרן שעברה את שתי הדרכים יכול להשוות את הפרש הדרכים ע"י תופעה שנקראית התאבכות (גלים בעלי אותה הפאזה מתחברים באופן בונה ואילו אם נוצר הפרש פאזה של π - דהיינו שהפרש הדרכים הוא $\lambda/2$, הגלים המתחברים הורסים זה את זה) עבור...

אם מסובבים את השולחן ב-90° אזי במקום שדרך אחת תהיה ארוכה יותר $\underset{\text{(בזמן)}}{}$ ב- $\frac{dv^2}{V^3}$, היא תהיה קצרה יותר באותה מידה, ותמונת ההתאבכות תשתנה.

מייכלסון ומורלי גילו ב-1879 שאין הפרש זמנים בין שתי הדרכים - דהיינו, כשמסובבים את השולחן, תמונת ההתאבכות נשארת זהה.

בהנחה שהאתר אינו נגרר ביחד עם כדוה"א (אם כן, והוא נמשך גרביטציונית אז הוא לא אמור למלא את החלל בין כוכבי הלכת) - המסקנה המתבקשת היא שאין אתר ואין מערכת אבסולוטית יחסית לה ניתן למדוד את מהירות הגל. במילים אחרות בכל המערכות מודדים בהכרח את אותה מהירות האור c. תוצאה זו ביחד עם מהירות האור הסופית הובילו את איינשטיין לתורת היחסות הפרטית שבבסיסה:

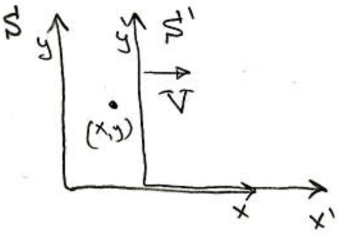
- מהירות האור סופית.
- כל המערכות האינרציאליות אקוויוולנטיות מבחינת חוקי הפיסיקה. בפרט, מהירות האור שנמדדת בניסוי כל שהוא תמיד תהיה c. (ולכן גם אין משמעות למהירות אבסולוטית, רק למהירות יחסית בין שתי מערכות - ומכאן השם תורת היחסות).

טרנספורמצית לורנץ

נראה כעת מה ניתן לומר על הטרנספורמציה בין מערכות המקיימות את הנחות היסוד של יחסות פרטית. דהיינו, מה יראה צופה במערכת S' הנעה במהירות v יחסית לצופה הנמצא במערכת S? כיצד מקשרים בין אירועים כפי שנמדדים בשתי המערכות?

טרנספורמצית גלילי (מערכות קלסיות - לא יחסותיות)

לפני שנדון בטרנספורמציות יחסותיות, נדון תחילה במערכות קלסיות לא יחסותיות.



ארוע המתרחש בנקודה (x,y,z) ובזמן t במערכת S, יראה במערכת S' באותו הזמן $t=t'$ (השעונים מתקתקים זהה ללא קשר למהירות של המערכת). הקואורדינטות y' ו- z' יהיו זהות ל- y ו- z. אם מניחים שהמערכות התלכדו בזמן $t=0$, אזי הנקודה (x,y,z) תמדד ע"י צופה ב- S' בנקודה $(x'=x-vt, y, z)$. ז.א. טרנספורמצית גלילי נותנת:

$$x'=x-vt,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t$$

ניתן גם לתאר את הקשר בין מהירות הנמדדת ב- S למהירות הנמדדת ב- S':

$$u=\frac{dx}{dt}\quad ;\quad u'=\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-v=u-v$$

$\Leftarrow$ בטרנספורמצית גלילי, מהירויות מסתכמות (או מוחסרות) בצורה פשוטה. במערכות יחסותיות קשר זה יהיה יותר מורכב!

טרנספורמצית לורנץ

כדי לקבל קשר בין מערכות המקיימות את הנחות היסוד של תורת היחסות הפרטית, נבחר טרנספורמציה כללית בין ארוע (דהיינו x,y,z ו- t) במערכת S ובמערכת S', ונבדוק מה צריכה להיות הטרנספורמציה הזו כדי שמהירות האור תהיה זהה בשתי המערכות ושהתנועה המערכות אחת לשניה תהיה v נתון.

אם בזמן $t=0$ נפלט גל אור מראשית הצירים של מערכת S ומערכת S' (דהיינו ראשית הצירים של המערכות התלכדה ב- $t'=t=0$) אזי האור, בשתי המערכות, יראה כאילו מתפשט בצורה כדורית, במהירות c. חזית הגל אור מקיימת:

במערכת S:
$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\text{רדיוס הכדור}}=\underbrace{c^2t^2}_{\text{המרחק שעבר האור}}$$

במערכת 'S יתקיים: $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$

זאת מפני שהצופה ב- 'S יראה את האור מתפשט גם במהירות c, אבל הזמן אותו ימדוד הצופה לאותו האירוע לא חייב להיות זהה! ולכן אנו מאפשרים את האפשרות ש- $t \neq t'$ (אילו לא היינו מאפשרים אפשרות זו, לא היינו יכולים לקיים את את העקרון שבכל המערכות האור נראה כמתפשט במהירות c זהה).

כעת אני מחפשים טרנספורמציה בין S ל- 'S שתקיים את הקשר הנ"ל ואת הקשר בסוף העמוד הקודם וכמו כן, שתקיים $x=x'+Vt$ דהיינו, שראשית הצירים של 'S נעה במהירות V יחסית ל- S.

מהי הטרנספורמציה המקיימת דרישות אלו ??

נחפש טרנספורמציה מהצורה:

$$x'=\alpha x+\varepsilon t \quad (1)$$
$$y'=y \quad (2)$$
$$z'=z \quad (3)$$
$$t'=\delta x+\eta t \quad (4)$$

* עקרונית, היינו יכולים לחפש טרנספורמציה בה גם 'y וגם 'z אינם שווים ל- y ו- z אולם נראה ש- $y'=y$ ו- $z'=z$ כן יקיימו את הדרישות שלנו מהטרנספורמציה.
* שנית, הסבה שלא השתמשנו ב- γ ו- β היא שבאותיות אלו נשתמש עוד מעט והרבה!

- מה הם כל המקדמים $\eta, \delta, \varepsilon, \alpha$ של הטרנספורמציה (הלינארית) הזו?

* לגבי צופה במערכת 'S ראשית הצירים של 'S נשארת בנקודה $x'=0$ כל הזמן. אולם, צופה ב- S רואה את 'O (ראשית הצירים של 'S) נעה ימינה במהירות V, כך שבזמן t של הצופה ב- S היא נמצאת במיקום $x=Vt$. ממשוואה מס' (1) למעלה, נקבל:

$$\underbrace{x'}_{0}=\alpha \underbrace{x}_{Vt}+\varepsilon t \Rightarrow 0=\alpha Vt+\varepsilon t \Rightarrow V=-\varepsilon/\alpha$$

* באותה צורה, צופה ב- 'S רואה את ראשית הצירים O של S נעה שמאלה במהירות $-V$, כך שבעבור זמן 't היא תמצא ב- $x'=-Vt'$. ממשוואה מס' (1) נקבל:

$$\underbrace{x'}_{-Vt'}=\alpha \underbrace{x}_{0}+\varepsilon t \Rightarrow t'=-\frac{\varepsilon}{V}t$$

נציב במשוואה (4) ונקבל:

$$\underbrace{t'}_{-\frac{\varepsilon}{V}t}=\delta \underbrace{x}_{0}+\eta t \Rightarrow V=-\frac{\varepsilon}{\eta}$$

מהמשוואה ה- $V = -\frac{\varepsilon}{\alpha}$ נקבל מיד: $\underline{\alpha = \eta}$.

* נציב כעת את הקשרים באילוץ שמהירות האור נראית c ב- S':

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \Rightarrow \alpha^2 x^2 + 2\alpha\varepsilon x t + \varepsilon^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2(\delta^2 x^2 + 2\delta\alpha x t + \alpha^2 t^2)$$

נכנס איברים יחדיו ונקבל:

$$x^2(\alpha^2 - c^2\delta^2) + xt(2\alpha\varepsilon - 2c^2\delta\alpha) +$$
$$+ x^2 + y^2 = c^2 t^2 (\alpha^2 - \varepsilon^2/c^2)$$

אנו דורשים מהטרנספורמציה שהביטוי הנ"ל יראה כמו:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

לכן, חייב להתקיים כי:

$$\begin{cases} \alpha^2 - c^2\delta^2 = 1 \\ 2\alpha\varepsilon - 2c^2\delta\alpha = 0 \\ \alpha^2 - \varepsilon^2/c^2 = 1 \end{cases}$$

נציב את הקשר: $\varepsilon = -V\alpha$:

$$\begin{cases} \alpha^2 - c^2\delta^2 = 1 \\ -2\alpha^2 V - 2c^2\delta\alpha = 0 \\ \alpha^2 - \frac{\alpha^2 V^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

מהמשוואה האחרונה נקבל:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

נציב במשוואה השניה

$$\delta = -\frac{\alpha V}{c^2} = \frac{-V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

כמו כן:

$$\varepsilon = -V\alpha = \frac{-V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\eta = \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

לשם נוחות, נגדיר:

$$\beta \equiv \frac{V}{c} \quad ; \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

עבור מהירויות נמוכות: $\beta \ll 1$ ו- $\gamma \simeq 1$ ואילו עבור מהירויות גבוהות המתקרבות למהירות האור, $\beta \to 1$ ו- $\gamma \gg 1$. (ראה בהמשך שלא ניתן להגיע (להאיץ גוף מסה) למהירות האור.

הטרנספורמציה שקיבלנו, נקראת טרנספורמציית לורנץ:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

או בעזרת β ו- γ :

$$\left[\; x' = \gamma(x - \beta c t) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right) \;\right]$$

כדי לקבל את הטרנספורמציה ההפוכה, נחלץ את t מהמשוואה האחרונה:

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \beta\frac{x}{c}$$

ונציב במשוואה של x' :

$$x' = \gamma\left(x - \beta\frac{c}{\gamma}t' - \beta^2 x\right) \Rightarrow x\left(\gamma(1-\beta^2)\right) = x' + \beta c t'$$

אולם:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot(1-\beta^2) = \frac{1}{\gamma}$$

ולכן: $x = x' + \beta c t'$ באותה צורה ניתן לקבל $t = \gamma\left(t' + \beta\frac{x'}{c}\right)$

לכן, הטרנספורמציית לורנץ ההפוכה היא:

$$\left[\; x = \gamma(x' + \beta c t'),\; y = y',\; z = z',\; t = \gamma\left(t' + \beta\frac{x'}{c}\right) \;\right]$$

תוצאה זו אינה מפתיעה כלל. זאת מפני שהיא מתקבלת מהחלפת הקואורדינטות ב- S עם הקואורדינטות ב- S' והחלפת β ב- $-\beta$ היות ואין מערכת אבסולוטית, שתי המערכות אקוויולנטיות והטרנספורמציה המתקבלת זהה פרט לכך שהמהירות של האחת יחסית לשניה היא $+v$ ואילו של השניה יחסית לראשונה היא $-v$! ← אם לא היתה הסימטריה הזו כי אז היינו בבעיה.

שימושים בטרנספורמצית לורנץ

נהוג להגדיר את המרחב + זמן כמרחב 4 מימד'. כל נקודה + זמן = אירוע המוגדר ע"י וקטור ארבע מימדי: (x,y,z,t). הערה: לפעמים כותבים (z,y,x,t), דהיינו, שהרכיב הראשון הוא t.

טרנס' לורנץ היא טרנס' בה משנים את תאור המערכת צירים, המשמשים לתאור 4-וקטור שלנו, ממערכת אחת למערכת שניה. אם התנועה למשל בכיוון ציר x, אז טרנס' זו מערבבת את רכיבי x ו-t. למה הדבר דומה? אם מסובבים את המערכת סביב ציר $\hat{z}$ למשל, טרנס' הסיבוב תערבב בין רכיבי x ו-y. ההבדל הוא שסיבוב סביב ראשית הצירים משמר את המרחק לראשית הצירים:

$$x^2+y^2 = x'^2+y'^2$$

ואילו טרנס' לורנץ משמרת את הגודל: $x^2-c^2t^2 = x'^2-c^2t'^2$

לידע כללי: ניתן להראות שטרנס' לורנץ אקויולנטית לסיבוב בזוית מדומה!

התכווצות האורך.

דוגמא ראשונה שנבחן היא התופעה הנקראת התכווצות האורך.
נסתכל על מוט באורך L. במערכת S' הצמודה למוט, קצוות המוט נמצאים ב:

$$S': \ (\underset{x}{0},\underset{y}{0},\underset{z}{0},t') \ \text{ו-} \ (L,0,0,t')$$

דהיינו, הקואורדינטות אינן משתנות, פרט לזמן שמתקדם לו.

כיצד יראו קצוות המוט במערכת S, אם המוט (מערכת S') נע במהירות v יחסית לצופה במערכת S?

לשם כך נשתמש בטרנס' לורנץ:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta c t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \beta \frac{x'}{c}) \end{cases}$$

נסתכל על הנקודה הראשונה:

במערכת S היא תהיה:

$$x = \gamma\beta ct' = \frac{vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y=0 \qquad z=0$$

$$t = \gamma t' = \frac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \xrightarrow{\text{הצבת } t'} x = vt$$

ואילו הנקודה השניה:

$$x = \gamma L + \gamma\beta ct = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$y=0 \qquad z=0$$

$$t = \gamma t' + \beta\frac{x'}{c}\gamma = \frac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{vL/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

הפעם כשנציב את $\gamma t'$ מהמשוואה האחרונה בראשונה, נקבל:

$$x = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + vt - \frac{\frac{v^2}{c^2}L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,L + vt$$

צופה ב- S יראה מוט שקצותיו הם: $S: (vt,0,0,t)$

$$\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\,L + vt, 0, 0, t\right)$$

$\Leftarrow$ הצופה ב- S ימדוד אורך קצר יותר בפקטור $\sqrt{1-v^2/c^2}$!

$\Leftarrow$ פרט מעניין נוסף: שני אירועים המתרחשים בו זמנית במערכת S' בקצוות המוט בזמן t' נתון אינם נצפים במערכת S באותו הזמן. האירוע ב $x'=0$ מתרחש ב- $t = t'/\sqrt{1-\beta^2}$

ואילו האירוע ב $x'=L$ מתרחש ב- $t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{vL/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

{ כלומר, אירועים סימולטניים במערכת אחת אינם בהכרח סימולטניים במערכת אחרת הנעה ביחס למערכת הראשונה. }

טרנספורמציה של מהירות

בעזרת טרנספורמצית לורנץ ניתן לענות על שאלה נוספת. למשל, אם גוף נע במהירות v' במערכת S', הנעה בעצמה במהירות V יחסית למערכת S, מה תהיה מהירותו של הגוף במערכת S? בהינו, מעניין אותנו כעת לדעת מהו חוק חיבור מהירויות עבור טרנספורמציה בין שתי מערכות אינרציאליות.

כדי לפתור בעיה זו, נחזור להגדרה של מהירות: מהירותו ב-S' היא:
$$S': \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

ואילו מהירותו במערכת S:
$$S: \quad v_x = \frac{dx}{dt}$$

כדי למצוא את הקשר, נכתוב את המהירות כדלהלן:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \underset{\uparrow}{=} \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\Big/\frac{dt'}{dt}$$

על השרשרת.

נשתמש כעת בטרנספורמצית לורנץ:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta c t) \\ t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

נגזור לפי t ונקבל:

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma\frac{dx}{dt} - \gamma\beta c \qquad \frac{dt'}{dt} = \gamma - \frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt}$$

נציב בקשר עבור v ונקבל:

$$v'_x = \frac{\gamma\frac{dx}{dt} - \gamma\beta c}{\gamma - \frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt}}$$

נצמצם ב-γ ונרשום ש- $v_x = \frac{dx}{dt}$ ונקבל:

מהירות S' ביחס ל-S

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \beta v_x/c} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}$$

עבור ציר y, (או ציר z), נקבל

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\Big/\frac{dt'}{dt}$$

וכעת נגזור את הביטויים:

$$\begin{cases} y' = y \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \;;\; \frac{dt'}{dt} = \gamma - \frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt}$$

4.1.05

נחלק ונקבל:

$$v'_y = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma - \frac{\gamma\beta}{c}\frac{dx}{dt}} = \overbrace{\sqrt{1-\underbrace{\beta^2}_{V^2/c^2}}}^{1/\gamma}\ \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}$$

באותה דרך:

$$v'_z = \sqrt{1-\beta^2}\ \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}$$

{ עבור מהירויות נמוכות $v \ll c$, V מקבלים $v_x = v'_x - V,\ v_y = v'_y,\ v_z = v'_z$
זהו טרנספורמציות גלילאו (בין מערכות אינרציאליות לא יחסותיות) }

היות והמערכות אקוויוולנטיות, ניתן לקבל את הטרנספורמציה ההפוכה באופן מיידי
ע"י החלפת גדלים עם ' בגדלים ללא ' וע"י החלפת V ב- $-V$

ומקבל:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \qquad v_y = \frac{v'_y}{1 + v'_x V/c^2}\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + v'_x V/c^2}\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

נראה כעת שהמשוואות שפתחנו אינן סותרות את העיקרון לפיו בכל המערכות, מהירות האור היא c.

נניח כי $v_x = c$ ב- S, במערכת S', מהירות הפוטון (חלקיק האור) תהיה:

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = \frac{c(c-V)}{c - V} = c$$

ז"א. גם במערכת S' יהיה לפוטון מהירות c

טרנספורמצית לורנץ - עוד דוגמאות

התארכות הזמן של שעונים נעים.

נסתכל על חלקיק שאינו מאיץ, ונצמיד לו מערכת (למשל S). במערכת זו, החלקיק ישאר בראשית. כמו כן, לצופה במערכת זו מוגדר זמן t. היות וזהו הזמן שהחלקיק ימדוד בעצמו, קוראים לזמן זה "הזמן העצמי" של החלקיק (propertime).

נראה כעת מה ימדוד צופה הנע במהירות v יחסית לחלקיק, דהיינו, כיצד ימדוד צופה את הזמן העובר t' של החלקיק?

(הערה: נהוג לסמן את הזמן העצמי של חלקיק או גוף כלשהו ב- τ).

כיצד נפתור בעיה זו? נסתכל על הבעיה בדומה לבעיית המוט. דהיינו, נגדיר שני ארועים במערכת החלקיק S ונראה כיצד הצופה שנע ב- S' ימדוד אותם.

היות והחלקיק נמצא בראשית של S, שני "הארועים" יהיו:

$$S: \quad (0,0,0,t_1) \quad \text{ו-} \quad (0,0,0,t_2)$$

כיצד ימדדו ארועים אלו במערכת S'?

נשתמש בטרנספורמצית לורנץ:

$$x' = \gamma(x - \beta c t)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

(כאשר β מוגדר באופן הרגיל כאן)

במערכת S' שני הארועים יהיו:

$$S': \quad (-\gamma\beta c t_1, 0, 0, \gamma t_1) \quad \text{ו-} \quad (-\gamma\beta c t_2, 0, 0, \gamma t_2)$$

האיבר של x' מתאר את העובדה שהחלקיק נע שמאלה במהירות v במערכת S' (בעזרת t', האיברים הינם $-vt'_1$ ו- $-vt'_2$ כפי שצפוי).

אולם מה שמעניין אותנו כעת הם הזמנים. הזמן שחלף בין שני הארועים במערכת S העצמית הוא:

$$\Delta t \equiv \Delta \tau \equiv t_2 - t_1$$

לעומת זאת, במערכת S', הזמן בין המאורעות הוא:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma t_2 - \gamma t_1 = \gamma \Delta t$$

כלומר, הזמן המדוד בין שני המאורעות יתארך אם המאורעות אינם נמדדים במערכת בה המאורעות מתרחשים באותו המקום.

המשמעות של תוצאה זו היא שהשעון שיתקתק הכי מהר במערכת מסוימת הוא השעון הנמצא במנוחה. כל שעון שנע יחסית למערכת מסוימת, יראה באותה המערכת כמתקתק יותר לאט!

<u>דוגמה: זמן החיים של חלקיק $\pi^\pm$</u>

חלקיקי ה-π^+ וה-π^- הם חלקיקים המורכבים מקווארקים כמו הנויטרון והפרוטון. חלקיקים אלה אינם יציבים. הם חיים (במערכת המנוחה שלהם) כ-2.6×10^{-8} שניות בקירוב (זה הזמן שבו מספר הפיונים יקטן בפקטור e, ואחרי זמן זהה נוסף המספר יקטן בפקטור e נוסף וכן הלאה). הם נוצרים בטבע כתוצאה מאינטראקציה בין קרינה קוסמית (חלקיקים בעלי אנרגיה, כמו פרוטונים, המגיעים אל כדור הארץ מחוץ למערכת השמש) ובין האטמוספירה שלנו, בגבהים גבוהים.

לו לא היתה התופעה של התארכות הזמן וחלקיקים אלו היו נעים בערך במהירות האור הם יכולים היו לעבור מרחק של:

$$\Delta X \simeq c\cdot\Delta t \simeq 3\times10^{10}\,\frac{cm}{sec}\cdot 2.6\times10^{-8}\,sec \simeq 800\,cm = 8\,m$$

אולם, ניתן לגלות בפני השטח של כדור הארץ פיונים שנוצרו במרומי האטמוספירה. ניתן להראות ניסיונית שחלקיקים אלו לא יכולים לנוע במהירות גבוהה יותר ממהירות האור, כך שההסבר הוא שצופה במערכת המעבדה יראה את הפיון חי הרבה יותר זמן ממה שהפיון רואה את עצמו!

כדי שהפיון יוכל לעבור 8 ק"מ במקום 8 מטר לפני שהוא מתפרק, אני רוצים:

$$\Delta t' = 1000\,\Delta t = \gamma\Delta t \leadsto \gamma = 1000$$

כלומר:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1000$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = 10^{6} \leadsto \frac{v}{c} = \sqrt{1-10^{6}} \simeq 1-5\times10^{-7}$$

נשאלת אם כן השאלה, במערכת המעבדה אני רואים התארכות הזמן מחצית חיים של החלקיק המסבירה כיצד הפיון שנוצר בגובה של 10 ק"מ יכול להגיע לפני הקרקע, אך,

אם מסתכלים על הבעיה מנקודת המבט של הפיון, החלקיק במערכת שלו
חי 2.6×10^{-8} שניות ובכל זאת עובר את ה- 10 ק"מ של האטמוספירה. הכיצד?!

התשובה היא כמובן התכווצות האורך אותה ראינו בשעור הקודם. אמנם
אנו רואים חלקיק חי הרבה זמן והעובר 10 ק"מ, הפיון יראה שעבר זמן
קצר אך גם ה- 10 ק"מ במערכת שלנו יראו כ- $\frac{10km}{\gamma}$ במערכת של הפיון,
כי הפיון רואה את בפועל (נע במהירות מאוד קרובה למהירות האור)!

<u>דוגמה נוספת</u>: האברציה של האור

תופעת האברציה היא התופעה אותה ראה ברדלי במאה ה- 18 הגורמת לאור להראות
כמגיע מכיוון הטוי במהירות הנדפה.

נניח שכוכב (נמצא במנוחה בראשית O במערכת S (הוא פולט) אור בכיוון ציר y שלו.
מה יהיה מסלול קרני האור במערכת 'S הנעה במהירות V ב-x יחסית ל- S?

רכיבי המהירות של הקרניים ב- S הם: $v_x=0,\ v_y=c,\ v_z=0$

נציב ערכים אלה במשוואות שקיבלנו לטרנספורמציה של מהירויות ונקבל:

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} = -V$$

$$v_y' = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} = c\sqrt{1-V^2/c^2}$$

$$v_z' = \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} = 0$$

ונוסף לבדוק ש- $v_x'^2 + v_y'^2 = (V^2) + c^2(1-V^2/c^2) = c^2$
כלומר, עדיין מהירות האור היא מהירות האור..

הזוית שיוצרת הקרן מציר 'y היא:

$$\sin\alpha = \frac{v_x'}{|v'|} = \frac{-V}{c}$$

כי אין רכיב v_z'

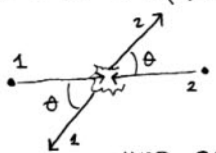
(התוצאה הקלאסית של ברדלי היא: $\tan\alpha = \frac{-V}{c}$ ולכן בקירוב של מהירויות קטנות, התוצאות זהות).

תנע, אנרגיה ומסה ביחסות פרטית. (דינמיקה יחסותית)

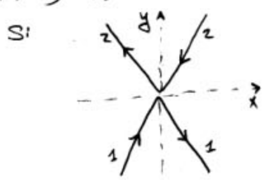
נתחיל עם מושג התנע. נראה ראשית, שהתנע הקלאסי, המוגדר כ- $\vec{p}=m\vec{v}$ אינו מספק במעברים יחסותיים הוא לא יהיה גודל נשמר. נמשיך בחיפוש אחר גודל שכן ישמר (הוא יהיה $\gamma m\vec{v}=\vec{p}$). אחר"כ נמשיך ונראה כיצד ניתן להפוך את התנע ל-4-וקטור כך שנוכל לתרגם את התנע ממערכת למערכת. נראה שהרכיב הרביעי של ה-4 וקטור יהיה האנרגיה של החלקיק. כמו כן, נראה כיצד בדיוק אלו קשורים במסה המשתנה של החלקיק, וכן שאנרגיה ומסה חד-הם.

התנע היחסותי

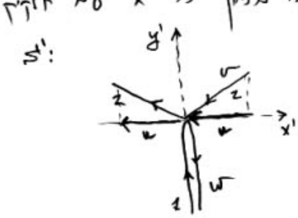
נסתכל על פיזור בין שני חלקיקים זהים, המשמר אנרגיה (התנגשות אלסטית). במערכת מרכז המסה נראה:



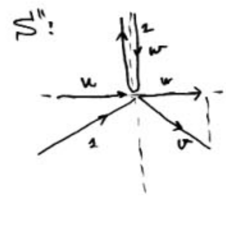
את התנע והאנרגיה נשמרים, במערכת מרכז המסה הפיזור יהיה סימטרי ומהירות הפגיעה וההתרחקות תהיינה זהות. ניתן, כמובן, להסתכל על ההתנגשות במערכת המסובבת ב- $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$:



כמו כן, אנו יכולים לעבור למערכת הנעה בכיוון ציר x עם חלקיק מס' 1:



במערכת זו, נניח כי חלקיק מס' 1 מגיע במהירות w (וחוזר במהירות $-w$). המהירות הכוללת של חלקיק 2 היא v ואילו רכיב x שלה הוא u. מה יהיה רכיב y' של מהירות חלקיק מס' 2? מסימטריה של המערכת אנו יכולים להסתכל על מערכת S'' בה לחלקיק 2 אין רכיב מהירות בציר $\hat{x}''$:



במערכת זו, רכיב y'' של התנועה של חלקיק 2 יהיה כמובן $-w$ (או w בהתנגשות). לכן, במערכת S', רכיב y (בעזרת טרנס' של מהירות) יהיה:

$$(S':)\quad v_{2y'} = \pm w\sqrt{1-u^2/c^2}$$

כעת ניתן לראות התנע הקלסי אכן נשמר בכיוון ציר $\hat{x}$ (והוא שווה ל- mu לפני ואחרי ההתנגשות) אולם בציר $\hat{y}$ הוא אינו נשמר:

"התנע הקלסי" בכיוון y במערכת 'ב

לפני: $$\underbrace{P_{classical,y',0}} = \underbrace{mw}_{\text{חלקיק 1}} - \underbrace{mw(1-u^2/c^2)^{1/2}}_{\text{חלקיק 2}} \neq 0$$

אחרי: $$P_{clas,y',1} = -mw + mw\left(1-u^2/c^2\right)^{1/2} = -P_{clas,y',0}$$

כלומר, הביטוי עבור התנע הקלסי בכיוון ציר y' אינו שווה לאפס והוא מחליף סימן עם ההתנגשות לכן הוא לא נשמר. האם יש ביטוי שכן נשמר?

נחפש ביטוי מהצורה: $$\vec{p} = f(v)m\vec{v}$$

דרך אחת להסתכל על זה, היא שהמסה תלויה במהירות. $\vec{p} = m(v)\vec{v}$
והמטרה שלנו היא למצוא את תלות המסה במהירות.

במערכת 'ב, שינוי התנע של חלקיק מס' 1 הוא: $$\Delta p_1' = -\overset{\text{הלוך+חזור}}{2}m(w)w$$

שינוי התנע של חלקיק מס' 2 הוא: $$\Delta p_2' = 2m(v)w\sqrt{1-u^2/c^2}$$

אם הגודל שנקרא לו תנע הוא בעל שימוש, הוא אמור להשמר, ולכן אנו רוצים שיתקיים:

$$\Delta p_1' + \Delta p_2' = 0 \quad \text{או} \quad m(w)w = m(v)w\sqrt{1-u^2/c^2}$$

כלומר:

$$\frac{m(w)}{m(v)} = \sqrt{1-u^2/c^2}$$

נקרא לזה "מסת המנוחה" המתקבלת מ- $v=0$.

נראה מה קורה עבור $w/u \ll 1$. במקרה כזה, אנו אמורים לקבל ש $m(w) \to m(0) \equiv m_0$

וגם באותה צורה: $m(v) \to m(u)$. כאמור:

בגבול w קטן מאוד

$$\frac{m_0}{m(u)} = \sqrt{1-u^2/c^2} \Rightarrow m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma m_0$$

ניתן להראות (ע"י הרבה יותר מתמטיקה) שביטוי זה עבור $m(u)$ משמר את התנע גם עבור w סופי.

מה קבלנו? ראינו שאם אנו רוצים להגדיר גודל הדומה לתנע הקלסי ושנשמר ושנשמר בהתנגשויות יחסותיות, על גודל זה להיות: $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$. נימוקו כי בפיזיקה הנחנו שאם מסתכלים על מערכות ייחוס שונות הקשורות ביניהן בטרנס' לורנץ אז הפיזיקה היא אקוויולנטית. תנאי זה הכרחי לשימור הגודל הנ"ל. במילים אחרות - ניסויים שיראו לנו כי התנע היחסותי נשמר אקוויולנטיים לדרישה כי תחת טרנס' לורנץ הפיזיקה זהה (כפי שהפיזיקה הקלסית אינה משתנה תחת טרנס' גליליאו)

התנע היחסותי כארבע וקטור

אנו ראינו כי הוקטור התלת-מימדי $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ נשמר בהתנגשות (למשל). אולם, כעת מעניין אותנו לדעת כיצד הגודל הזה נראה במערכות שונות. למשל, תחת טרנס' גליליאו ממערכת אחת למערכת שניה הנעה במהירות V היא:

$$\vec{P}'_{clas} = \vec{P}_{clas} - m\vec{V},$$

כדי למצוא את הטרנס' של $\vec{p}$ ממערכת יחסות אחת לשניה, נגדיר אותו כחלק מארבע-וקטור. כדי להבין כיצד לעשות זאת, נסתכל על הגודל $\vec{p}^2$:

$$\vec{p}^2 = m_0^2 \gamma^2 v^2 = m_0^2 \frac{1}{1-\beta^2} v^2 = m_0^2 c^2 \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} =$$

$$= m_0^2 c^2 \left\{ -1 + \frac{1}{1-v^2/c^2} \right\} = -m_0^2 c^2 + m^2 c^2 \gamma^2$$

ולכן:

$$\vec{p}^2 - m^2 c^2 \gamma^2 = -m^2 c^2$$

נעבוד עם c כדי שמימדי כל הרכיבים יהיו זהים.

בכלל, אם היה לנו וקטור (x, y, z, ct) אזי תחת טרנס' לורנץ הגודל $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ נשאר קבוע (זהו "אורך" מוכלל של 4-וקטור הנשאר קבוע תחת הטרנספורמציה של לורנץ)

לכן, אם נגדיר את הרביעיה $(p_x, p_y, p_z, m\gamma c)$ אזי טרנס' לורנץ ישמרו על הביטוי

$$\vec{p}^2 - m^2 c^2 \gamma^2 = -m^2 c^2$$

בכל המערכות שנבחר. לכן, נגדיר את הרביעיה הנ"ל כ-4-תנע.

$$(\text{4-תנע})\ p = (\gamma m_0 v_x, \gamma m_0 v_y, \gamma m_0 v_z, \gamma m_0 c)$$

והיא תעבור טרנס' כמו ה-4-וקטור של הקואורדינטות.

9.1.04

<u>דרך הסתכלות נוספת:</u> הקשר בין הזמן t במערכת S לבין הזמן העצמי τ

שהוא הזמן הנמדד במערכת צמודה לחלקיק נתון ע"י: $dt = \gamma d\tau$

ז"א. $\vec{p} = \gamma m_0 \frac{dx}{dt} = m_0 \frac{dx}{d\tau}$

דהיינו, התנע היחסותי הוא כמו התנע הקלסי אם המהירות נמדדת ביח' זמן שהיא הזמן העצמי של החלקיק ולא הזמן הנמדד במערכת S. את הארבע-תנע ניתן אפילו לכתוב בצורה:

$$P = (\vec{p}, \gamma m_0 c) = \gamma m_0 \frac{d}{dt}\left(\vec{r}, ct\right) = m_0 \frac{d}{d\tau}(\vec{r}, ct)$$

כי $\frac{dt}{dt} = 1$

הרי ש- $(\vec{r}, ct)$ עובר כמו 4-וקטור ממערכת למערכת והרי ש- $m_0\frac{d}{d\tau}$ אינו תלוי המערכת, גם P המוגדר למעלה הוא 4-וקטור העובר ממערכת למערכת בעזרת טרנס' לורנץ.

<u>המשמעות של האיבר הרביעי ב-4-תנע:</u>

האיבר הרביעי ב-4-תנע הוא: $\gamma m_0 c$. למה הוא שווה במהירויות נמוכות?

$$\gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right)}_{\text{פיתוח טור טיילור}} = m_0 c + \frac{1}{c}\,\frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

ז"א. $\gamma m_0 c$ נראה כמו $m_0 c$ פלוס c כפל האנרגיה הקינטית של החלקיק. לכן, נקרא לגודל $\gamma m_0 c^2$ כאנרגיה של המערכת:

$$\gamma m_0 c^2 = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{אנרגיית מנוחה}} + \underbrace{(\gamma - 1) m_0 c^2}_{\text{אנרגיה קינטית } K} \simeq m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

ז"א. הארבע-תנע הינו: $P = (\vec{p}, \frac{E}{c})$ הוא והוא ארבע וקטור, הוא עובר טרנס' כמו 4-וקטור בלורנץ:

$$\begin{cases} P_x' = \gamma\left(P_x - \beta \frac{E}{c}\right) \\ P_y' = P_y \\ P_z = P_z' \\ E' = \gamma\left(E - \beta c P_x\right) \end{cases}$$

המשמעות של המסה המשתנה — על מסה ואנרגיה.

נסתכל על שני חלקיקים הנעים זה לכיוון זה

$p = m(v)v$ $\qquad$ $p = \gamma m_0 v = m(v)\cdot v$

ונניח מתחברים להם יחדיו (למשל פרוטון ונויטרון), ויוצרים גוף חדש. הארבע תנע של הגוף החדש (ללא איבוד אנרגיה) יהיה:

$$P_{TOT} = (\gamma m_0 v, 0, 0, \gamma m_0 c) + (-\gamma m_0 v, 0, 0, \gamma m_0 c) =$$
$$= (0, 0, 0, 2\gamma m_0 c)$$

ציין, למרות שמסת הגוף המורכבת היא $2m_0$, המסת מנוחה של הגוף שנוצר היא $2\gamma m_0$! כלומר, הגוף החדש שלנו אמנם מורכב מ-$2m_0$ אך גם מאנרגיה שהייתה האנרגיה הקינטית בהתחלה $(2(\gamma-1)m_0c^2)$. שהפכה בחלקה לאנרגיית קשר וחלקה נשארה אנרגיה קינטית של המרכיבים. אנרגיה פנימית זו, יש לה אינרציה! והיא מתנהגת כמו מסה!!! כעת ניתן להבין טוב יותר את הביטוי של איינשטיין:

$$E = m(v)c^2 = \gamma m_0 c^2$$

דוגמא: מסת הפרוטון:

הפרוטון מורכב משלושה קווקים: שני up ואחד down (נויטרון מורכב מ-up אחד ושני down).
הערכות כיום הן שמסת ה-up היא כ-1.5-4 MeV ואילו מסת ה-down היא 4-8 MeV. אולם, מסת הפרוטון היא 938 MeV, כלומר רוב "המסה" של הפרוטון היא האנרגיה האצורה שיש בקשר היא מהווה את רוב מסת הפרוטון!

דוגמא נוספת: היתוך גרעיני. מסה של ארבעה פרוטונים: $4m_p = 4\times 938\ MeV = 3752\ MeV$

מסה של גרעין הליום $M_{He^4} = 3726\ MeV$

המסה של גרעין הליום נמוכה יותר, היות ואנרגיית הקשר היא שלילית (הגרעין קשור). אם נהפוך 4 פרוטונים להליום, נקבל חזרה אנרגיה:

$$\Delta E = 4m_p - M_{He^4} = 26\ MeV$$

מסה יכולה להפוך לאנרגיה (ראיה: פצצת מימן!)

האישור הניסיוני לשימור תנע-אנרגיה יחסותי (הנושא שהפיסיקה אקוויולנטית בין מערכות אינרציה המופרדות ע"י טרנס' לורנץ) הוא בניסוי של ארתור קומפטון ב-1923 (Arthur Compton). (וזכה בפרס נובל ב-1927) שהראה שה-4 תנע נשמר והראה אפוא גם שהאור הוא תופעה חלקיקית (בנוסף להיותו גלי).

בניסוי, חלקיק אור (פוטון) מתנגש באלקטרון והללו מתפזרים.

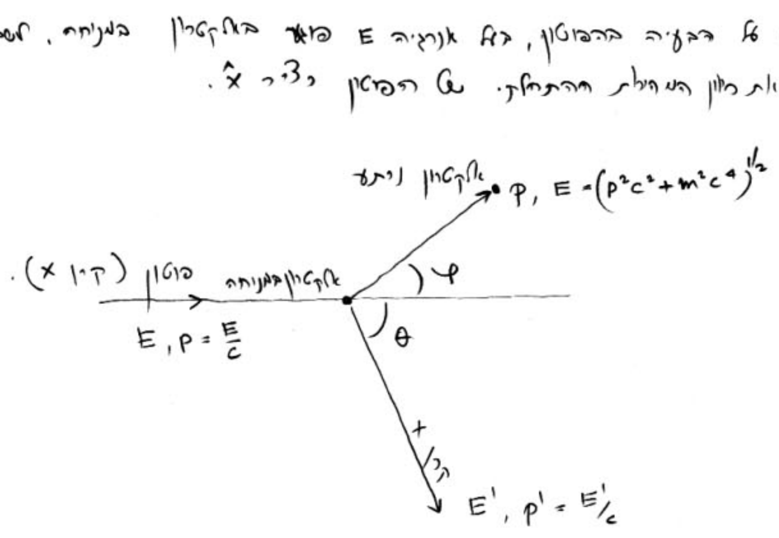
* ובכן, מה התנע של פוטון?

מתוך הקשר: $\vec{p}^2c^2 - E^2 = -m_0^2c^4$ ברור שכשהמסה $m_0=0$ (נתון): $p=\frac{E}{c}$

(באופן מעניין, התורה האלקטרומגנטית של מקסוול נותנת גם היא את הקשר בין התנע שלה לאנרגיה שלה: $p=E/c$!)

<u>פיזור קומפטון.</u>

נסתכל על הבעיה בה הפוטון, בעל אנרגיה E פוגע באלקטרון במנוחה. לשם נוחות נבחר את כיוון התנועה ההתחלתי של הפוטון בציר $\hat{x}$.



בניסוי רואים שקרני ה-x מתפזרות בזווית θ (שבכולה יכולות שונות מפיזור לפיזור) ואילו האלקטרונים נרתעים בזווית φ (התלויה ב-θ בלבד). אנרגיות הפוטונים המפוזרים שונות מאנרגיות הפוטונים הפוגעים (ותלויה ב-θ).

שוב חשבון קל יתן את הקשר $E'(E,\theta)$ שנמצא.

9.1.05

שימור תנע בכיוון הקרן ניתן:

$$\frac{E}{c} = \underbrace{\frac{E'}{c}}_{\substack{\text{תנע פוטון}\\ \text{(אחרי פיזור)}}} \cos\theta + \overbrace{p}^{\text{תנע אלקטרון}} \cos\varphi$$

שימור תנע בכיוון הניצב לקרן:

$$0 = \frac{E'}{c} \sin\theta - p \sin\varphi$$

כמו כן, שימור אנרגיה ניתן:

$$m_0c^2 + E = (p^2c^2 + m_0^2c^4)^{1/2} + E'$$

שני משוואות התנע נותנות:

$$p^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \left(\frac{E}{c} - \frac{E'}{c}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 \sin^2\theta$$

דהיינו:

$$p^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - 2\frac{EE'}{c^2}\cos\theta$$

מצד שני, את p^2 ניתן לקבל משימור אנרגיה:

$$(m_0c^2 + (E-E'))^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

(פתח את הריבוע:

$$m_0^2c^4 + 2m_0c^2(E-E') + (E-E')^2 = p^2c^2 + m_0c^4$$

לכן:

$$p^2 = \left(\frac{E-E'}{c}\right)^2 + 2m_0(E-E')$$

נשווה את שני הביטויים ל-p (משימור אנרגיה ומשימור תנע) ונקבל:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - \frac{2EE'}{c^2}\cos\theta = \underbrace{\left(\frac{E-E'}{c}\right)^2}_{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - 2\frac{EE'}{c^2} + \left(\frac{E'}{c}\right)^2} + 2m_0(E-E')$$

ז.א.

$$-\frac{2EE'}{c^2}\cos\theta + \frac{2EE'}{c^2} = 2m_0(E-E')$$

או:

$$\frac{E-E'}{EE'} = \frac{(1-\cos\theta)}{m_0c^2}$$

או:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta)$$

9.1.05

הביטוי הנ"ל אושר נסיונית.

כמו כן, ההתאמה היתה גם עם אורך הגל של הפוטונים, אם כותבים

$$E = \underbrace{h}_{\text{קבוע פלנק = קבוע של הטבע.}}\underbrace{\nu}_{\text{תדירות הפוטון.}} = h\frac{c}{\lambda}$$

כלומר:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$$

על ההתאמה בין הפרשי ה-E לצורת הפיזור ועל הקשר בין ההתנהגות הגלית (אורך הגל) להתנהגות החלקיקית (אנרגיה של פוטון) קיבל קומפטון פרס נובל (1927).