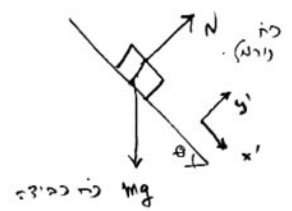
פתרון:

א. הכוחות מתוארים בציור:



סה"כ כוח בכיוון x': $\sum F_{x'} = mg\sin\theta$

בכיוון y': $\sum F_{y'} = N - mg\cos\theta = 0$

בכיוון y' אין כח, אין תנועה ואין עבודה. העבודה נעשית מעבודה נטו הכח בכיוון x':

$$W = F_{x'} \cdot s = mg\sin\theta \cdot s$$

אולם s נתון ע"י:

$$h/s = \sin\theta \rightarrow s = h/\sin\theta$$

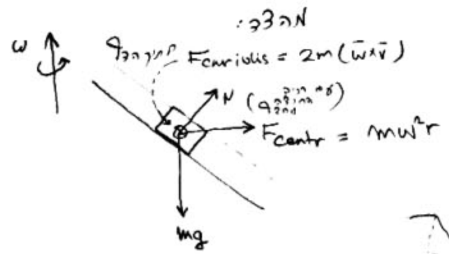
לכן:

$$W = mgh$$

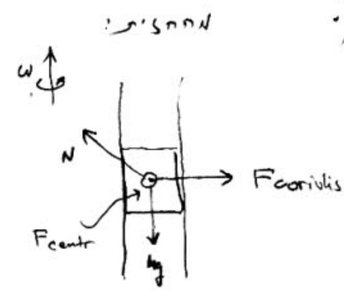
ב. משימור אנרגיה:

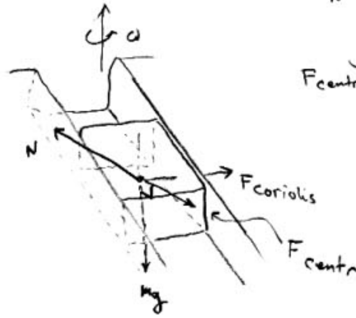
$$mgh = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{2} \Rightarrow v = (2gh)^{1/2}$$

ג. מהצד:



מחזית:





$\vec{N}$ גדל רכיב כמו מקודם (בגלל סיבוב) + רכיב הפוך לכח קוריוליס.

ד. הכוח השקול הפועל לאורך המסלול הוא:

$$F_{\parallel} = mg\sin\theta + m\omega^2 r\cos\theta$$

נעבוד עם פרמטר ℓ - המרחק מן הקודקוד

$$r = \ell\cos\theta$$

העבודה הנעשית ע"י הכוח:

$$W = \int_0^{\ell = h/\sin\theta} \left(mg\sin\theta + m\omega^2\cos^2\theta\,\ell\right) d\ell =$$

$$= mgh + \frac{1}{2}m\omega^2 h^2\tan^2\theta = mgh + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{h^4}{R^2}$$

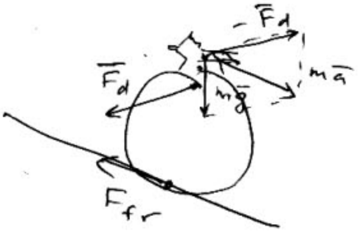
ה. את מהירות הגוף במערכת הקונוס ניתן למצוא ע"י שימור אנרגיה:

$$W = \frac{mv'^2}{2} \longrightarrow v' = \left(2gh + \frac{\omega^2 h^4}{R^2}\right)^{1/2}$$

במערכת האינרציאלית, יש להוסיף את התנועה היחסית של המערכות. היות והתנועה היחסית היא בכיוון $\hat{\varphi}$ ואילו התנועה במערכת הגוף היא בכיוון $\hat{r}$ ו- $\hat{z}$, המהירויות ניצבות וגודל המהירות הסופי (במערכת המעבדה):

$$V = \sqrt{v'^2 + \underbrace{\omega^2 R^2}_{\text{מהירות יחסית}}} = \left(2gh + \frac{\omega^2\left(h^4 + R^4\right)}{R^2}\right)^{1/2}$$

2 פתרון



במערכת מרכז המסה:

$$\frac{dL}{dt} = F_{fr} R + N_d$$

$$m\bar a = m\bar g - \bar F_d , \quad \bar F_d = m\bar g - m\bar a$$

$\bar F_d$ - כוח שפועל על הכדור מצד הכלב, $m\bar g$ לא תורם לשינוי התנע הזוויתי

$$N_d = N_{-m\bar a} = -N_{ma}$$

$$Ma = Mg\sin\alpha - F_{fr} + mg\sin\alpha - ma$$

$$-N_{m\bar a} = -maR\cos\alpha$$

$$I\frac{a}{R} = (m+M)(g\sin\alpha - a)R - maR\cos\alpha .$$

$$Ia = (m+M)(g\sin\alpha - a)R - maR^2\cos\alpha$$

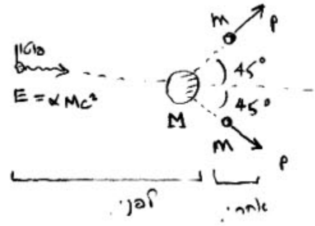
$$\left[I + R^2(m+M) + mR^2\cos\alpha\right]a = R^2(m+M)g\sin\alpha$$

$$a = \frac{R^2(m+M)g\sin\alpha}{I + R^2(m+M) + mR^2\cos\alpha} \Rightarrow \cancel{I = MR^2} \Rightarrow \cancel{\frac{R^2(m+M)g\sin\alpha}{MR^2}}$$

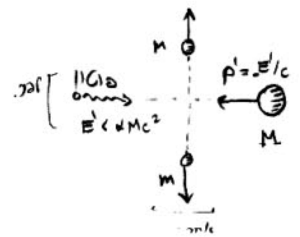
פתרון-

א) תרשים הריאקציה.

במערכת המעבדה



במערכת מרכז המסה



במערכת מרכז המסה, למסות m לא יכול להיות רכיב x למהירות היות ואז יהיה נטו תנע קוי למערכת.

ב. חוקי השימור הרלוונטיים הם שימור אנרגיה ושימור תנע (בכיוון $\hat{x}$ ו-$\hat{y}$).

חוק שימור אנרגיה:

$$(1+\alpha)Mc^2 = 2\sqrt{m^2c^4+\underbrace{p^2c^2}}$$

תנע המסות m שאינו ידוע.

שימור תנע בכיוון $\hat{x}$:

$$\underbrace{p_\gamma} = \alpha Mc = 2p\cos 45^\circ$$

תנע הפוטון,

שימור תנע בכיוון $\hat{y}$: מתקיים אוטומטית – $p\sin(45^\circ)+p\sin(-45^\circ)=0$

ג. התנע p של החלקיקים מתקבל משימור תנע ב-$\hat{x}$:

$$p=\frac{\alpha Mc}{2\cos 45^\circ}=\frac{\alpha Mc}{\sqrt{2}}$$

נציב במשוואה לשימור אנרגיה:

$$(1+\alpha)Mc^2 = 2\sqrt{m^2c^4+\alpha^2M^2c^4/2}$$

משוואה ל-m, פתרונה:

$$(1+\alpha)^2M^2 = 4\left(m^2+\alpha^2M^2/2\right)$$

$$m^2=\left[\frac{(1+\alpha)^2}{4}-\frac{\alpha^2}{2}\right]M^2 \Longrightarrow m=\frac{M}{2}\left[(1+\alpha)^2-2\alpha^2\right]^{1/2}$$

ג. תנע הפוטון הוא:

$$p = \frac{\alpha M c}{\sqrt{2}}$$

הקשר בין תנע ומהירות:

$$p = \frac{mv}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \Rightarrow p^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 v^2$$

$$\Downarrow$$

$$v^2\left(m^2 + p^2/c^2\right) = p^2$$

ולכן:

$$v = \frac{p}{(p^2/c^2 + m^2)^{1/2}} = \frac{p}{(p^2 + m^2c^2)^{1/2}} \cdot c$$

כעת נציב את p ו- M:

$$v = \frac{\frac{\alpha M c^2}{\sqrt{2}}}{\left[\alpha^2 M^2 c^2 + \frac{M^2}{4}\left((1+\alpha)^2 - 2\alpha^2\right)\right]^{1/2}} = \frac{\alpha c}{\left(2\alpha^2 + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 - \alpha^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\alpha c}{\left(\alpha^2 + (1+\alpha)^2/2\right)^{1/2}}$$

פתרון:

ראשית, נמצא k אפקטיבי לשני הקפיצים שבצד שמאל

- אם ההסטה היא Δx, כל קפיץ מתארך ב- $\frac{\Delta x}{2}$ ולכן מפעיל כח

$$F = -k\frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \underbrace{k_{12}}_{\text{אפקטיבי:}} = \frac{k}{2}$$

נחבר עם קפיץ ימין - הכח הכולל על המסה אם ישנה הסטה Δx

הוא:
$$F = -\underbrace{k\Delta x}_{\text{ימין}} - \underbrace{\frac{k}{2}\Delta x}_{\text{משמאל}} = -\frac{3k}{2}\Delta x$$

k_{eff} של שלושת הקפיצים.
$$k_{eff} = \frac{3k}{2}$$

תדירות התנודות.
$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

10 נקודות

נניח שנתון חלקיק כדורי הומוגני ומלא במסה 10^{-27}gr, רדיוס 10^{-13}cm ותנע זוויתי (סביב ציר העובר במרכזו) של 10^{-27}gr cm^{2}sec^{-1}.
תחשבו את המהירות ההיקפית של נקודה על קו המשווה של הכדור והראו שאם נתונים כאלו מתקבלת סתירה עם תורת היחסות.

פתרון

לכדור מלא סביב ציר העובר במרכזו $I=\frac{2}{5}MR^2$

ולכן $I=\frac{2}{5}\cdot10^{-27}\times10^{-26}=\frac{2}{5}10^{-53}$ gr cm^2

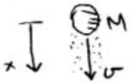
התנע הזוויתי הוא $J=I\omega$ ולכן $\omega=\frac{J}{I}=\frac{10^{-27}}{\frac{2}{5}10^{-53}}=\frac{5}{2}10^{26}$ rad/sec

המהירות ההיקפית על קו המשווה $v=\omega R=\frac{5}{2}\times10^{26}\times10^{-13}=\frac{5}{2}\times10^{13}\,\frac{cm}{sec}$

וערך זה גדול ממהירות האור $c=3\times10^{10}\,\frac{cm}{sec}$.

סתירה.

פתרון:



נניח כי ברגע נתון, נתונים המסה M ומהירות הטיפה v.

רדיוס יהיה:

$$M = \underbrace{\rho_w}_{\text{צפיפות המים.}} \frac{4\pi}{3} R^3 \Rightarrow R = \left(\frac{3M}{4\pi \rho_w}\right)^{1/3}$$

שטח החתך שלה:

$$A = \pi R^2 = \pi \left(\frac{3M}{4\pi \rho_w}\right)^{2/3}$$

קצב גדילת הטיפה הוא:

$$\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix}\text{נפח שהטיפה} \\ \text{אוספת} \\ \text{ליחידת זמן}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{מס'} \\ \text{טיפות} \\ \text{ליחידת נפח}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{מסת} \\ \text{טיפה}\end{pmatrix} = (A v) \cdot n \cdot m$$

(בדיקת יחידות: $cm^2 \cdot \frac{cm}{sec} \cdot \frac{1}{cm^3} \cdot gr = \frac{gr}{sec}$ ✓). לכן:

$$\frac{dM}{dt} = \pi \left(\frac{3M}{4\pi \rho_w}\right)^{2/3} v\, n\, m$$

כח הגרר:

$$F_d = -\alpha A v^2 = -\pi \alpha \left(\frac{3M}{4\pi \rho_w}\right)^{2/3} v^2$$

משוואת התנועה:

לא פועל נטו כח על הטיפות הקטנות הן נחות
הגרר = כבידה.

$$\frac{dP_{tot}}{dt} = Mg + 0$$

$$\frac{dM}{dt} \cdot v + M \frac{dv}{dt} = Mg - F_d$$

נקבל לכן:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - F_d - \frac{dM}{dt} v = g - \pi \left(\frac{3M}{4\pi \rho_w}\right)^{2/3} v^2 \left(nm + \alpha\right) \\ \frac{dM}{dt} = \pi \left(\frac{3M}{4\pi \rho_w}\right)^{2/3} v\, n\, m \end{cases}$$

פתרון:

המסה m_2 תתחיל להתרומם כשהמתיחות בחוט תהיה שווה למשקלה: $T=m_2g$.

מצד שני, כאשר מרימים את m_1 ומשחררים אותה, המתיחות בחוט מגיעה לערכה המקסימלי בזווית $\theta=0$. בשלב זה, המתיחות שווה ל-

מעלה.

$$T_{max} = m_1 g + \underbrace{\frac{m_1 v^2}{l}}_{} \overset{\downarrow}{=} m_2 g$$

הרי הדינמיקה שמפעילה המסה על החוט היא, והמסה חייבת להאיץ כדי לנוע בתנועה מעגלית.

אך ממשימור אנרגיה:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = m_1 g l (1-\cos\theta)$$

לכן:

$$m_1 g \left(1+2(1-\cos\theta)\right) = m_2 g$$

$$3 m_1 g - 2 m_1 g \cos\theta = m_2 g$$

$$\cos\theta = \frac{3m_1 - m_2}{2m_1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1}$$

בדיקה: כאשר $m_1=m_2$ מתקבל: $\cos\theta=1$ כלומר $\theta=0$ מספיק כדי להתרומם.

עבור m_1 יותר קטן הפתרון הוא θ סופי.

10 נקודות

מולקולה דו אטומית המורכבת מאטומים במסה m_1, m_2 מוצגת ע"י אוסצילטור הרמוני בעל תדירות זוויתית ω. מחליפים את האטום בעל המסה m_1 באטום זהה מכל הבחינות רק שהמסה הוא $m_1+\Delta m_1$, כאשר $\Delta m_1 << m_1$. קבלו ביטוי לשינוי היחסי ב-ω_0.

פתרון

אם קבוע הכח הוא k אזי $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{\mu}}$ או $\omega_0^2=\frac{k}{\mu}$

כאשר $\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

כאשר משנים את m_1 משתנה μ, ואז $2\omega_0\Delta\omega_0=-\frac{k}{\mu^2}\Delta\mu=-\frac{k}{\mu}\frac{\Delta\mu}{\mu}$

ואם נחלק את המשוואה ב-ω_0^2 ונתייחס לערך מוחלט, $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}=\frac{1}{2}\frac{\Delta\mu}{\mu}$

ועכשיו ל-$\Delta\mu$ כאשר משנים את m_1.

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$$

$$-\frac{\Delta\mu}{\mu^2}=-\frac{\Delta m_1}{m_1^2}$$

ולכן $\frac{\Delta\mu}{\mu}=\frac{\mu}{m_1}\frac{\Delta m_1}{m_1}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\Delta m_1}{m_1}$

והתוצאה הסופית $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}=\frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\Delta m_1}{m_1}$