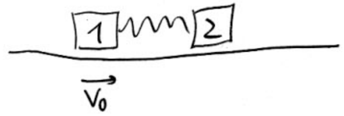
פיתרון תרגיל 9 מכניקה ויחסות פרטית (1)

1) א) מאחר והקפיץ הוא כוח מרכזי בין שתי המסות הבעיה היא חד מימדית שכן אין מהירות אנכיות הניצבות ל V_0 ההתחלתי.
כלומר משוואות התנועה של שתי המסות

$$m\ddot{x}_1 = k[(x_2-x_1)-d_0]$$
$$m\ddot{x}_2 = -k[(x_2-x_1)-d_0]$$



נגדיר
$$R_{cm} = \frac{mx_1+mx_2}{2m} = \frac{x_1+x_2}{2}; \quad d = x_2 - x_1$$

נקבל כי
$$2m\ddot{R}_{cm} = 0 \left(\Rightarrow R_{cm}(t) = V_{cm}t + R_0\right)$$

וגם
$$m\ddot{d} = -2kd + 2kd_0$$

כלומר
$$\ddot{d} + \underbrace{\frac{k}{\mu}}_{\omega_0}d = \frac{k}{\mu}d_0 \quad \left(\mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}\right)$$

מכאן ש
$$d(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + d_0$$

כעת מתנאי ההתחלה נתון
$$d(t=0) = d_0$$
$$\dot{d}(t=0) = -\dot{x}_1 = -V_0$$

(2)

לכן
$$A\cos\varphi + d_0 = d_0$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d(t) = A\sin(\omega_0 t) + d_0$$
$$\omega_0 A\cancel{\cos(0)}^{1} = -V_0$$
$$A = -\frac{V_0}{\omega_0}$$
$$d(t) = -\frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + d_0$$

ב)

$$x_1(t) = R_{cm}(t) - \frac{d(t)}{2}$$
$$x_2(t) = R_{cm}(t) + \frac{d(t)}{2}$$

נשים לב ש
$$\text{const} = \dot{R}_{cm} = V_{cm} = \frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2} = \frac{V_0}{2}$$
בזמן $t=0$

ולכן
$$x_1(t) = R_0 + \frac{V_0 t}{2} - \frac{d_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$
$$x_2(t) = R_0 + \frac{V_0 t}{2} + \frac{d_0}{2} - \frac{1}{2}\frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

3

ב) משוואות תנועה נותנות:

$$m\ddot{x}_1 = k[(x_2-x_1)-d_0] - \gamma\dot{x}_1$$
$$m\ddot{x}_2 = -k[(x_2-x_1)-d_0] - \gamma\dot{x}_2$$

על כן מחיבור המשוואות

$$2m\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{2} = -2\gamma\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}$$

כלומר

$$2m\ddot{R}_{cm} = -2\gamma\dot{R}_{cm}$$

$$\text{I}\quad \ddot{R}_{cm} + \underbrace{\frac{\gamma}{m}}_{\frac{1}{\tau}}\dot{R}_{cm} = 0 \quad\leftarrow$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר I עבור $\dot{R}_{cm}$

מחיסור שתי המשוואות:

$$m\ddot{d} = -2k(d-d_0) - \gamma\dot{d}$$

$$\text{II}\quad \ddot{d} + \underbrace{\frac{\gamma}{m}}_{\frac{1}{\tau}}\dot{d} + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{w_0}d = \underbrace{\frac{2k}{m}}_{w_0}d_0 \quad\leftarrow$$

כלומר אוסילטור הרמוני מרוסן

הפתרון ל-I הוא ע"י הניחוש $\dot{R}_{cm} = Ae^{-\lambda t}$

כלומר אחרי הצבה:

$$-\lambda + \frac{1}{\tau} = 0$$

לכן

$$\dot{R}_{cm} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow R_{cm} = R_0 - \tau Ae^{-t/\tau}$$

מהדרישה כי

$$\dot{R}_{cm}(0) = \frac{V_0}{2}$$

נקבל

$$A = \frac{V_0}{2}$$

4

הפתרון ל-II הוא ע"י פתרון של אוסילטור הרמוני מרוסן

כלומר יש לנו את משוואת העזר למקרה ההומוגני

$$\lambda^2 + \frac{1}{\tau}\lambda + w_0^2\lambda = 0 \quad (\text{עבור הניחוש } Ae^{\lambda t})$$

נניח אם כן ריסון חלש כלומר $w_0^2 > \frac{1}{4\tau^2}$

$$w_f = \sqrt{w_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

אז

$$\lambda_\pm = -\frac{1}{2\tau} \pm iw_f$$

ואז

$$d_h(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(Ae^{iw_ft} + Be^{-iw_ft}\right)$$

נדרוש $d(t)$ ממשי ולכן

$$A = \bar{B} = |A|e^{i\phi}$$

ולכן

$$d_h(t) = |A|e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(w_ft+\phi)$$

ולמקרה הלא הומוגני פשוט מנחשים

$$d_p(t) = d_0 \Rightarrow \dot{d}_p(t) = \ddot{d}_p(t) = 0$$

ואכן מקבלים פתרון למקרה הלא הומוגני.

לכן

$$d(t) = d_h(t) + d_p(t) = |A|e^{-t/2\tau}\cos(w_ft+\phi) + d_0$$

(5)

נשווה מתנאי ההתחלה:

$$d(0)=d_0 \implies \phi=\frac{\pi}{2} \implies d(t)=|A|e^{-t/2\tau}\sin(\omega_f t)+d_0$$

$$\dot{d}(t)=-V_0 \implies$$

$$|A|e^{-t/2\tau}\left(-\frac{1}{2\tau}\sin(\omega_f t)+\omega_f\cos(\omega_f t)\right)\Big|_{t=0}=|A|\omega_f=-V_0$$

$$|A|=-\frac{V_0}{\omega_f}$$

לכן

ונקבל

$$d(t)=-\frac{V_0}{\omega_0}e^{-t/2\tau}\sin(\omega_f t)+d_0$$

לגבי ריסון חזק הפתרון ההומוגני $\left[\text{כאשר } \frac{1}{4\tau^2}>\omega_0^2\right]$

$$d_h(t)=Ae^{\lambda_+ t}+Be^{\lambda_- t} \implies d(t)=d_h(t)+d_0$$

$$d(0)=d_0 \implies A+B+d_0=d_0$$

$$\implies A=-B \implies d(t)=A\left(e^{\lambda_+ t}-e^{\lambda_- t}\right)+d_0$$

$$\dot{d}(0)=-V_0 \implies$$

$$A\left(\lambda_+e^{\lambda_+ t}-\lambda_-e^{\lambda_- t}\right)\Big|_{t=0}=A(\lambda_+-\lambda_-)=-V_0$$

$$A=\frac{-V_0}{\lambda_+-\lambda_-}=\frac{-V_0}{\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_0^2}}$$

(6)

ריסון קריטי: $\omega_0^2=\frac{1}{4\tau^2}$

הפתרון ההומוגני:

$$d_h(t)=e^{-\frac{t}{2\tau}}(A+Bt)$$

הפתרון הכולל:

$$d(t)=d_h(t)+d_0$$

$$d(0)=d_0 \implies A+d_0=d_0 \implies A=0$$

$$\dot{d}(0)=-V_0 \implies e^{-t/2\tau}\left(\frac{-Bt}{2\tau}+B\right)\Big|_{t=0}=B=-V_0$$

$$d(t)=-V_0te^{-\frac{t}{2\tau}}+d_0$$

(7)

ב) א) הכרון מבצעת תנודה $y(t)=x_0\cos\omega t$

משוואת התנועה תהיה:

$$m\ddot{y} = f_{\text{חיכוך}} + f_{\text{קפיץ}} + f_{\text{גרביטציה}} = -\gamma\dot{y} - k(y - x_0\cos\omega t) - mg$$

כאשר y זו הסטיה של אורך הקפיץ מאורכו הטבעי.

$$m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky = kx_0\cos\omega t - mg$$

ג) מכאן נראה כי הפתרון למתנד הרמוני מאולץ הוא מהצורה

$$y(t) = Const + y_0\cos(\omega t + \phi) \quad \left[\text{עבור } \omega_0^2 > \frac{1}{4\tau^2}\right]$$

כאשר

$$y_0 = \frac{f_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} = \frac{kx_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

מקסימום יתקבל כאשר

$$\frac{d}{d\omega}\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right) = 0$$

כלומר

$$2\omega\left[-2(\omega_0^2-\omega^2) + \frac{1}{\tau^2}\right] = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}$$

$$\omega_{max}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} = 100 - \frac{1}{2} = 99\tfrac{1}{2}$$

(8)

$$y_0(\omega_{max}) = \frac{kx_0/m}{\sqrt{\left(\cancel{\omega_0^2} - \cancel{\omega_0^2} + \frac{1}{2\tau^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}}{\tau^2}}} = \frac{kx_0/m}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\tau^2} - \frac{1}{4\tau^4}}} =$$

$$= \frac{\tau kx_0/m}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}} = \frac{\tau kx_0}{m\omega_f} = \frac{1\cdot 10^4\cdot 1}{100\cdot\sqrt{100-0.25}} = 10.01\ cm$$

ב)

$$y_0(2\omega_{max}) = \frac{kx_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega_{max}^2)^2 + \frac{4\omega_{max}^2}{\tau^2}}} = \frac{100}{\sqrt{(100-4\cdot 99\frac{1}{2})^2 + \frac{4\cdot 99\frac{1}{2}}{1}}} =$$

$$= 0.33\,cm$$

ה) מניתה כיוון ש

$$P(t) = F\dot{y} = -kx_0y_0\omega\left[\cos\phi\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \sin\phi\cos^2(\omega t)\right]$$

ו) נאמרי מיצוע:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{k^2x_0^2\tau}{2m}\,\frac{1/\tau^2}{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega^2} + \frac{1}{\tau^2}}$$

ועבור $\omega_{max}^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}$:

$$\langle P\rangle = \frac{k^2x_0^2\tau}{2m}\,\frac{1/\tau^2}{\frac{1/4\tau^4}{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}} + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{10^6}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1/4}{100-\frac{1}{2}} + 1} = 4.99\cdot 10^5\ \frac{erg}{sec.}$$

10 פיתוח הפוטנציאל סביב נקודת המינימום:

$$\left.\frac{dU_{eff}}{dr}\right|_{r_0}=0$$

$$\omega_0^2=\frac{ke^2}{\mu r_0^3}$$

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r_0} = -\frac{2ke^2}{r_0^3}+\frac{3\ell^2}{\mu r_0^4} = -\frac{2ke^2}{r_0^3}+3\mu\omega_0^2 = \mu\omega_0^2$$

בפיתוח של U_{eff} עד סדר שני מקבלים תדירות עצמית

$$\mu\omega_0^2 = \left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r_0}$$

(כלומר יש גוף מתנהג כמו של באוסילטור)

אז קיבלנו אוסילטור הרמוני מאולץ בכיוון הרדיאלי

$$\ddot r + \omega_0^2 r = \frac{F_0}{\mu}\cos(\omega t)$$

(כאשר הקורדינטה r שלנו היא סביב נקודת ש"מ מוזזת כזה $r\longrightarrow r-r_0$)

הפיתרון שלנו יהיה אז כ $r(t)=R\cos(\omega t+\phi)$ |

נציב במשוואה:

ונקבל

$$-\omega^2R\cos(\omega t+\phi)+\omega_0^2R\cos(\omega t+\phi)=\frac{F_0}{\mu}\cos(\omega t)$$

9

עבור $\omega^2 = 4\omega_{max}^2$

$$\langle P\rangle = \frac{k^2x_0^2\tau}{2m}\,\frac{1/\tau^2}{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega^2}+\frac{1}{\tau^2}} = \frac{10^6}{2}\cdot\frac{1}{\frac{(100-4\cdot 99.5)^2}{4\cdot 99.5}+1} = 2{,}230\,\frac{erg}{sec}$$

ח) גורם הטיב:

$$Q=\omega_0\tau=10$$

3) א) בתנועה מעגלית מקבלים

$$-\frac{ke^2}{r_0^2}=-\mu\omega_0^2 r_0$$

כלומר

$$r_0^3=\frac{ke^2}{\mu\omega_0^2}$$

ב) נזכור כי התנ"ז קיים בתנועה מעגלית

$$\ell=\mu\omega_0 r_0^2=Const$$

הכוח בכיוון מרכזי ולכן אינו משנה את התנ"ז.
הפוטנציאל האפקטיבי בקורדינטות רדיאליות

$$U_{eff}=-\frac{ke^2}{r}+\frac{\ell^2}{2\mu r^2}$$

$$U_{min}=-\frac{ke^2}{r_0}+\frac{\ell^2}{2\mu r_0^2}=-\frac{ke^2}{r_0}+\frac{\mu\omega_0^2 r_0^2}{2}$$

11

זה נכון לכל זמן ולכן $\varphi=0$

ומקבלים
$$R=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}$$

כלומר
$$r(t)=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$$

ג) מהקירוב שלנו מתקבל כי כאשר $\omega\to\omega_0$
$R\to\infty$ כלומר האוסצילטור מתנתק מהאמצע
אבל במציאות זה לא קורה כי:
ד) הקירוב ההרמוני כבר לא תקף לכל ω-R גדול
ואז יש להתחשב בביטויים מסדרים גבוהים יותר
ה) קיים ריסון שפה לא המקום לדון בו.

12

4)

א) בריסון קריטי
$$\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{4\tau^2}}=0$$
$$\frac{\gamma}{m+M}=\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_0^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M+m}{K}}$$
$$\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(M+m)^3}{K}}$$

ב) תנועת האוסילטור בריסון קריטי
$$y(t)=e^{-t/2\tau}[A+Bt]$$

תנאי ההתחלה הם $y(0)=0$ $\quad \dot{y}(0)=-V_0$

(V_0 נמשך אחר-כך)

לכן עבור $t=0$ $\Leftarrow$ $0=e^{-0}[A+B\cdot 0]$

$\Leftarrow$ $A=0$

וכן
$$-V_0=e^{-0/2\tau}B\left[1-\frac{0}{2\tau}\right]$$

$\Leftarrow$ $B=-V_0$

וקיבלנו
$$\boxed{y(t)=-V_0\,t\,e^{-t/2\tau}}$$

נמצא את V_0

מיד לפני ההתנגשות מהירות המסה:

$$V=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{\frac{2mgh}{m}}=\sqrt{2gh}$$

אנרגיה פוטנציאלית = אנרגיה קינטית

שימור תנע בהתנגשות פלסטית נותן

$$m\sqrt{2gh}=(m+M)V_0$$

ולכן

$$\boxed{V_0=\frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}}$$

ג) הכוח המקסימלי שיופעל על המסה הוא הכוח שמפעיל תאוצה מקסימלית:

$$y(t)=-V_0te^{-t/2\tau}$$

$$\dot{y}(t)=-V_0e^{-t/2\tau}\left(1-\frac{t}{2\tau}\right)$$

$$\ddot{y}(t)=-V_0e^{-t/2\tau}\left(-\frac{1}{2\tau}-\frac{1}{2\tau}\left(1-\frac{t}{2\tau}\right)\right)=V_0e^{-t/2\tau}\left(\frac{4\tau-t}{4\tau^2}\right)$$

$$\dddot{y}(t)=V_0e^{-t/2\tau}\left(\frac{-1}{4\tau^2}-\frac{1}{2\tau}\left(\frac{4\tau-t}{4\tau^2}\right)\right)=0$$ נחפש נקודת קיצון

$$-\frac{1}{2\tau}\left(\frac{4\tau-t}{4\tau^2}\right)=\frac{1}{4\tau^2}\Rightarrow t=6\tau$$

בזמן $t=6\tau$

$$\ddot{y}(6\tau)=-V_0e^{-3}\frac{1}{2\tau}$$

אבל בזמן $t=0$

$$\ddot{y}(0)=V_0\frac{1}{\tau}$$

כלומר הכוח המקסימלי הפועל על המסה m הוא

$$F_{max}=\frac{mV_0}{\tau}=\frac{m^2}{m+M}\sqrt{2gh}\cdot2\sqrt{\frac{k}{m+M}}=$$

$$=2\frac{m^2}{(m+M)^{3/2}}\sqrt{2ghk}$$

(15)

5)

משוואות התנועה:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2-x_1) - \gamma\dot{x}_1$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2-x_1) - \gamma\dot{x}_2$$

כאשר x_1 ו x_2 הן הסטיות משיווי משקל

ומגדירים

$$h_+ = x_1+x_2$$
$$h_- = x_1-x_2$$

ואז מחיבור המשוואות נקבל

$$m\ddot{h}_+ = -kh_+ - \gamma\dot{h}_+$$

או

$$m\ddot{h}_+ + \gamma\dot{h}_+ + kh_+ = 0$$

או

$$\mathrm{I} \quad \ddot{h}_+ + \frac{1}{\tau}\dot{h}_+ + \omega_0^2 h_+ = 0$$

מחיסור המשוואות נקבל

$$m\ddot{h}_- = -3kh_- - \gamma\dot{h}_-$$

או

$$m\ddot{h}_- + \gamma\dot{h}_- + 3kh_- = 0$$

או

$$\mathrm{II} \quad \ddot{h}_- + \frac{1}{\tau}\dot{h}_- + 3\omega_0^2 h_- = 0$$

(16)

משוואות I ו II הן כבר של מתנדים

ואת פתרונותיהן כבר ראיתם פעמים מספר...
החשוב הוא שלכל אחד מהם ישנם שני קבועים שיש
שניתן לקבוע מתנאי ההתחלה:

א)

$$h_+(0) = 2\delta \qquad \dot{h}_+(0) = 0$$
$$h_-(0) = 0 \qquad \dot{h}_-(0) = 0$$

כלומר נקבל ש $h_-(t)=0$ לכל t

$$x_1 = \frac{h_+ + h_-}{2} = \frac{1}{2}h_+(t)$$
$$x_2 = \frac{h_+ - h_-}{2} = \frac{1}{2}h_+(t)$$

ב)

$$h_+(0) = 0 \qquad \dot{h}_+(0) = 0$$
$$h_-(0) = 2\delta \qquad \dot{h}_-(0) = 0$$

כאן $h_+(t)=0$ לכל t ונקבל

$$x_1(t) = \frac{1}{2}h_-(t) \qquad x_2(t) = -\frac{1}{2}h_-(t)$$

17

ג)

$h_+(0) = 0 \qquad \dot{h}_+(0) = 2V_0$

$h_-(0) = 0 \qquad \dot{h}_-(0) = 0$

ומזה נקבל $h_-(t) = 0$

$x_1 = \frac{1}{2} h_+(t) = x_2$

ד)

$h_+(0) = 0 \qquad \dot{h}_+(0) = 0$

$h_-(0) = 0 \qquad \dot{h}_-(0) = 2V_0$

ומזה נקבל

$x_1 = \frac{1}{2} h_-(t) = -x_2$

התנצלות:

ידוע לי כי שאלה זו ברמה גבוהה
אלגברית מתישה זמנם הסליחה....