-0-
17.10.2004

מכניקה ותורת היחסות הפרטית 77100

אדמיניסטרציה:

- תרגילים: חובת הגשה של 8 גליונות תרגיל בית.
- כדאי לעבוד בזוגות. כדאי מאד לא לעבוד בשלישיות או יותר.
- שעות קבלה: א': 14:15 - 15:00 קפלן 102
  ג': 11:00 - 12:00 x 85807
- דוא"ל: shaviv@phys.huji.ac.il
- אתר הקורס http://www.phys.huji.ac.il/~shaviv/students/77100
- חומר די חופף את הקודם השנה אולם לא מן הנמנע שיהיו מספר הבדלים והמבחן יהיה מעט שונה.

ספרים:

ספרי הקורס

- Berkeley course in Physics, vol. 1
- תרגום הספר הנ"ל לעברית: "מכניקה" (ספר ירוק בינ) בהוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

- Feynman lectures in physics, vol. 1
  (ספר העשרה. גישה שונה לחומר הלימוד. מומלץ לקרוא בנוסף, לא במקום).

- ספרי תרגילים, לדוגמא:
  * "מכניקה 120 תרגילים ופתרונות" יצחק שניבר (און' הפתוחה).
  * "מכניקה ותורת היחסות" - בנ"צ אגמון
  (מומלץ לפתור הרבה תרגילים...)

בהצלחה בקורס!

-1-

17.10.2004

פיסיקה מבוא:

הפיסיקה הינה מדע נסיוני, הדן בחוקים הבסיסיים המתארים את התנהגות הטבע.

מכניקה קלאסית

מתארת את החוקים הבסיסיים להתנהגות חלקיקים "קלאסיים" (לא יחסותיים ולא קוונטים) בהשפעת כוחות נתונים.

לא יחסותי: $v \ll \underbrace{c}_{\text{מהירות האור}}$ } אופיני

לא קוונטי: $\underbrace{\hbar}_{\text{קבוע פלנק}} \ll \Delta x \cdot p$

הכוחות הבסיסיים בטבע:

- כבידה
- אלקטרומגנטי (חשמלי + מגנטי).
- כוח גרעיני חזק
- כוח הגרעיני החלש

לא מובנים במכניקה קלאסית היות והטווח שלהם קצר.

יחסות פרטית

הכללה של המכניקה הקלאסית ל- $v \lesssim c$

תורת הקוונטים

הכללה ל- $\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar$: חומר מתנהג בצורה גלית.

תורה אלקטרומגנטית:

מתארת את התנהגות השדה החשמלי והמגנטי

כבידה

↓

יחסות כללית

הרחבת יחסות פרטית ע"י הכללת הכבידה (כבידה = עקמומיות המרחב)

קוונטיזציה שניה = תורת השדות ("חלקיקים")

קוונטיזציה של השדות (לדוגמא E,B) בנוסף שהשדות "נתונים"

QED

הכללת שדות הכח החזק ⇐ QCD

התנהגות החומר (תחת כוחות נתונים)

הכללות!

מכניקה סטטיסטית ותרמודינמיקה:

טיפול במערכות בעלות מספר רב של חלקיקים

מכניקה סטטיסטית: אספקטים מיקרוסקופיים

תרמודינמיקה: אספקטים מקרוסקופיים.

הידרודינמיקה:

דנה במערכות מרובות חלקיקים (גזים ונוזלים) עם תנועה מקרוסקופית (זרימה).

ישום:

- מדע מדויק
- פיסיקה אטומית
- פיסיקה גרעינית
- אסטרופיסיקה
- ביו פיסיקה
- וכו'...

17.10.2004

מכניקה קלסית

מאה 17: עד ניוטון, מעט מאד נסיונות... הראשון היה למעשה
גלילאו שחקר גופים נופלים, תנועה בליסטית וכו'...
והציע במפורש את רעיון הנסיון לאישור התאוריה

1687 - פרסום ה"פרינקיפיה" Principia
ניסוח ראשון של המכניקה בעזרת כוחות ע"י ניוטון.

Liebnitz - בן דורו של ניוטון. הביא את מושג האנרגיה הקינטית.

מאה 18: Bernoulli - עקרון שימור האנרגיה

Euler - ניסוח בעזרת משוואות דיפרנציאליות.

Lagrange - ניסוח המכניקה בעזרת אנרגיות וללא כוחות

מאה 19: Hamilton - ניסוח נוסף ללא כוחות. שימוש לתורת הקוונטים.

"מכניקה אנליטית"
נושא הקורס...

יחידות:

גדלים פיסיקליים מכילים יחידות. למשל, מרחק אינו יכול להיות מבוטא בעזרת מספר בלבד 17 ק"מ או $1.7\times10^5 cm$. לכן חשוב מאד להקפיד שהיחידות תהיינה רשומות כשיש צורך. (לא לכתוב 17 או $m \times 17$ אלא רק $17m$).

* עצה שימושית: אם בבעיה ישנם מספרים עם יחידות, כדאי להציבם בשלב האחרון ולא הראשון. זאת מפני שקל הרבה יותר לבדוק את הגיון התשובה הסופית.

* בעזרת יחידות ניתן לבדוק נכונות התשובה (או לפחות למצוא הרבה טעויות).

דוגמא:

מחשבים את זמן המחזור של כוכב לכת מסביב לשמש ומתקבלת התשובה:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_\odot}}$$

* האם התשובה הגיונית? אם היינו מציבים את ערכי r, G ו-$M_\odot$ בתחילת הפתרון (בהנחה שאלו נתונים) כי אז לא היינו יכולים לבדוק ש-r גדול יותר מגדיל את P (הגיוני). ו-G או $M_\odot$ המגדילים את כח המשיכה, מקטינים את P (הגיוני - הגוף צריך להסתובב מהר יותר כדי שהכח הצנטריפוגלי יאזן).

* מה היחידות?

$$G = 6.67\times10^{-8}\frac{cm^3}{g s^2} \Rightarrow [P] = \underbrace{[2\pi]}_{\text{חסר יחידות}}\frac{cm^{3/2}}{cm^{3/2}}$$

17.10.2004

יחידות נפוצות:

Système International : SI (= MKSA)
meter, kg, second, ampere

cm, gr, second : cgs

במכניקה - שימושי. בחשמל יותר נוח.
מידה . הרבה
גאוס cgs
ומגנטיות :

ישנן שיטות נוחות פחות:

השיטה האנגלית: שיטה של מהנדסים ואמריקאים.

אך נוחות יותר:

לפעמים נוחות יחי' טבעיות בהן $c=1$, $\hbar=1$ ו- $G=1$.

19.10.2004

הקדמה מתמטית

סקלרים וקטורים:
* הגדרה, סימון
* פעולות בוקטורים – חיבור, מכפלה, תכונות.
* גזירה ואינטגרציה של וקטורים.
* מערכות צירים – קרטזית, פולרית, צילינדרית.

סקלר: גודל פיסיקלי המוגדר בעזרת "גודל" בלבד, ללא כיוון (מסה, אנרגיה)

וקטור: גודל פיסיקלי המוגדר בעזרת "גודל" וכיוון. שימו לב כי המיקום של הוקטור (למשל היכן כח פועל או היכן המכונית בעלת המהירות הנתונה איננו חלק מוקטור הכח או וקטור המהירות).
(דוגמאות: כח, מהירות, תנע ומיקום – כחלק מוקטור מיקום).

ניתן להגדיר בנוסף:

פונקציה וקטורית (שדה וקטורי): פונקציה המחזירה גודל וקטורי בכל נקודה במרחב
(לדוגמא: שדה כבידה, שדה חשמלי, מהירות הזרימה בנוזל וכו'...).

פונקציה סקלרית: פונקציה המחזירה בכל נקודה במרחב גודל בלבד
(לדוגמא, לחץ בשדה זרימה, צפיפות אנרגיה בשדה חשמלי).

סימונים:

סקלר: "סתם" אות a, k וכו'.. (בספרים, אות ב- italics).

וקטור: $\vec{A}$, $\underline{A}$ (מספרים אות ב- bold).

הגודל של וקטור: $A \equiv |\vec{A}|$

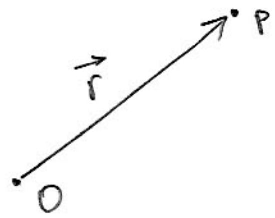
וקטור יחידה בכיוון $\vec{A}$: (וקטור שאורכו 1 וכיוונו $\vec{A}$): $\hat{A}$

מתקיים כמובן:
$$|\hat{A}| = 1$$
$$\vec{A} = \hat{A}|\vec{A}|$$

הערה: סקלרים וקטורים הם סוגים פרטיים של **טנסורים** (סקלר - גודל 0 מימדי" וקטור 1 מימדי, מטריצה - ואתה תראו עד מספר שרוצים, גודל דו-מימדי וכו').

רק לידע כללי!

<u>וקטור המקום:</u> $\vec{r}$ הוא וקטור המחבר בין ראשית הצירים (מסומנת בד"כ ב- O) לבין מקום נקודה נתונה P.

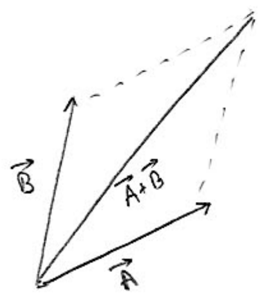


<u>חיבור וקטורים:</u>

חיבור מוגדר ע"י האלכסון של המקבילית המתקבלת כששני הוקטורים יוצאים מאותה הנקודה, כמתואר בציור.

ניתן לראות מהציור כי $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$, דהיינו,

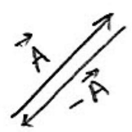
<u>חיבור וקטורי הוא קומוטטיבי = חילופי</u>



<u>חיסור וקטורי:</u>

$-\vec{A}$ מוגדר כוקטור $\vec{A}$ עם אותו הגודל אך כיוון הפוך.

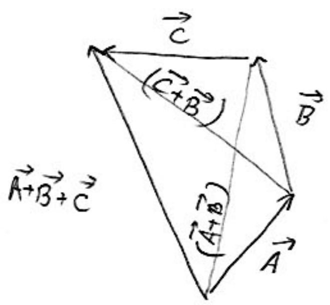
ברור מהציור כי: $\vec{A}+(-\vec{A})=0$



<u>אסוציאטיביות:</u> חיבור וקטורי מקיים:

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

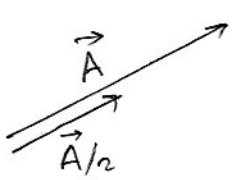
זאת ניתן לראות מהציור.



<u>הכפלה בסקלר:</u>

הכפלת וקטור בסקלר נותנת וקטור חדש באותו הכיוון אך הגודל מוכפל בערך הסקלר.
גודל שלילי ← כיוון הפוך.

$$(-1)\vec{A}=-\vec{A}$$



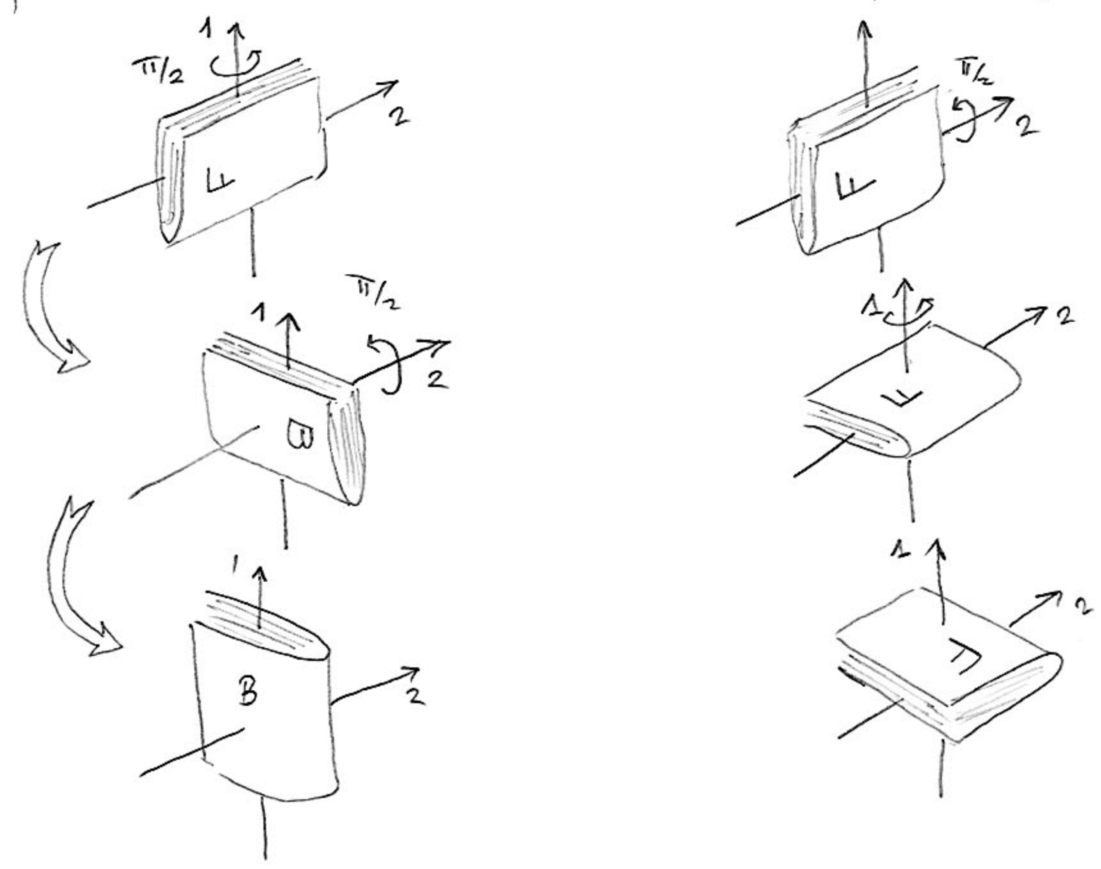
-3-
19.10.04

דוגמאות לוקטורים

* הסחה (displacement) מקיימת את התנאים לוקטורים (סכום הסחות לפי חוק המקבילית וכו').
* כנ"ל גם כוחות (ניראה הדגמה בכיתה).

דוגמאות לגדלים שאינם וקטורים:

* סיבובים סופיים במרחב - ניתן להגדיר סיבוב ע"י כיוון (ציר סיבוב) וגודל (זוית הסיבוב). אולם הסיבובים אינם חילופיים ולכן לא ניתן לתאר ע"י וקטור. נסובב ספר, פעם סביב ציר 1 ואח"כ ציר 2 ופעם בסדר הפוך:



סיבוב סביב ציר 1 ואח"כ סביב 2.

* קיטוב של אור: היות ואור מקוטב בכיוון אחד או בכיוון ההפוך, הוא אותו המצב קיטוב אינו מתנהג כמו וקטור.

↔ ↕

שני המצבים: מצב 1 מצב 2.

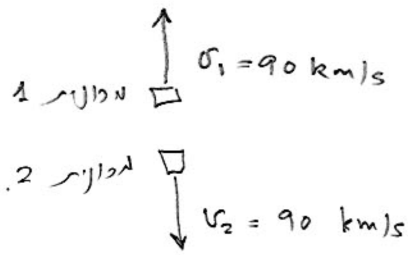
הערה לידע כללי: קיטוב חוזר לאותו המצב לאחר סיבוב ב $180°$. וקטור חוזר לאותו המצב לאחר סיבוב ב $360°$. ספינור חוזר לאחר $720°$...

חיבור וקטורי – דוגמאות

1. נתון גוף הפועל עליו כוח של 5 דין ימינה ו-5 דין שמאלה. מהו הכח הכולל?

<u>תשובה</u>: היות וכוח הוא וקטור, יש לסכום את הכוחות בצורה וקטורית.
הוקטורים $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ שווים בגודלם אך מנוגדים בכיוונם ולכן: $\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$.

2. מכונית נעה צפונה במהירות של 90 קמ"ש ומכונית נוספת נעה דרומה במהירות של 90 קמ"ש. מהי המהירות היחסית של המכונית הראשונה יחסית למכונית השניה?



<u>תשובה</u>: $\vec{v}_{rel}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$

(בדיקה - אם $\vec{v}_2$ היה באותו כיוון של $\vec{v}_1$, לא היתה מהירות יחסית! אם $\vec{v}_2=0$, המהירות היחסית היא מהירות המכונית הראשונה).

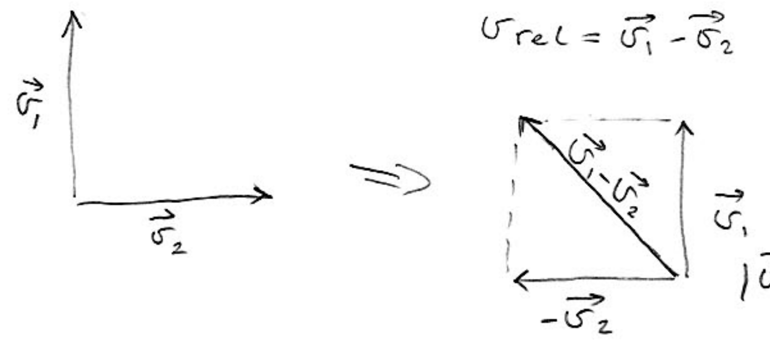
היות ו- $v_2=v_1$ (<u>בגודל</u> זהה) מתקבל:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1-\vec{v}_2 = \vec{v}_1+\vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$$

המהירות היחסית של מכונית 1 יחסית למכונית 2 היא 180 קמ"ש צפונה.

3. כנ"ל, רק שמכונית 2 נעה מזרחה ב- 90 קמ"ש.

<u>תשובה</u>: $v_{rel}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$



נשרטט את $\vec{v}_1-\vec{v}_2$.
אנו רואים כי נוצרת מהירות יחסית של

$$|\vec{v}_{rel}|=\sqrt{2}\cdot 90 \text{ km/s} = 127.3 \text{ km/s}$$

כיוונה הוא צפון-מערב. (מכונית 2 תראה את מכונית 1 נעה בכיוון צפון מערב).

מכפלות בין וקטורים:

ישנן מספר דרכים להגדיר מכפלה בין וקטורים. שתי המכפלות השימושיות ביותר הינן המכפלה הסקלרית (בה מתקבל סקלר המכפלה בין הוקטורים) והמכפלה הוקטורית בה התוצאה היא וקטור.

אנו רוצים להגדיר מכפלה שתקיים מספר חוקים בסיסיים. חשוב, מכפלה שתהיה <u>פילוגית</u>, כלו' ש- $\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C})$ יהיה $\vec{A}*\vec{B}+\vec{A}*\vec{C}$ (כאשר "*" הינה המכפלה שלנו.

דוגמא להגדרה שאינה מקיימת את זה ולכן אינה שימושית היא: $\vec{A}*\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$

כדי לראות ש- $\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C}) \neq \vec{A}*\vec{B}+\vec{A}*\vec{C}$ כל שיש לעשות הוא להסתכל על המקרה בו $\vec{B}=-\vec{C}$ במקרה זה:

$$\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C}) = 0$$
$$\vec{A}*\vec{B} + \vec{A}*\vec{C} = 2|\vec{A}||\vec{B}|$$

<u>המכפלה הסקלרית:</u>

המכפלה הסקלרית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ מוגדרת כגודל $\vec{A}$ כפול גודל $\vec{B}$ כפול קוסינוס הזוית ביניהם:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}|\cos\underbrace{(\vec{A},\vec{B})}_{\text{הזוית בין } \vec{A} \text{ ל- } \vec{B}}$$

* ראשית, אנו רואים שמערכת הצירים אינה מעורבת בהגדרה.
* שנית, היות ו- $\cos(\vec{A},\vec{B})=\cos(\vec{B},\vec{A})$ (קוסינוס זוית זהה לקוסינוס של מינוס הזוית) יתקבל כי:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

נוכיח את הפילוגיות של המכפלה עוד מעט.

לפני כן, נסתכל על עוד מספר תכונות.

<u>מכפלה של וקטור בעצמו:</u>

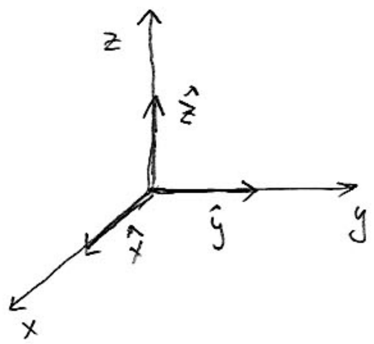
$$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}|\underbrace{\cos(\vec{A},\vec{A})}_{=1} = A^2$$

=1 כי הזוית בין A לעצמו היא 0 ו- cos(0)=1.

כלומר, מכפלת וקטור בעצמו נותנת את גודלו בריבוע.

רכיבי וקטור במערכת קרטזית, וקוסינוסי הכיוון

מערכת הצירים הקרטזית היא המערכת הפשוטה ביותר. היא מוגדרת ע"י שלושה כיוונים קבועים ואורתוגונליים (ניצבים זה לזה):



ניתן להגדיר וקטורי יחידה בכיוון הצירים $\hat{x}$, $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$.

היות ומדובר בוקטורי יחידה, מתקבל:

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$

היות והצירים ניצבים זה לזה, מתקבל:

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$$

ניתן לרשום כל וקטור בצורה:

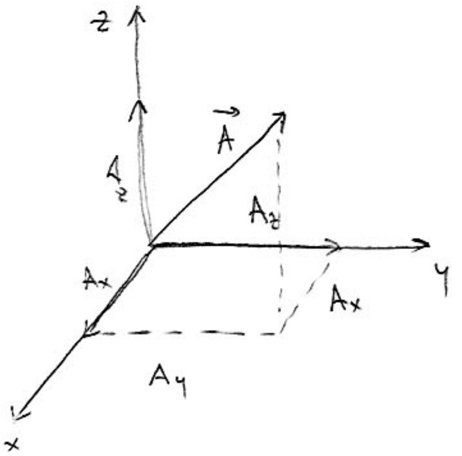
$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

מה המשמעות של כל איבר?

$$(\vec{A}\cdot\hat{x}) = A_x\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{x})}_{1} + A_y\underbrace{(\hat{y}\cdot\hat{x})}_{0} + A_z\underbrace{(\hat{z}\cdot\hat{x})}_{0} = A_x$$

ז.א. A_x הוא ההיטל של $\vec{A}$ בכיוון $\hat{x}$ (כפול הגודל של $\hat{x}$ אך זה שווה ל-1).
A_x נקרא רכיב A בכיוון x, או רכיב x של A.
כיצד קשור גודל A לרכיביו?

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\cdot(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})}$$
$$= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



מכפלה סקלרית בעזרת הרכיבים:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$$
$$= A_xB_x\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{x})}_{1} + A_xB_y\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{y})}_{0} + \dots$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

<u>וקטורים מאונכים:</u> אם $|\bar{A}|\neq 0$ וגם $|\vec{B}|\neq 0$ אז יתכן ש $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ פירוש ש- $\cos(\bar{A},\bar{B})=0$ כלומר הזווית היא $\frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2}$ והוקטורים ניצבים זה לזה.

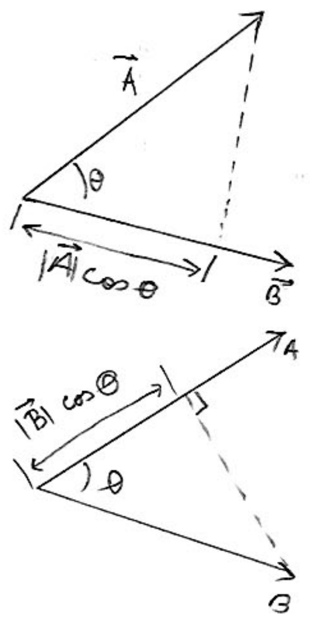
<u>שאלה:</u> נתונים שני וקטורי יחידה $\hat{a}$ ו- $\hat{b}$ כך ש- $\hat{a}\cdot\hat{b}=-1/2$.
מה הזווית ביניהם?

<u>תשובה</u>

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = \underbrace{|\hat{a}||\hat{b}|}_{=1}\cos(\hat{a},\hat{b}) = -1/2$$

$$\cos(\hat{a},\hat{b}) = -1/2 \Rightarrow (\hat{a},\hat{b}) = \cos^{-1}(1/2) = \frac{2\pi}{3} \quad (=120^\circ)$$

<u>משמעות המכפלה הסקלרית.</u>



מהשרטוט בצד שמאל, ניתן לראות שהגודל:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = |\vec{B}|\cdot(|\vec{A}|\cos\theta)$$

הוא למעשה ההיטל של $\vec{A}$ על $\vec{B}$ כפול הגודל של $\vec{B}$. או, ההיטל של $\vec{B}$ על $\vec{A}$ כפול הגודל של $\vec{A}$:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|(|\vec{B}|\cos\theta)$$

<u>פעולה הפוכה למכפלה סקלרית:</u> אין משמעות לחלוקה בוקטור. למשל אם יודעים את $\vec{B}$ ואת $\vec{A}\cdot\vec{B}$ לא ניתן לשחזר את $\vec{A}$ היות וישנם הרבה (אין סוף) אפשרויות ל- $\vec{A}$ לתת את ה- $\vec{A}\cdot\vec{B}$ הנתון.

פילוגיות של מכפלה וקטורית:

נחשב את $\bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{A}\cdot\bar{C}$ וגם את $\bar{A}\cdot(\bar{B}+\bar{C})$ ונראה שהללו זהים.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$

מצד שני:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = A_x(B_x+C_x) + A_y(B_y+C_y) + A_z(B_z+C_z)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

ומשפט הקוסינוסים:

ניקח את הוקטור $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$ ונכפיל בעצמו: $\vec{C}\cdot\vec{C}=(\vec{A}-\vec{B})(\vec{A}-\vec{B})$

בעזרת הפילוגיות $c^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{B} = A^2+B^2-2\vec{A}\cdot\vec{B}$

אולם זה בדיוק משפט הקוסינוס- הידוע מטריגונומטריה:

$$A^2+B^2-2AB\cos\underbrace{\theta}_{\text{הזוית בין A ל-B}} = c^2$$

כמו כן, ניתן לכתוב ביטוי עבור θ:

$$\cos\underbrace{\theta}_{\text{הזוית בין A ל-B}} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

19.10.04

תרגיל:

1. נתון הוקטור $\vec{A} = 3\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z}$.

א. מצא את אורכו של $\vec{A}$.

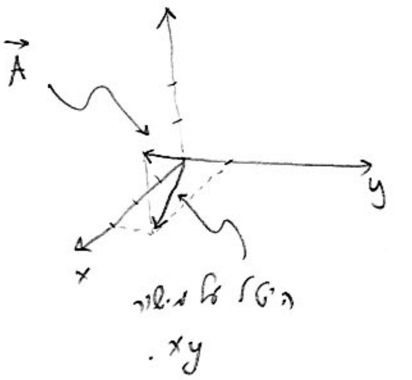
ב. מהו אורך היטלו של $\vec{A}$ על מישור xy?

ג. בנה וקטור במישור xy שיהיה ניצב ל- $\vec{A}$.

ד. מצא וקטור יחידה בכיוון הוקטור מסעיף ג.

פתרון:

א. אורכו של A נתון ע"י: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$



ב. ההיטל על xy (נקרא לו $\vec{B}$) נתון ע"י:

$$\vec{B} = \vec{A} - \underbrace{(\vec{A}\cdot\hat{z})} = 3\hat{x}+\hat{y}$$

פירושו הרכיב בכיוון ציר $\hat{z}$.

אורכו: $|\vec{B}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

ג. אני רוצה למצוא וקטור $\vec{C}$ שיהיה ניצב ל- $\vec{A}$, כלו' $\vec{A}\cdot\vec{C}=0$.

כמו כן, $\vec{C}$ נמצא במישור xy, ולכן יש לו את הצורה:

$$\vec{C} = C_x\hat{x}+C_y\hat{y}$$

מתקבל: $\vec{A}\cdot\vec{C} = 3\cdot C_x + 1C_y = 0 \Rightarrow C_y = -1/3\, C_x$

אורכו של $\vec{C}$ נשאר חופשי. וקטור אחד, למשל, שמקיים את תנאי זה הוא:

$$\vec{C} = \hat{x} - 1/3\,\hat{y}$$

ד. כדי למצוא וקטור יחידה, יש למצוא את אורכו של C:

$$C = \sqrt{1^2+1/3^2} = \sqrt{10}/3$$

וקטור היחידה יהיה:

$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\hat{x}-1/3\,\hat{y}}{\sqrt{10}/3} = \frac{3\hat{x}}{\sqrt{10}} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{10}}$$

20.10.04

מכפלה וקטורית:

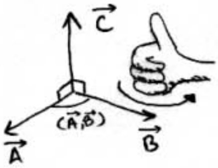
מכפלה שימושית נוספת היא המכפלה הוקטורית, המחזירה וקטור כפי שהשם מרמז.

← אם נתונים שני וקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, אני הכיוון היחיד שהם מגדירים הוא הניצב למישור שמכיל את שני הוקטורים (או הכיוון ההפוך) לכן, המכפלה הוקטורית מוגדרת בעזרת כיוון זה:

הגדרה: המכפלה הוקטורית בין וקטור $\vec{A}$ לוקטור $\vec{B}$ נותנת וקטור הניצב למישור המכיל את $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ לפי חוק היד הימנית וגודלו נתון ע"י

$$|A\times B| = |A||B|\sin(\vec{A},\vec{B})$$

חוק יד ימין: מסובבים מ- A ל- B בעזרת יד ימין. כיוון האגודל הוא כיוון $(\vec{A}\times\vec{B})$.



אם הינו "מסובבים" מ- $\vec{B}$ ל- $\vec{A}$ הינו מקבלים כיוון הפוך. ז"א. מכפלה וקטורית היא אנטי-קומוטטיבית (אנטי חילופית)

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

מכפלה של וקטור בעצמו תתן 0 $(\sin 0=0)$ $\qquad \vec{A}\times\vec{A}=0$

במערכת צירים ימנית:

$$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$$
$$\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$$
$$\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$$

מכפלה וקטורית היא פילוגית (הוכחה בספר או בבית...):

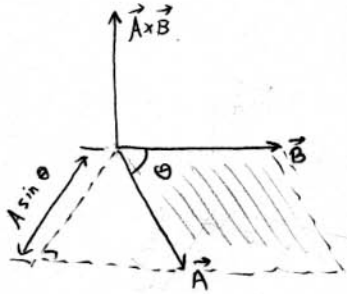
$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

מכפלה וקטורית בעזרת רכיבים:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}) =$$
$$= A_xB_x\underbrace{(\hat{x}\times\hat{x})}_{=0}+A_xB_y\underbrace{(\hat{x}\times\hat{y})}_{\hat{z}}+A_yB_z\underbrace{(\hat{x}\times\hat{z})}_{-\hat{y}}+\dots$$
$$= \hat{x}(A_yB_z-A_zB_y)+\hat{y}(A_zB_x-A_xB_z)+\hat{z}(A_xB_y-B_yA_x)$$

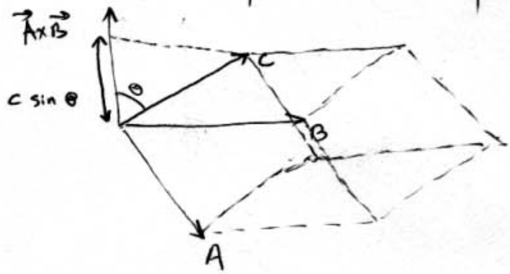
20.10.04

<u>משמעות גיאומטרית:</u>



$\vec A\times\vec B$ נותן וקטור שגודלו שטח המקבילית שבצלעותיו $\vec A$ ו- $\vec B$, וכיוונו ניצב למישור המקבילית.

כמו כן, ניתן לחשב את נפחו של מקבילון שבצלעותיו A, B ו- $\vec C$:



<u>נפח המקבילון:</u> $V=(\vec A\times\vec B)\cdot\vec C$

$$\left(=\vec A\cdot(\vec B\times\vec C)=-\vec B\cdot(\vec A\times\vec C)\right)$$

שלושה וקטורים נמצאים במישור אם ורק אם: $(\vec A\times\vec B)\cdot\vec C=0$ כי אז המקבילון שנוצר מצלעותיהם יהיה בעל נפח אפס.

<u>משפט הסינוסים:</u>

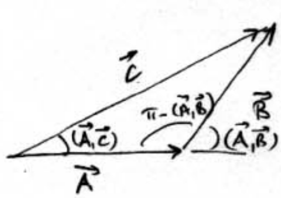
נגדיר $\vec C=\vec A+\vec B$, נכפיל ב- $\vec A$ בשני האגפים ונקבל:

$$\vec A\times\vec C=\underbrace{\vec A\times\vec A}_{=0}+\vec A\times\vec B$$

ולפי ההגדרה של מכפלה וקטורית:

$$\cancel{A}C\sin(\bar A,\bar C)=\cancel{A}B\sin(\bar A,\bar B)$$

גרפית:



כלומר:

$$C\sin(\vec A,\vec C)=B\sin(\pi-(\vec A,\vec B))=B\sin(\vec A,\vec B)$$

ולכן:

$$\frac{C}{\sin(\vec A,\vec B)}=\frac{B}{\sin(\vec A,\vec C)}$$

וזהו משפט הסינוסים.

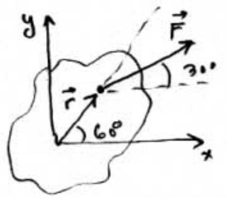
20.10.04

שימושים נפוצים למכפלה וקטורית

* מומנט סיבוב מוגדר ע"י :

$$\vec{N} = \underbrace{\vec{r}}_{\text{הסחה מהציר סביבו מחושב המומנט.}} \times \underbrace{\vec{F}}_{\text{הכח שמופעל}}$$

דוגמא: נתון: $r = 50\,cm$
$F = 6\times10^5\,dyne$



מהו מומנט הסיבוב?

ראשית, $\vec{F}$ וגם $\vec{r}$ נמצאים במישור הדף, לכן $\vec{N}$ יהיה בכיוון ניצב לדף. מכלל היד הימנית, כיוון $\vec{N}$ לתוך הדף.
גודלו של $\vec{N}$:

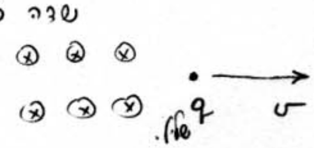
$$|N| = |r||F| \sin \underbrace{(\vec{r},\vec{F})}_{60^\circ-30^\circ=30^\circ} = 50\,cm \cdot 6\times10^5\,dyne \cdot 1/2$$
$$= 1.5\times10^7\,dyne\cdot cm$$

* כח לורנץ : הכח שמפעיל שדה מגנטי על חלקיק הוא דוגמא נוספת לשימוש במכפלה וקטורית :

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad (c.g.s)$$

$$\left(\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad (m.k.s)\right)$$

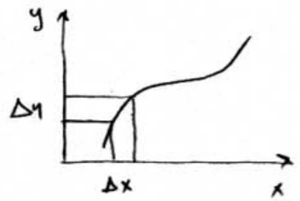
דוגמא. במערכת בציור, לאיזה כיוון יהיה הכח אם החלקיק בעל מטען שלילי?
שדה $\vec{B}$ לתוך הדף.



$v\times B$ יהיה בכיוון ↑ אולם המטען הוא שלילי ולכן $\vec{F}$ יהיה כלפי ↓

נגזרות

*** נגזרת של פונקציה סקלרית:**



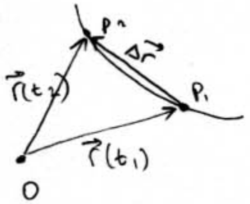
$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

*** נגזרת של פונקציה וקטורית:**

נסתכל על המסלול שיוצר וקטור המקום $\vec{r}$ כתלות בפרמטר t (למשל זמן!). ז.א.

בזמן t נתון ערך: $\vec{r}(t)$, אולם ערך זה משתנה עם t.

נסתכל על שני זמנים: t_1 ו- t_2. $\vec{\Delta r}$ יהיה המיתר המחבר בין שתי הנקודות P_1 ו- P_2 (כמתואר בציור)



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

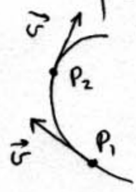
בדומה למקרה החד מימדי של נגזרת של סקלר ; מגדירים:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad ; \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

זוהי הנגזרת של וקטור. במידה ומדובר בוקטור ההסחה (displacement) והפרמטר הוא אכן הזמן t, הוקטור המתקבל נקרא מהירות וקטורית (להבדיל מ"גודל המהירות" שהוא הגודל של אותו הוקטור). כיוון הוקטור הזה הוא המשיק למסלול בכל נקודה, וגודלו הוא גודל המהירות בה נע "החלקיק" דהיינו, המרחק אותו היה עובר החלקיק ביחידת זמן.

סימון סטנדרטי לנגזרת לפי הזמן

המהירות: $\vec{v} \equiv \dfrac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$



את הוקטור $\vec{r}$ ניתן לפרק לרכיבים:

$$\vec{r} = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

וגם את Δr:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y} + \Delta z\,\hat{z}$$

בעזרת Δr ניתן כעת לרשום את הנגזרת בעזרת רכיבי $\vec{r}$:

20.10.04

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{y} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{z} \right)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

דהיינו, רכיבי המהירות הם:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

שימו לב! הנגזרת הנ"ל נכונה רק מכיוון ש- $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ הם קבועים בזמן, אחרת
היינו חייבים לגזור גם את וקטורי הכיוון $\hat{e}$ של מערכת הצירים.

גזירה של מכפלת סקלר בוקטור:

$$\frac{d}{dt}(a\vec{b}) = \frac{d}{dt}\left(ab_x\hat{x} + ab_y\hat{y} + ab_z\hat{z} \right) =$$

$$= \frac{da}{dt}b_x\hat{x} + a\frac{db_x}{dt}\hat{x} + \frac{da}{dt}b_y\hat{y} + a\frac{db_y}{dy}\hat{y} + \dots$$

$$= \frac{da}{dt}\vec{b} + a\frac{d\vec{b}}{dt}$$

כלל הגזירה דומה לכלל הגזירה של מכפלת שני פונקציות סקלריות.
הכלל מתקיים גם עבור גזירת מכפלה סקלרית ווקטורית:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

<u>וקטור תאוצה</u>: הנגזרת בזמן של $\vec{r}$ נותנת את $\vec{v}$
נגזרת הזמן של $\vec{v}$ נותנת את התאוצה $\vec{a}$.

סימון סטנדרטי לנגזרת בזמן

נגזרת שניה.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

וקטורים שונים ניתן לגזור לפי פרמטרים שונים. וקטור המיקום $\vec{r}$ והזמן t הם
רק מקרים פרטיים.

תרגיל:

* נתון המסלול:

$$r=\left(3\exp(-t/_{1sec}),\ 2\sin(t/_{1s}),\ -5(t/_{s})^2\right)\text{m}$$

שניה   מטר

מה המהירות, התאוצה וגם גודל המהירות?

המהירות:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\left(3\text{m}\exp(-t/_{1s})\right)}{dt}\hat{x}+\frac{d\left(2\text{m}\sin(t/_{s})\right)}{dt}\hat{y}-\frac{d\left(5(t/_{s})^2\text{m}\right)}{dt}\hat{z}$$

$$=-3\frac{\text{m}}{\text{s}}\exp(-t/_{s})\hat{x}+4\frac{\text{m}}{\text{s}}\cos(t/_{s})\hat{y}-10\frac{\text{m}}{\text{s}}(t/_{s})\hat{z}$$

והתאוצה:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=+3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\exp(-t/_{s})\hat{x}-\frac{8\text{m}}{\text{s}^2}\sin(t/_{s})\hat{y}-\frac{10\text{m}}{\text{s}^2}\hat{z}$$

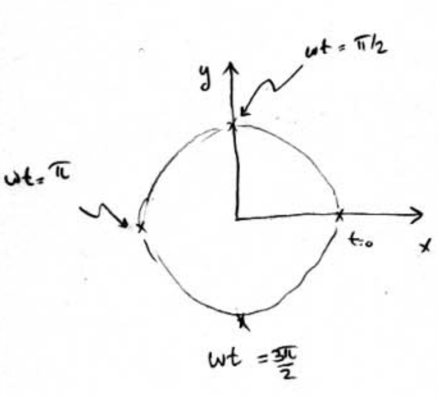
גודל המהירות:

$$|\vec{v}|=\sqrt{9\exp(-2t/_{s})+16\cos^2(t/_{s})-100(t/_{s})^2}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

שימו לב כי אנו דנים בגדלים פיסקליים לכן יש לשמור על היחידות במידה והללו קיימים.
כמו כן, פונקציות כמו $\sin(x)$, $\exp(y)$ מקבלים ארגומנט חסר יחידות (אין
משמעות ל- $\sin(17m)$. לכן, אם t הוא עם יחידות (למשל זמן...) אז
וכו' לרשום $\sin(t)$. ביטויים אפשריים הם $\sin(t/t_0)$, $\sin(\omega t)$ כאשר ω
עם יחידות של $1/$זמן וכו'...

* תנועה מעגלית: נתון המסלול

$$\vec{r}=\left(r_0\cos(\omega t),\ r_0\sin\omega t,\ 0\right)$$



התנועה המתוארת ע"י מסלול זה הוא מעגל:
זאת ניתן לראות מכך שגודלו של $\vec{r}$ הוא
קבוע:

$$|\vec{r}|=\sqrt{r_0^2\cos^2(\omega t)+r_0^2\sin^2(\omega t)}=r_0$$

כיוון הסיבוב הוא נגד כיון השעון.

מהי המהירות?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} = -r_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0$$

גודל המהירות:

$$|\vec{v}| = \sqrt{r_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + r_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)} = r_0 \omega$$

צ״ל.

$$v = \omega r_0$$

ניתן לראות שווקטור $\vec{v}$ ניצב לוקטור $\vec{r}$:

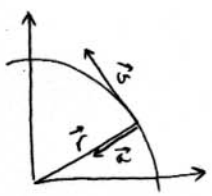
$$\vec{v} \cdot \vec{r} = \overbrace{-r_0 \omega_0 \sin(\omega t)}^{v_x} \overbrace{r_0 \cos(\omega t)}^{r_x} + \overbrace{r_0 \omega \cos(\omega t)}^{v_y} \overbrace{r_0 \sin(\omega t)}^{r_y} = 0$$

בדרך דומה למהירות, ניתן לחשב את התאוצה:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -r_0 \omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 r_x \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -r_0 \omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 r_y \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

(או $a = -\omega^2 r$)

אפשר גם לרשום: $\omega = \frac{v}{r}$ ולכן: $a = v^2/r$.



$\vec{v}$ ניצב ל- $\vec{r}$ ו- $\vec{a}$ בתנועה מעגלית. $\vec{a}$ פונה פנימה.

ω נקרא התדירות הזוויתית (= קצב שינוי הזווית ברדיאנים): $\frac{rad}{sec}$

P הוא הזמן מחזור. ימדד ב- sec. במחזור אחד, הארגומנט משתנה ב- 2π ולכן:

$$\omega \cdot P = 2\pi \longrightarrow P = 2\pi/\omega$$

f נקרא התדירות, שזה כמה מחזורים (לא רדיאנים) לשניה, הוא ימדד ב- $1/sec$.

$$f = 1/p$$

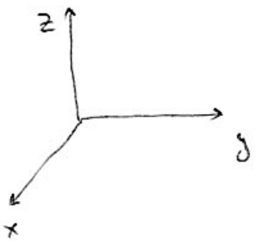
אותה $1/s$ מגדירים כ- Hz (הרץ) או כותבים cps (cycles per second).

<u>הערה</u>: היות וזווית היא חסרת יחידות, הרדיאן הווה חסר יחידות גם ולכן יכול להופיע או להעלם בלי שיפריע. (למשל, ניתן לרשום $\omega = 17\frac{rad}{sec}$ או $\omega = 17\frac{1}{sec}$, הכוונה בשניהם זהה).

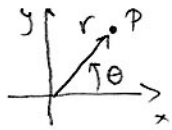
24.10.04

מערכות צירים שימושיות:

* **מערכת קרטזית:** המערכת הרגילה עם $\hat{x}$, $\hat{y}$ ו-$\hat{z}$. לפעמים מסמנים: $\hat{k}$.$\hat{j}$,$\hat{i}$ או רכיב ש וקטור r_y או r_j.



* **מערכת צירים פולרית 2D:**

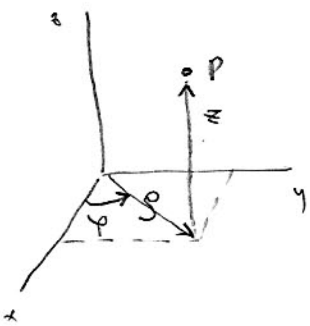


הקשר בין מערכת פולרית לקרטזית דו-מימדית:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

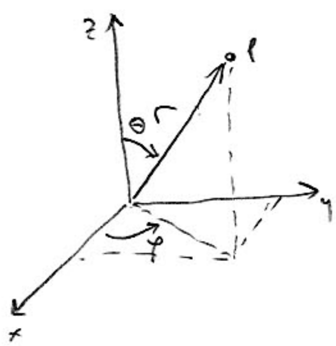
הערה: עבור $x<0$ ישנה בעיה עם ה-$\tan^{-1}$ הזה והפונקציה זו מחזירה רק $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, ולכן יש להוסיף ל-$\theta$ את π אם $x<0$. (במחשבים יש לרוב פונקציה $\tan^{-1}(x,y)$ שמאפשרת להחזיר θ ברביע הנכון).

* **מערכת צילינדרית קרטזית:**



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

מערכת צירים כדורית:



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

24.10.04

<u>דוגמא</u>: נתונים שני וקטורים במערכת קואו' כדורית:

$\vec{a}_1=(r_1,\theta_1,\varphi_1)$
$\vec{a}_2=(r_2,\theta_2,\varphi_2)$

בקואורדינטות כדוריות, למה שווה $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$? מהי הזוית ביניהם?

<u>פתרון</u>: נבצע את ההכפלה בקואו' קרטזיות ונקבל:

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 = r_1 r_2\left(\sin\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\varphi_2+\sin\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\sin\varphi_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

$$= r_1 r_2\Big(\sin\theta_1\sin\theta_2\underbrace{\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}+\cos\theta_1\cos\theta_2\Big)$$

$$= r_1 r_2\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

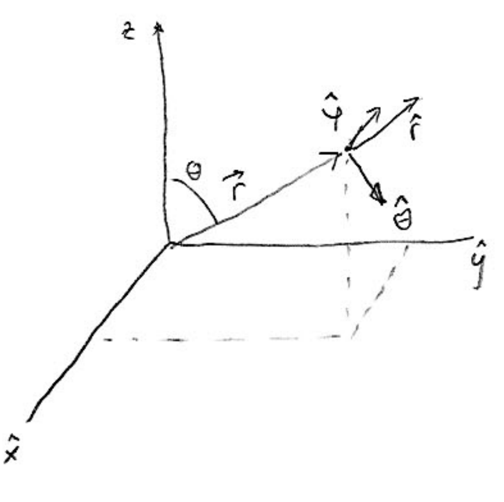
הזוית תהיה:

$$\theta_{12}=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|a_1||a_2|}\right)=\cos^{-1}\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

אגב, בדרך דומה ניתן למצוא ביטוי עבור $\sin\theta_{12}$ ע"י הכפלת $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$ במערכת "בסיס קרטזי"

<u>וקטורי יחידה בקואורדינטות כדוריות:</u>

במערכת לא קרטזיות כיוון וקטורי היחידה תלוי במקום!



מהירות ותאוצה בקואורדינטות פולריות:

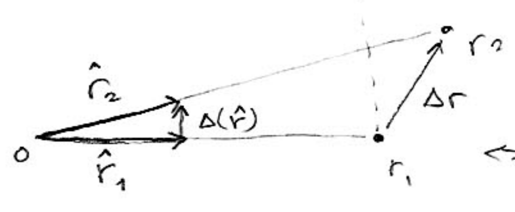
את וקטור המקום ניתן לרשום כ:

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

אם נגזור בזמן:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

מה זה $\frac{d\hat{r}}{dt}$? המשמעות של זה היא קצב השינוי של הכיוון של הוקטור $\hat{r}$:



$$\Longleftrightarrow \Delta(\hat{r}) = \Delta\theta\,\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \lim_{\Delta\hat{r}\to 0}\frac{\Delta(\hat{r})}{\Delta t} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\hat{\theta}\,\Delta\theta}{\Delta t} = \hat{\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

ולכן:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

וקטור התאוצה:
בקואורדינטות קרטזיות:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{z}$$

במערכת פולרית:

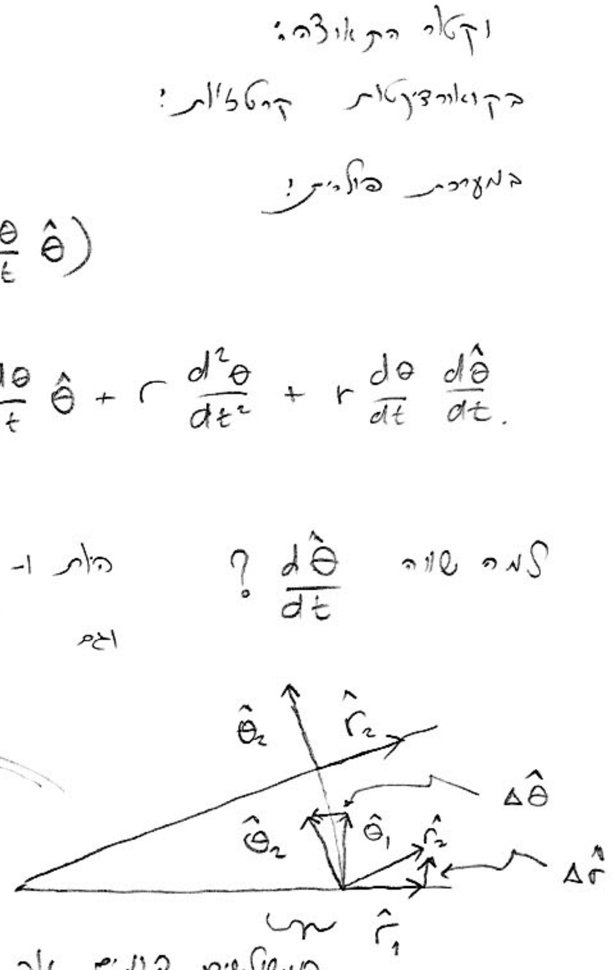
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\right)$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\theta}}{dt}.$$

למה שווה $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$? היות ו- $\hat{r}\perp\hat{\theta}$ ברור ש- $\left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\hat{\theta}}{dt}\right|$
וגם $\frac{d\hat{r}}{dt}\perp\frac{d\hat{\theta}}{dt}$. כיוון:

$$\Delta\hat{\theta} = \Delta\theta(-\hat{r})$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r}$$



המשולשים דומים אך מסובבים ב- 90°.

כעת ניתן להציב בביטוי עבור $\vec{a}$ ולקבל:

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\theta}$$

<u>תנועה מעגלית:</u>

$$r = r_0 = const$$

$$\theta = \omega t$$

$$v = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{0}\hat{r} + r_0\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\hat{\theta} = r_0\omega\hat{\theta}$$

$$a = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\underbrace{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\omega^2}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\Bigg[\overbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{\left(r^2\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\right)}_{\text{אינו תלוי בזמן}}}^{=0}\Bigg]\hat{\theta} = -r\omega^2\hat{r}$$

<u>אינטגרציה</u>: הפעולה ההפוכה לנגזרת.

$$\vec{r} = \int\vec{v}\,dt$$

ניתן לבצע אינטגרציה של כל רכיב בנפרד:

$$x = \vec{r}\cdot\hat{x} = \int\vec{v}\cdot\hat{x}\,dt = \int v_x\,dt$$

<u>דוגמא:</u>

$$\vec{a} = -g\hat{z}$$

$$\vec{v} = \int\vec{a}\,dt \Rightarrow v_x = \int\underbrace{a_x}_{0}dt = \underbrace{C_1}_{\text{קבוע אינטגרציה.}} \equiv v_{x,0}$$

$$v_z = \int a_z\,dt = -\int g\,dt = -gt + C_2 = -gt + v_{z,0}$$

$$x = \int v_x\,dt = \int v_{x,0}\,dt = v_{x,0}t + C_3 = v_{x,0}t + x_0$$

$$z = \int v_z\,dt = \int(-gt + v_{z,0})\,dt = -\frac{gt^2}{2} + v_{z,0}t + \overbrace{C_4}^{z_0}$$

$v_{x,0}, v_{z,0}$ הם המהירויות של החלקיק ב- $t=0$ והם קבועי האינטגרציה המתקבלים מהמשוואה עבור המהירות. x_0, z_0 הם המיקומים של החלקיק ב- $t=0$ והם מתקבלים מהאינטגרציה עבור x, z. וכך קיבלנו את המשוואות של נפילה חופשית.

— 1 —

26.10.04

חוקי ניוטון

חוקי ניוטון וחוקי טבע אחרים אינם חוקים שניתן "להוכיח" כמו משפטים במתמטיקה. אלה, הם חוקים שלא הוכחו ע"י נסיונות.

לדוגמא, בתקופתו של אריסטו חשבו שמהירות נפילתו של גוף יחסית למשקלו - גוף כבד יותר נופל מהר יותר. כיום ידוע שגופים נופלים מאוזנים באותו הקצב ללא קשר למשקל. אז, בתקופתו של אריסטו חשבו כי על גוף חייב לפעול כח על מנת שהוא ימשיך לנוע. חוקים אלה של אריסטו אינם מתאימים לתיאור המציאות ולכן אינם נכונים. אולם רק בתקופתו של גלילאו התחיל להכנס לתודעה הרעיון שנסיונות הם דבר חשוב כדי להבין את חוקי הטבע. עד אז "נסיונות מחשבתיים" היו מספיקים כדי "להוכיח" חוק זה או אחר.

חוקי ניוטון מבוססים על הנסיון שהיה קיים בתקופתו - חוקי תנועה של נפילה חופשית או תנועה בליסטית (חוקים אותם מצא גלילאו) וגם החוקים המתארים את תנועת גרמי השמיים - חוקים שנוסחו ע"י קפלר.

ואלו הם החוקים:

חוק ראשון של ניוטון:

* ללא כוחות חיצוניים - גוף ימשיך לנוע באותה המהירות ובאותו הכיוון: $\vec{F}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{v}=0$

חוק זה מתקבל למעשה מהחוק השני.

החוק השני של ניוטון:

* קצב שינוי התנע של גוף יחסי לכח המופעל על הגוף

וקטור המהירות - $\vec{v}$

מסת הגוף - m

$$\underbrace{\vec{F} \propto}_{\text{יחסי ל-}} \frac{d}{dt}\underbrace{(m\vec{v})}_{\text{הגדרת התנע של הגוף}}$$

מגדירים את יחידות הכח כך שמקדם הפרופורציה הוא 1:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

26.10.04

אם המסה נמדדת ב- gr והתאוצה ב- cm/s^2 אז הכח יימדד ביחידה הנקראת דין dyne

$$1dyn = dyne \equiv gr \cdot cm \cdot s^{-2}$$

אם המסה נמדדת ב- kg והתאוצה ב- m/s^2 נקבל את הניוטון:

$$\underline{1N} = Newton = kg \cdot m \cdot s^{-2} = (1000\, gr)\cdot(100\, cm)\cdot s^{-2} =$$
$$= 10^5\, gr\, cm\, s^{-2} = \underline{10^5\, dyn}$$

אם מסת הגוף קבועה, נקבל את החוק השני בניסוחו המוכר לנו:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0}\vec{v} + m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} = m\vec{a}$$

בגלל מסה קבועה.

ישנם מקרים שלא ניתן להזניח את האיבר dm/dt. לדוגמא, בפתרון בעיית טיל (מסתו קטנה עם שריפת הדלק והוצאת הדלק אחורה).

<u>החוק השלישי של ניוטון:</u>

כאשר שני גופים פועלים זה על זה, הכח אותו מפעיל גוף 1 על גוף 2 ($\vec{F}_{21}$) שווה בגודלו והפוך בכיוונו מהכח שמפעיל גוף 2 על גוף 1 ($\vec{F}_{12}$). דהיינו:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

בהמשך נראה שחוק זה ביחד עם החוק השני משמעותם שימור תנע

דוגמא פשוטה לשימוש בחוק השני:

חלקיק (בעל מסה קבועה) נע ללא השפעת כוחות. מה יהיה מסלול תנועתו?

$$0 = \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{v} = \int \vec{0}\, dt = \underbrace{\vec{v}_0}$$

קבוע האינטגרציה הוא וקטור השווה למהירות הקבועה של החלקיק.

$$\vec{x} = \int \vec{v}\, dt = \int \vec{v}_0\, dt = \vec{v}_0 t + \underbrace{\vec{r}_0}$$

קבוע האינטגרציה. ב- t=0 החלקיק היה ב- $\vec{r} = \vec{r}_0$

ז.א. ללא כוחות חיצוניים, חלקיק ינוע על קו ישר במהירות קבועה (החוק הראשון).

תנועת חלקיק בשדה כבידה אחיד:

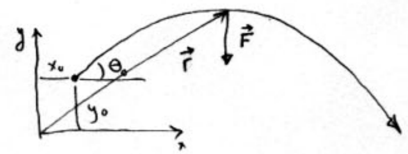
מהי משוואת התנועה של חלקיק בשדה כבידה אחיד? שדה כבידה אחיד הוא כח קבוע הפונה כלפי מטה. הכח יחסי למסה כדי שהתאוצה תהיה בלתי תלויה:

$$\vec{F} = -mg\hat{y}$$

g - קבוע הגרביטציה המקומי. למעשה הוא שונה ממקום למקום על כדוה"א (גדול יותר בקטבים) ושווה בערך ל- $g \approx 980\ cm/s^2$ או $g \cong 9.8\ m/s^2$.

כשהדיוק אינו חשוב, ניתן גם לקחת בקירוב: $g \approx 10\ m/s^2$.

כעת, אני רוצה לכתוב את המשוואות המתארות את מיקום החלקיק:



חוק II:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = \vec{F}/m = -g\hat{y}$$

אם נכתוב בעזרת רכיבים:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y}\right) = -g\hat{y}$$

כיון ש- $\hat{x}$ ו- $\hat{y}$ ניצבים זה לזה, כל רכיב מתקיים בנפרד (הדרך לראות: להכפיל את המשוואה פעם ב- $\cdot\hat{x}$ ופעם ב- $\cdot\hat{y}$ [illegible]):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

ע"י אינטגרציה:

$$\frac{dx}{dt} = v_{0,x} = v_0\cos\theta_0 \qquad x = tv_0\cos\theta_0 + x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{0,y} - gt = v_0\sin\theta_0 - gt \qquad y = tv_0\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

זהו הפתרון של תנועת חלקיק בשדה כוח קבוע. ניתן לתאר אותו בעזרת קשר בין y ו- x ע"י חילוץ t:

$$t = \frac{(x-x_0)}{v_0\cos\theta_0}$$

נציב במשוואה של y ונקבל:

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)\frac{(x-x_0)}{v_0\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

ע"י משחק מתמטיקה ניתן להראות שביטוי זה שווה ל-

$$y - \underbrace{\left(y_0 + \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g}\right)}_{y_m} = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta_0}\left[x - \underbrace{\left(x_0 + \frac{V_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}\right)}_{x_m}\right]^2$$

זוהי פרבולה, הערך המקסימלי שלה מתקבל ב- (x_m,y_m):

$$x_m = x_0 + \frac{V_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} \qquad y_m = y_0 + \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

* את המקסימום של המסלול ניתן למצוא בדרך קלה יותר:

$$\underbrace{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_m} = 0}_{} \Rightarrow V_0\sin\theta_0 - gt_m = 0 \Rightarrow t_m = \frac{V_0\sin\theta_0}{g}$$

שיא המסלול מתקבל כאשר החלקיק מפסיק "לעלות" בציר $\hat{y}$.

ע"י הצבה במשוואות עבור x ו- y מתקבל:

$$x_m = \frac{V_0\sin\theta_0}{g}V_0\sin\theta_0 + x_0$$

$$y_m = \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{g^2} + y_0 = \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g} + y_0$$

* נחשב את המרחק בציר x אותו עובר החלקיק עד שיגיע שוב ל- y_0:

המשוואה שיש לפתור: $y = y_0$

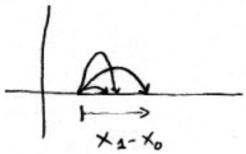
נציב את הביטוי עבור y:

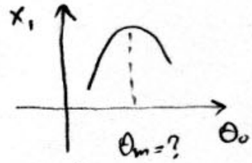
$$y_0 + v_0\sin\theta_0\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0$$

ולכן: $t = \dfrac{2V_0\sin\theta_0}{g}$

והצבה בביטוי עבור x: $x = \dfrac{2V_0\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} + x_0$

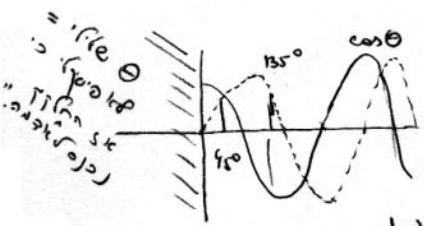
מהי הזוית θ בה יגיע החלקיק למרחק x_1 הגדול ביותר, בהנתן V_0 נתון.





אנו רוצים את הטווח המקסימלי של $x_1(\theta_0)$. כדי לקבל אותו נגזור את x_1 לפי θ_0:

$$\left.\frac{dx_1}{d\theta_0}\right|_{\theta_0=\theta_m} = 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos^2\theta_m - \sin^2\theta_m\right) = 0$$



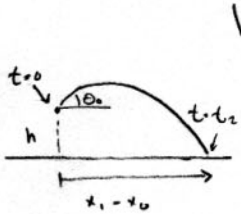
$$\cos\theta_m = \pm\sin\theta_m$$

$$\theta_m = \underline{45°},\ 135°$$

$135°$ נותן לנו את המרחק המקסימלי בכיוון ההפוך!

<u>דוגמא נוספת</u>: אותה שאלה אך כעת החלקיק יוצא מגובה h

<u>פתרון</u>:



$$y = y_0 - h = y_0 + V_0\sin\theta_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$\hookrightarrow t_2 = \frac{V_0\sin\theta_0 \pm \sqrt{V_0^2\sin^2\theta_0^2 + 2gh}}{g}$$

הפתרון עם ה"-" אינו רלוונטי היות והוא הזמן לפני הזריקה (t שלילי) בו היה החלקיק אילו תנועתו התחילה קודם.

בדיקה שהפתרון עבור t_2 הגיוני: עבור $h=0$ מקבלים: $t_2 = \frac{2V_0\sin\theta}{g}$ ✓

מה שקיבלנו קודם. עבור $V_0=0$, זוהי נפילה חופשית ומתקבל:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

כפי שצריך להיות ✓

[פתרון נפילה חופשית: $y=-\frac{1}{2}gt^2$, $y=-h$ $\hookrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$]

ה- x המתקבל עבור $t=t_2$ הוא:

$$x_2=\left(\frac{V_0\sin\Theta_0}{g}+\sqrt{\frac{V_0^2\sin^2\Theta_0}{g^2}+\frac{2h}{g}}\right)V_0\cos\Theta_0$$

ערכו המקסימלי יתקבל עבור

$$\frac{dx_2}{d\theta_0}=0$$

אולם זה יתן משוואה לא טריוויאלית עבור $\cos\Theta_0$ ו- $\sin\Theta_0$. דרך אחת לפתור אותה היא להציב: $\xi=\sin\Theta_0$ (האות קרויה קסי xi). ואז:

$$x_2=\left(\frac{V_0\xi}{g}+\sqrt{\frac{V_0^2\xi^2}{g^2}+\frac{2h}{g}}\right)\sqrt{1-\xi^2}$$

המשוואה $\frac{dx_2}{d\Theta_0}=0$ תתן:

$$\frac{dx_2}{d\Theta_0}=\frac{dx_2}{d\xi}\frac{d\xi}{d\Theta_0}=0$$

כלל השרשרת.

ולכן גם $\frac{dx_2}{d\xi}=0$. אחרי גזירה וסידור איברים:

$$\frac{dx_2}{d\xi}=\frac{V_0^2\xi(1-2\xi^2)+g\left(-2h\xi+V_0(1-2\xi^2)\sqrt{\frac{V_0^2\xi^2}{g^2}+\frac{2h}{g}}\right)}{g^2\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{\frac{V_0^2\xi^2}{g^2}+\frac{2h}{g}}}=0$$

המשוואה נותנת משוואה ריבועית ל- ξ הפתרון החיובי הוא:

$$\xi_m=\sin\Theta_m=\frac{1}{\sqrt{2\left(1+\frac{gh}{V_0}\right)}}$$

* מי שרוצה: ישלים את האלגברה החסרה!!!

27.10.04

דוגמא לפתרון משוואות תנועה: נפילת גוף עם חיכוך יחסי למהירות

נניח כי גוף נופל ושאת השפעת האוויר ניתן לבטא ככוח חיכוך: $F_{drag} = -k\vec{v}$

כיצד תראה תנועתו של החלקיק?

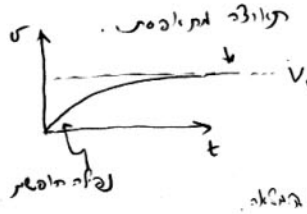
פתרון: משוואת התנועה של החלקיק: (חוק II):

$$\underbrace{m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{(\text{מדידה})} = +F_g + F_{drag} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

כיצד מתנהגת משוואה זו? כאשר החלקיק נע לאט (למשל, קירובים שימושיים).
האיבר $k\vec{v}$ זניח ומשוואת התנועה היא:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$$

כלומר נפילה חופשית רגילה – החלקיק יתחיל להאיץ g בכיוון המשיכה.
לאחר שהמהירות תגדל, יכנס למשחק האיבר $k\vec{v}$, וככל שהמהירות גדלה כך הוא גדל ומקטין את התאוצה הכוללת. ז"א החלקיק יאיץ g פחות ופחות מהר עד שהמהירות תהיה כך שהכוח הכולל מתאפס:



התאפסות התאוצה תקרא כאשר:

$$m\vec{g} = k\vec{v}_\infty \Rightarrow \vec{V}_\infty = \frac{m}{k}\vec{g}$$

כעת, כשמבינים מה מתרחש ננסה לפתור את המשוואה במלואה.
במקרה הכללי, ישנו:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}$$

נסתכל על ציר $\hat{y}$ ונגדיר $\hat{y}\downarrow$ כך ש- $\vec{g} = g\hat{y}$. (כך המהירות תהיה חיובית).

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{k}{m}v_y$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית עבור $v_y(t)$. סוג מסוים זה נקרא משוואה "פרידה" היות וניתן להפריד את האיברים התלויים מפורשות ב- t לצד אחד ואלה התלויים ב- v לצד השני: נעביר dt ימינה ואת $g - \frac{k}{m}v_y$ שמאלה:

$$\frac{dv_y}{g - \frac{k}{m}v_y} = dt$$

מה המשמעות של מה שקיבלנו?

27.10.04

מה שהמשוואה הנ"ל נותנת לנו הוא קשר בין שינוי בזמן dt לשינוי המתקבל במהירות dv_y.

במקרה ספציפי זה, הקשר הזה תלוי במהירות הרגעית של החלקיק v_y אולם, הוא יכול היה להיות תלוי גם בזמן ואף במקום (ואז היינו בצרה צרורה וכו'...).

מה שמעניין אותנו הוא למצוא קשר $v_y(t)$ שמתקבל אם אנחנו סוכמים את ה-dv_y הרבים המתקבלים מה-dt ים. היות וה-dt ו-dv_y הם קטנים, סכימה זו היא אינטגרל:

$$\int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv_y}{g-\frac{k}{m}v_y} = \int_{t=0}^{t} dt$$

צד ימין נותן:

$$\underbrace{\text{r.h.s}}_{\text{right hand side}}: \quad \int_{t=0}^{t} dt = t\Big|_{t=0}^{t=t} = t-0 = t$$

צד שמאל:

$$\text{l.h.s}: \quad \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv_y}{g-\frac{k}{m}v_y} = \frac{\ln\left(g-\frac{k}{m}v_y\right)}{-k/m}\Bigg|_{v_y=v_y(t=0)}^{v_y=v_y(t)}$$

אם נתון כי החלקיק נתחיל ממנוחה, אזי: $v_y(t=0)=0$ ולכן:

$$\text{l.h.s} = -\frac{m}{k}\left(\ln\left(g-\frac{k}{m}v_y\right)-\ln(g)\right) = -\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{kv_y}{mg}\right)$$

השוואה בין צד ימין לצד שמאל נותנת:

$$-\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{kv_y}{mg}\right) = t \quad \wedge \quad v_y = \frac{mg}{k}\left(1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)$$

ניתן לבצע אינטגרציה נוספת ולקבל את y:

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v_y\,dt = dy \Rightarrow y = \int_{y(t=0)}^{y(t)} dy = \int_{t=0}^{t} v_y\,dt = \int_{t=0}^{t} \frac{mg}{k}\left(1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)dt$$

$$= \left(\frac{mgt}{k} + \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\cdot\frac{mg}{k}\cdot\frac{m}{k}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=t}$$

$$= \frac{mgt}{k} + \frac{m^2 g}{k^2}\left(\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)-1\right)$$

27.10.04

<u>הערות</u>:

1) הפתרון שקיבלנו הוא הגיוני: בגבול $t\to\infty$ ה-$\exp\to 0$ ואז $v_y=\frac{mg}{k}$!
זהו הערך הסופי v_∞ שקיבלנו מקודם.

בגבול של $kt\ll 1$ יש לפתח את האקספוננט. לשם כך, נשתמש בטור טיילור האומר

$$f(x)\simeq f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}+\cdots$$

כלומר, ניתן לקרב את הפונקציה $\exp(x)$ ע"י:

$$\exp(x)\simeq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots \longrightarrow \exp(x)\simeq 1+x \quad (x\ll 1)$$

עוד על טור טיילור תלמדו באינפי. בכל מקרה, במקרה שלנו ניתן לכתוב:

$$v_y=\frac{mg}{k}\left(1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)\simeq\frac{mg}{k}\left(1-1+\frac{kt}{m}+\cdots\right)\stackrel{\sim}{=} gt$$

ז"א. עבור זמנים קטנים, המקיימים $\frac{kt}{m}\ll 1$, החיכוך אינו חשוב והמהירות מתנהגת כמו נפילה חופשית ללא חיכוך ✓. (וטוב מאוד שכך!).

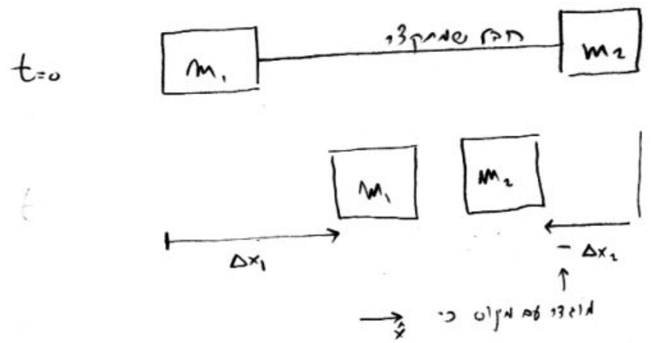
2) נניח שאנו היינו מפרידים בין t ל-v במשוואה. היינו מקבלים, למשל:

$$\int_{v_y(t=0)}^{v_y(t)} dv_y=\int_{t=0}^{t}\left(g-\frac{k}{m}v_y(t)\right)dt$$

היינו מסוגלים לעשות אינטגרציה על צד שמאל ולקבל: $v_y(t)-v_y(t=0)$
אולם עם צד ימין היינו נתקלים בבעיה. אנו לא יודעים מהי התלות של v_y ב-t ולכן לא נוכל לבצע אינטגרציה על $\int v_y(t)dt$?! כעת ניתן לראות מדוע אם ניתן להפריד בין המשתנים, עושים זאת.

ניסוי שתי עגלות

בכיתה ראינו ניסוי בו שתי עגלות נפגשו זה את זה. העגלה הכבדה יותר זזה פחות מהעגלה הקלה יותר. יחס התזוזות היה הפוך ליחס המסות. כיצד זה מתקבל מהחוק השני והשלישי?



נחשב את המהירות:

חוק שני, רכיב $\hat{x}$.

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{F_{12}}{m_1} \wedge v_1 = \frac{1}{m_1}\int_{t=0}^{t} F_{12}\,dt$$

באותו צורה:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{F_{21}}{m_2} \wedge v_2 = \frac{1}{m_2}\int_{t=0}^{t} F_{21}\,dt$$

מהחוק השלישי:

$$= -\frac{1}{m_2}\int_{t=0}^{t} F_{12}\,dt = -\frac{m_1}{m_2} v_2$$

חוק III

הגדרה של v_1

ז"א, יחס המהירויות פרופורציונלי הפוך ליחס המסות?

וההעתקים Δx:

הגדרת התוצאה עבור המהירות.

$$\Delta x_1 = \int_{t=0}^{t} v_1\,dt \; ; \; \Delta x_2 = \int_{t=0}^{\infty} v_2\,dt = -\frac{m_2}{m_1}\int_{t=0}^{\infty} v_1 = -\frac{m_2}{m_1}\Delta x_1$$

הגדרת Δx_1

ז"א. גם העתקים יחסית הפוך ליחס המסות.

שימור תנע:

* נסתכל על שני גופים ללא אינטראקציה ע"י גופים אחרים; למה שווה שינוי התנע שלהם?

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1+\vec{P}_2) = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \underbrace{\vec{F}_1}_{\text{הכח הכולל על 1.}} + \vec{F}_2 = \underbrace{\vec{F}_{12}}_{\text{הכח היחיד על 1 הוא מ-2.}} + \vec{F}_{21}$$

חוק II

$$= \vec{F}_{12} - \vec{F}_{12} = 0$$

חוק III.

התנע נשמר! נראה שהתנע נשמר גם אם מדובר ביותר גופות:

* נסתכל על N מסות במערכת סגורה (ללא אינטראקציה עם הסביבה) השינוי בתנע:

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N}\vec{P}_i\Big) = \sum_{i=1}^{N}\frac{dP_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} F_{ij}}$$

התנע של מסה i.

חוק שני של ניוטון

הכח הכולל שמסה i מרגישה הוא סכום של כל ה-F_{ij} (כל ה-j-ים האחרים מ-i).

$$= \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\sum_{j=i+1}^{N}}_{\text{שימו לב לשינוי בסכימה על } j}\underbrace{(\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji})}_{\substack{\text{מהחוק ה-III}\\ = 0}} = 0$$

התנע של מערכת מבודדת נשמר!

האנרגיה הקינטית

האנרגיה הקינטית של חלקיק בעל מסה m מוגדרת כ-

$$E \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

אם המערכת מכילה מספר חלקיקים בעלי מסות m_i ומהירויות v_i:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

התנע הוא וקטור ואילו האנרגיה הקינטית היא סקלר.

שימור אנרגיה ועבודה במימד אחד

* למה שווה שינוי האנרגיה בין זמן 1 לבין זמן 2 ?

את השינוי באנרגיה ניתן לכתוב כ-

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(mv^2\right) dt$$

למה שווה הנגזרת בזמן? נניח כי התהליך נע במימד אחד z. המסה קבועה.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(mv^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(mv_z^2\right) = \underbrace{m v_z \frac{dv_z}{dt}}_{ma_z} = v_z F_z$$

כלומר:

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} v_z F_z \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(נכתוב את } v_z \text{ מפורשות)}}}{=} \int_{t_1}^{t_2} F_z \frac{dz}{dt}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(עבור למשתנה אינטגרציה } z\text{)}}}{=} \underbrace{\int_{z(t_1)}^{z(t_2)} F_z\, dz \equiv W}$$

אנו מגדירים את
אותו זה כעבודה שנעשית
ע"י הכוח F_z.

מה שקיבלנו ⇐ שינוי האנרגיה הקינטית = עבודה: $\Delta E = W$

אם F_z ניתן לכתיבה כ- $F_z = -\frac{dU}{dz}$ ⇐ אז $\left[U = -\int_{z_0}^{z} F_z\, dz\right.$ של הכוח F.

מגדירים כאנרגיה הפוטנציאלית

z_0 ← נקודת יחוס שרירותית (בחירת על-ידינו)

ואז:

$$\Delta E + \Delta U = 0$$

$$\left[\quad \left(E(z_2) - E(z_1)\right) + \left(U(z_2) - U(z_1)\right) = 0 \qquad \text{או} \quad \right]$$

זהו חוק שימור האנרגיה שאומר שסה"כ האנרגיה (קינטית + פוטנציאלית) נשמר
אם הכוח שלנו ניתן לכתיבה כ- $F_z = -\frac{dU}{dz}$.

כוח כזה נקרא <u>כוח משמר</u>.

<u>דוגמא לכוח משמר:</u>

כוח הכובד: $F = -mg\hat{z}$

$$U = -\int F_z\, dz = mgz$$

<u>דוגמא לכוח לא משמר:</u>

כל כוח חיכוך, כוחות שתלויים במהירות וכדומה.

$$F = F(v) \qquad U = ???$$

אנרגיה יחידות:

יחידת האנרגיה ב- c.g.s היא הארג (erg):
$$1\,erg = gr\,\frac{cm^2}{sec^2}$$

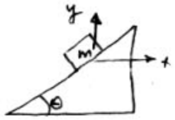
יחידת האנרגיה ב- m.k.s היא הג'אול (Joule)
$$1J = kg\,\frac{m^2}{sec^2} = 10^7\,erg$$

יחידה נפוצה נוספת: קלוריה: (כמות האנרגיה הדרושה לחימום גרם מים ב-4^0C במעלה אחת).
$$1C = 4.2\,J$$

קלוריה "של אוכל" היא קילוקלוריה:
$$1kC = 1000\,C$$

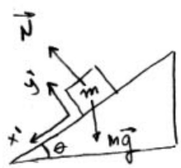
(מאה גרם שמן מכילים 900 קילוקלוריות של אנרגיה!!!)

שתי דוגמאות לשימוש באנרגיה לעומת שימוש בכוחות:



* מסה על מדרון: ⇐ מהו $v(y)$?
⇐ מהו הדרך $x'(t)$ לאורך המדרון?

פתרון בעזרת כוחות:



שני הכוחות אשר "מרגישה" המסה m הם $\vec{N}$ - הכח הנורמלי (ניצב) למישור המונע מהמסה לעבור דרך המישור, ו- $m\vec{g}$, שהוא הכח הכבידה המושך את המסה כלפי כדור הארץ.

לשם נוחות, נעבוד במערכת צירים מסובבת x',y' כך שהתנועה מאולצת לנוע בציר x' ואילו הכח הנורמלי היינו בציר y'.

ציר y': כח נורמלי $\vec{N}$, אבל אין תאוצה ⇐ סכום הכוחות שווה לאפס:
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \quad \hat{y}': \quad N - mg\cos\theta = ma_{y'} = 0$$
$$\Downarrow$$
ציר x':
$$\hat{x}': \quad mg\sin\theta = ma_{x'}$$

$$a_{x'} \equiv \frac{d^2x'}{dt^2} \equiv \underbrace{\ddot{x}' = g\sin\theta}_{\text{משוואת תנועה מסדר שני (בזמן!)}} \rightarrow v_{x'} = v = g(\sin\theta)t$$
מתחיל ממנוחה ←
$$x' = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$$
מתחיל מ-$x'=0$ ←

כדי לקבל $v(y)$, אנו צריכים קשר בין x' ל-y:
$$y = -x'\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}gt^2\sin^2\theta$$

בדיקה: (אם $\theta=0$ אין תרומה ל-y מ-x').

מכאן:
$$t = \sqrt{\frac{2(-y)}{g\sin^2\theta}}$$

ולכן:
$$v = gt\sin\theta = \sqrt{2(-y)g}$$

כעת נחזור על התרגיל בעזרת שימור אנרגיה:

אנרגיה קינטית: $E = \frac{1}{2}mv^2$

אנרגיה פוטנציאלית: $U = +mgy$

שימור אנרגיה נותן:
$$E + U = \text{const} \Rightarrow \Delta E + \Delta U = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{=0}\right) + \left(mgy - mg\underbrace{y_0}_{=0}\right) = 0$$

מניחים כי מתחיל ממנוחה. $=0$ לשם נוחות

$$v = \sqrt{2g(-y)}$$

כדי למצוא את הדרך x', נגדיר משתנה x':
$$x' = -\frac{y}{\sin\theta}$$

ולכן:
$$v = \frac{dx'}{dt} \equiv \dot{x}' = \sqrt{2gx'\sin\theta}$$
משוואת תנועה מסדר I בזמן

כדי לבצע אינטגרציה, נבצע הפרדת משתנים:
$$\frac{dx'}{x'^{1/2}} = \sqrt{2g\sin\theta}\,dt$$

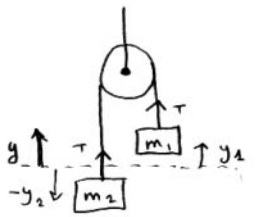
$$\int_{x'=0}^{x'} \frac{dx'}{x'^{1/2}} = \int_{t=0}^{t} \sqrt{2g\sin\theta}\,dt$$

$$2x'^{1/2} = \sqrt{2g\sin\theta}\,dt$$

$$x' = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$$

אם משתמשים בחוק שימור האנרגיה — מתקבלת משוואת תנועה מסדר ראשון ולא מסדר שני בזמן כפי שמתקבל אם משתמשים בכוחות.

דוגמא שניה: "מכונת אטווד" (Atwood Machine)



שתי מסות תלויות על חבל המונח על גלגלת חסרת חיכוך.

א. מה משוואות התנועה המתקבלות ע"י כוחות וע"י שימור אנרגיה?

ב. מה הפתרון אם הגלגלת מתחילה ממנוחה.

פתרון ע"י כוחות: הכח על מסה m_1:

$$\sum_i F_{1i} = m_1\ddot{r}_1$$

$i \to$ על הכוחות

הכוחות הם:

$$\vec{T} + m_1\vec{g} = m_1\ddot{r}_1$$

נסתכל על רכיב $\hat{y}$:

$$T - m_1 g = m_1\ddot{y}_1$$

באותו אופן מסה 2:

$$T - m_2 g = m_2\ddot{y}_2$$

אותה מתיחות T.

היות והחבל לא נמתח - אורכו נשמר, כמו כן, (נגדיר את המצב ההתחלתי כ- $y_1=y_2=0$)

ונקבל:

$$y_1 = -y_2 \Rightarrow \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$

ע"י השוואת ה-T בין המשוואות, נקבל:

$$m_1\ddot{y}_1 + m_1 g = T = m_2\ddot{y}_2 + m_2 g$$

$$= -m_2\ddot{y}_1 + m_2 g$$

לכן:

$$\ddot{y}_1 = \left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g \xrightarrow[\text{+ מהירות התחלתית=0}]{\text{אינטגרציה}} y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g t^2$$

בדיקה: אם המסות שוות אין תאוצה ✓ אם $m_2=0$, המסה m_1 נופלת נפילה חופשית ✓

פתרון ע"י שימור אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_1^2$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = (m_1-m_2) g y_1$$

$y_1=-y_2 ; \dot{y}_1=-\dot{y}_2$ כיוון

שימור אנרגיה:

$$E+U=\text{const} \longrightarrow \Delta E + \Delta U = 0$$

=0 אם מגדירים מצב התחלתי $y_1=0$.

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\Big(\dot{y}_1^2 + \underbrace{\dot{y}_1^2(0)}_{\text{=0 אם מתחיל ממנוחה}}\Big) + (m_2-m_1)\,g\,\big(y_1 - \overbrace{y_1(0)}\big) = 0$$

כאמור:

=0 אם מגדירים מצב התחלתי $y_1=0$

$$\dot{y}_1^2 = \overbrace{\dot{y}_1^2(0)} + 2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g\big(y_1 - \overbrace{y_1(0)}\big)$$

זהו משוואת התנועה משימור אנרגיה

נציב $\dot{y}_1(0)=0$, $y_1(0)=0$ ונקבל:

$$\frac{dy_1}{dt} = \sqrt{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g\, y_1}$$

ע"י הפרדת משתנים ואינטגרציה:

$$\int_{y_1=0}^{y_1} \frac{dy_1}{y_1^{1/2}} = \sqrt{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g} \int_{t=0}^{t} dt$$

ולכן:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g t^2$$

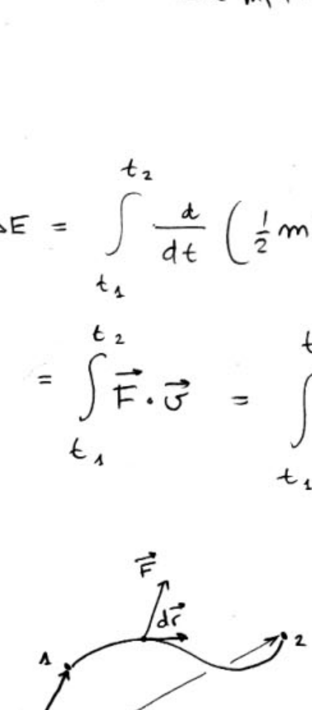
שימור אנרגיה בשלושה מימדים:

בין מצב 1 למצב 2:
(מסה קבועה).

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\overbrace{(\vec{v}\cdot\vec{v})}^{\vec{v}}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\cdot \underbrace{\frac{d(m\vec{v})}{dt}}_{\vec{F}} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_{\vec{r}_1(t_1)}^{\vec{r}_2(t)} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \underbrace{W}$$

העבודה שעשה
כח $\vec{F}$ על המסה.



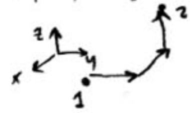
* מה זה אינטגרל מסלולי?

באינטגרל מסלולי, אנו הולכים על דרך
נתונה (ישנן אין סוף דרכים בין נקודה 1 ל-2! יש לציין איזו).
וסוכמים את האינטגרנד. במקרה שלנו:

על כל קטע $d\vec{r}$ לאורך הדרך, אנו סוכמים את $\vec{F}\cdot d\vec{r}$
כלומר הולכים dr וסוכמים את $\vec{F}\cdot d\hat{r}$ - הרכיב של $\vec{F}$ בכיוון
המסלול. ניתן להפריד את האינטגרל לרכיבים:

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

אם הולכים למשל במסלול:



כוחות משמרים:

העבודה שכח עושה על חלקיק נתונה ע"י:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ז"א אנו בוחרים את המסלול של החלקיק במסלול האינטגרל. לאורך המסלול אנו צריכים לסכום את הרכיב של $\vec{F}$ בכיוון המסלול. דוגמא פשוטה ביותר: כח קבוע:

$$W\Big|_{\vec{F}=const} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r}}_{} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

זה $\vec{F}$ קבוע הוא יכול לצאת מהאינטגרל.

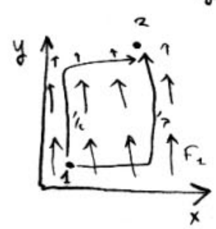
לסכום את קטעי הדרך $d\vec{r}$ $= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

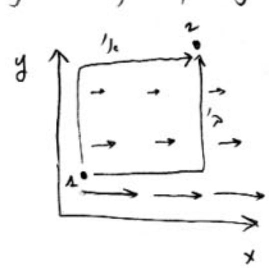
דוגמא נוספת, כח התלוי רק בקואורדינטה אחת והוא בכיוון אותה קואורדינטה:

$$\vec{F}_1 = F_y(y)\hat{y}$$

כח התלוי בקואורדינטה אחת ניצב לקואורדינטה הזאת:

$$\vec{F}_2 = F_x(y)\hat{x}$$

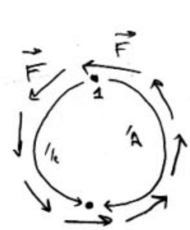




כאן ברור שהתרומה ל-W זהה בשני המסלולים: בחלק הראשון של מסלול ב' וחלק השני של מסלול א' התרומה ל-W אפס. בחלקי המסלול האחרים, התרומה זהה.

כאן W גדול במסלול ב' - מהתרומה מהחלק הראשון של המסלול. במסלול א' לעומת זאת התרומה בחלק המסלול הנע ימינה הוא קטן.

דוגמא נוספת:



עבור הכח המתואר בציור - ברור כי W חיובי עבור מסלול א' ואילו W שלילי עבור מסלול ב'. לחילופין, ניתן לראות שעבור מסלול סגור $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$ אינטגרל על מסלול סגור.

ז"א במקרה זה ברור כי המסלול חשוב לצורך האינטגרל ולכן אי אפשר לרשום אותו כהפרש של פונקציה בקצוות האינטגרל.

כדי לראות מה קורה בשני המקרים הראשונים, אנו צריכים לתאר את המסלול באופן כללי (צורה); נבחר לעשות זאת עם פרמטר s:

$$x = x(s),\quad y = y(s),\quad z = z(s)$$

כך ש- $\vec{r}_1$ מתקבל מ- $s=s_1$ ו- $\vec{r}_2$ מ- $s=s_2$. כיצד יראה האינטגרל?

$$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} = \left(\frac{dx}{ds}\hat{x} + \frac{dy}{ds}\hat{y} + \frac{dz}{ds}\hat{z}\right)ds$$

ולכן:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(F_x\frac{dx}{ds} + F_y\frac{dy}{ds} + F_z\frac{dz}{ds}\right)ds$$

* במקרה הראשון:

$$\vec{F}_1\cdot d\vec{r} = F_y(y)\frac{dy}{ds}\,ds$$

נבחר את הפרמטר s כ- y (זאת נוכל!):

$$= F_y(y)\,dy$$

את האינטגרל הזה ניתן לכתוב בעזרת פוטנציאל!

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}_1\cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2}F_y(y)\,dy \underset{\uparrow}{=} -(U_2 - U_1)$$

$$F_y(y) \equiv -\frac{dU(y)}{dy}$$

* במקרה השני:

היות והפונקציה היא פונקציה של y, נבחר שוב $s=y$:

$$\vec{F}_2\cdot d\vec{r} = F_x(y)\frac{dx}{ds}\,ds = F_x(y)\frac{dx}{dy}\,dy$$

כלומר:

$$W = \int_{y_1}^{y_2}F_x(y)\frac{dx}{dy}\,dy$$

אולם כעת, האינטגרנד מכיל את $\frac{dx}{dy}$, שגם הוא תלוי בדרך, ולא ניתן יהיה לכתוב אותו, בהכרח, כהפרש ערכים של פוטנציאל בקצה.

כח נשמר באופן כללי - ב- 3D:

כח משמר הוא כח שניתן לכתיבה בעזרת פוטנציאל:

$$U = U(x,y,z)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

"נגזרת חלקית" ← נגזרה לפי x ושמירה על הפרמטרים האחרים קבוע.

במקרה כזה:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)}ds$$

אולם, הביטוי בסוגריים הוא כלל השרשרת לפונקציה עם מספר משתנים:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\frac{dU}{ds}}\,ds$$

(נגזרת "שלמה" של U לפי s - נגזרת $U(x,y,z)$ לפי כל מה שתלוי ב- s.)

ולכן, במקרה כזה:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{s_1}^{s_2}\frac{dU}{ds}\,ds = -\left(U(s_2) - U(s_1)\right)$$

2.11.04

הפעולה :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right) = -\vec{\nabla} U$$

נקראת גרדיאנט. היא נותנת מפונקציה U וקטור שכיוונו השיפוע הגדול ביותר וגודלו גודל השיפוע (כמו נגזרת רגילה).

האופרטור $\vec{\nabla}$ נקרא נַבְּלָה (nabla) והוא כמו וקטור הנראה :
או דֶּל (del)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

פעולות נוספות שניתן לעשות עם האופרטור :

דיברגנס :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

ורוטור (rotor) או קֶרְל (curl) :

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

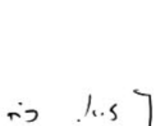
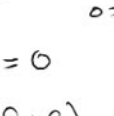
שדה משמר הוא שדה שניתן לכתיבה כ- $F = -\vec{\nabla}U$ (כי אז האינטגרל של העבודה תלוי רק בערכי קצה). אם אכן ניתן לכתבו בצורה כזו, למה שווה הרוטור של השדה F?

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} \underset{\text{שדה משמר}}{=} -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}U \underset{\text{הצבה הגדרה של } \vec{\nabla}}{=} -\underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}\right)}_{\text{נגזרות הינן חלופיות ולכן } =0}\hat{x} - \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\right)}_{0}\hat{y}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}\right)\hat{z} = 0$$

[ז.א. כח התלוי רק בקואורדינטות (לא למשל במהירות) יהיה כח הנגזר משדה משמר אם ורק אם $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$]

אינטואיטיבית, פעולת הרוטור נותנת לנו את מידת העירבוליות של שדה $\vec{F}$:

 - שדה עם עירבוליות  - שדה ללא עירבוליות.