האוניברסיטה העברית בירושלים
The Hebrew University of Jerusalem

פרופ׳ אליהו פרידמן

ד״ר ניר שביב

<u>מכניקה ויחסות פרטית 77100/77101</u>

מועד ב׳ תשס״ה

החוג לפיסיקה
מכון רקח לפיסיקה

Physics Curriculum
Racah Institute of Physics

- המבחן ללא חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
  - 2 דפי נוסחאות (4 עמודי A4) כתובים בכתב יד.
  - מחשבון
  - חוברת אינטגרלים או ספר עזר במתמטיקה (Mathematical Handbook)

- משך הבחינה 3 שעות.

- **נא לכתוב בעט ועל צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים. אנא, <u>זכרו</u> את מס׳ המחברת.**

- בבחינה 2 חלקים: בחלק א׳ יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות. (60 נק׳)
  בחלק ב׳ יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. (40 נק׳)

ב ה צ ל ח ה !!!

קרית אדמונד י׳ ספרא
גבעת רם
ירושלים 91904
טלפון: 02-6584541
פקס: 02-6584437

Edmond J. Safra campus
Givat Ram
Jerusalem 91904, Israel
Tel. 972-2-6584541
Fax. 972-2-6584437
shoshanabu@savion.huji.ac.il

האוניברסיטה העברית בירושלים
The Hebrew University of Jerusalem

חלק א'

החוג לפיסיקה
מכון רקח לפיסיקה

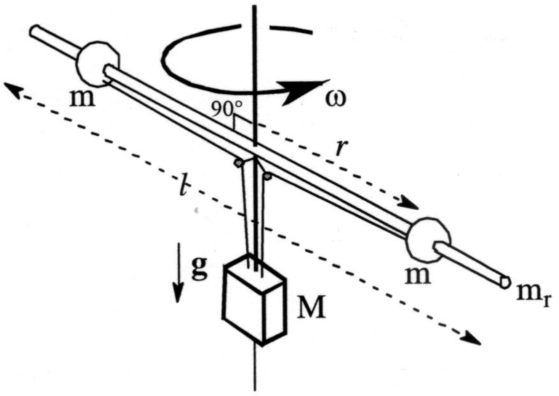
Physics Curriculum
Racah Institute of Physics

1. נתונות שתי מסות m, M הנעות בהשפעת כח הגרביטציה הפועל ביניהן.

א. נתון שהמרחק בין שתי המסות הוא קבוע וערכו r_0. הוכיחו שבמצב זה האנרגיה הקינטית של התנועה היחסית למרכז המסה שווה למינוס חצי האנרגיה הפוטנציאלית.

ב. רוצים להפריד בין המסות ע"י הוספת מהירות לתנועה היחסית. חשבו את התוספת המינימלית שיש לספק למהירות (1) אם ההאצה היא בכוון משיקי. (2) אם ההאצה היא בכוון רדיאלי. הניחו האצה רגעית חזקה. לאיזה מקרה יש עדיפות מבחינה טכנית? לאיזה מקרה יש עדיפות מבחינת השקעת אנרגיה?

2. נתונה המערכת הבאה (כפי שראינו בהדגמות). מוט בעל מסה m_r ואורך ℓ **חופשי** להסתובב סביב ציר שניצב לו. על המוט ישנן שתי מסות m הקשורות בצורה סימטרית למסה M התלויה בתחתית המוט בעזרת גלגליות חסרות מסה. בבעיה אין כל חיכוך.

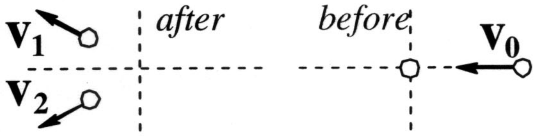


א. אם רוצים לתאר את המערכת כבעיה חד מימדית (עם r המשתנה היחידי), מהו הפוטנציאל האפקטיבי שלה? מה המסה האפקטיבית? ציירו איכותית כיצד נראה הפוטנציאל האפקטיבי.

ב. רשמו משוואה דיפרנציאלית ל-dr/dt. למה שווים קבועי התנועה L ו-E כתלות בתנאי ההתחלה r_0 ו- ω_0, אם משחררים את המסה M ממנוחה?

ג. מהו התנאי על ω_0 כך שהמסות תוכלנה להגיע אל המרכז?

3. פרוטון יחסותי עם אנרגיה קינטית E_k מתנגש אלסטית בפרוטון שבמנוחה. כתוצאה מההתנגשות הפרוטונים נעים סימטרית ביחס לכיוון התנועה של הפרוטון ההתחלתי $\left(|\mathbf{v}_1|=|\mathbf{v}_2|\right)$. חשבו את הזווית בין וקטורי המהירויות של הפרוטונים. השוו עם המקרה הלא יחסותי.

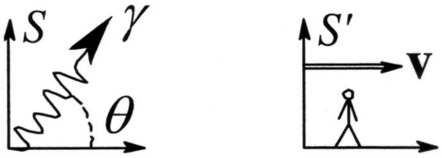


קרית אדמונד י' ספרא
גבעת רם
ירושלים 91904
טלפון: 02-6584541
פקס: 02-6584437

Edmond J. Safra campus
Givat Ram
Jerusalem 91904, Israel
Tel. 972-2-6584541
Fax. 972-2-6584437
shoshanabu@savion.huji.ac.il

האוניברסיטה העברית בירושלים
The Hebrew University of Jerusalem

חלק ב'

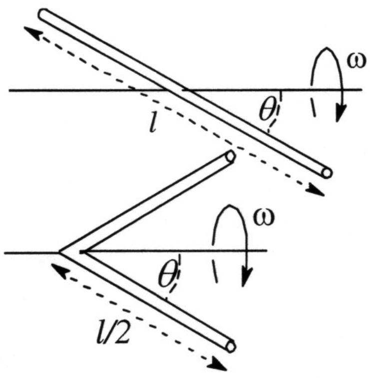


1. במערכת S נתון חלקיק γ (פוטון) בעל $m=0$ ואנרגיה E הנע בזוית θ ביחס לכיוון **v** , שהיא המהירות של S' ביחס ל- S. חשבו את האנרגיה של החלקיק כפי שנראית לצופה הנמצא במנוחה ב- S'.

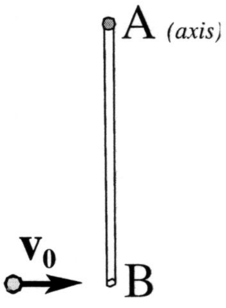
החוג לפיסיקה
מכון רקח לפיסיקה

Physics Curriculum
Racah Institute of Physics

2. קופסא מכילה מסה m המחוברת בעזרת שני קפיצים k לדפנות הקופסא. מזיזים את הקופסה ימינה ושמאלה בצורה הרמונית לפי: $\xi = A\,\mathbf{sin}(\Omega t)$. על המסה פועל כח חיכוך $F_d = -\alpha\dot{x}$ (x – הקואורדינטה של המסה m). תחת הקירוב שהמקדם חיכוך α קטן $\left(\alpha << \sqrt{km}\right)$ מהי האמפליטודה המקסימלית (שוב, בקירוב) של התנודות של המסה m ביחס ל-A, כתלות ב- Ω?



3. נתונה המערכת המתוארת בציור: מוט המסתובב במהירות זויתית ω סביב ציר הנטוי בזוית θ יחסית לציר המוט.
   א. למה שווה התנע הזוויתי $L_\perp$ ו- $L_\parallel$? (הרכיב שבכיוון ציר הסיבוב והרכיב שבכיוון ניצב.)
   ב. מה התשובות אם המערכת היתה נראית כבציור השני?



4. מוט דק AB שאורכו L ומסתו m מונח על שולחן אופקי חלק ויכול להסתובב סביב ציר אנכי, חסר חיכוך, העובר דרך הקצה A של המוט. קליע שמסתו m גם כן נע במהירות v_0 בכיוון ניצב למוט, פוגע בקצה B של המוט ונשאר צמוד לקצה לאחר הפגיעה. מה מהירות הקליע לאחר הפגיעה?

קרית אדמונד י' ספרא
גבעת רם
ירושלים 91904
טלפון: 02-6584541
פקס: 02-6584437

Edmond J. Safra campus
Givat Ram
Jerusalem 91904, Israel
Tel. 972-2-6584541
Fax. 972-2-6584437
shoshanabu@savion.huji.ac.il

5. האם תתכן מהירות שונה ממהירות האור שגודלה ישמר לאחר ביצוע הטרנספורמציה של לורנץ? הוכיחו את התשובה.

א1

פתרון

א. $U=-G\frac{mM}{r_0}$ והאנרגיה הקינטית של התנועה המעגלית $K=\frac{1}{2}m\dot{\underline{r}}^2$

אבל עבור מרחק נתון $\dot{\underline{r}}=r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ ולכן $K=\frac{1}{2}m r_0^2\dot{\varphi}^2$.

הכח הצנטריפטאלי $m r_0\dot{\varphi}^2$ מסופק בדיוק ע"י המשיכה,

$$m r_0\dot{\varphi}^2=G\frac{mM}{r_0^2}.$$

ולכן נוכל לרשום מתוך $m r_0\dot{\varphi}^2=\frac{2K}{r_0}$ את הקשר $\frac{2K}{r_0}=G\frac{mM}{r_0^2}$

כלומר $\underline{\underline{K=-\frac{1}{2}\left(-G\frac{mM}{r_0}\right)}}$

ב. צריך להכפיל את האנרגיה הקינטית כדי להגיע להפרדה, בה $E=K+U=0$.
בדרך (1) – הדחיפה משיקית, יש להכפיל את המהירות פי $\sqrt{2}$ כלומר להוסיף $(\sqrt{2}-1)$ מהמהירות הקיימת, תוספת של כ- 41%!
בדרך (2) יש להוסיף מהירות רדיאלית שתהיה שווה למהירות המשיקית הקיימת (100%).
שתי הדרכים זהות מבחינה אנרגטית. הדחיפה משיקית עדיפה בהרבה באופן טכני.

(זאת מפני שהדחיפה משיקית דורשת שינוי של Δ קטן יותר. משמעות הדבר היא שיש להשתמש בפחות גז להנעה רקטית – ופחות אנרגיה או בזבוז של האנרגיה של המערכת, כולה הגז).

א2

א) בהינתן r ו-ω אנו נדרשים לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית והאנרגיה הקינטית של המערכת.

$$E_{pot} = Mgr$$

(כשהגדרנו את מישור האפס בנקודה בה $r=0$). האנרגיה הקינטית מורכבת מתנועת המסות ומתנועת המוט, ומתנועת המסה M.

$$E_{kin,M} = \frac{1}{2}M\dot{r}^2$$

$$E_{kin,rod} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \left(I = \frac{1}{12}M_r l^2\right)$$

$$E_{kin,2m} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right) = m\dot{r}^2 + mr^2\omega^2$$

שימור אנרגיה נותן:

$$E_{TOT} = const = E_0$$

$$Mgr + \frac{1}{4}M\dot{r}^2 + m\dot{r}^2 + mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = const$$

נבודד את $\dot{r}$:

$$\frac{1}{2}(M+2m)\dot{r}^2 + Mgr + mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = const$$

כעת ניתן להשתמש בשימור תנע זוויתי על מנת למצוא את $\omega(r)$:

$$L = const = I\omega + 2mr^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{I+2mr^2}$$

נציב במשוואה של שימור אנרגיה:

$$\frac{1}{2}(M+2m)\dot{r}^2 + Mgr + \left(mr^2 + \frac{1}{2}I\right)\frac{L^2}{(I+2mr^2)^2} = E_{TOT}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(M+2m)}_{M_{eff}}\dot{r}^2 + \underbrace{Mgr + \frac{1}{2}\frac{L^2}{(I+2mr^2)}}_{V_{eff}(r)} = E_{TOT}$$

ב. משוואה דיפרנציאלית מתקבלת מהמשוואה הקודמת:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2\left(E_{TOT} - V_{eff}(r)\right)}{M_{eff}}} = \sqrt{\frac{2\left(E_{TOT} - Mgr - \frac{1}{2}\frac{L^2}{I+2mr^2}\right)}{M+2m}}$$

תנאי ההתחלה הם r_0 ו- ω_0 וגם: $\dot{r}_0 = 0$.

מהביטוי לתנע הזוויתי:

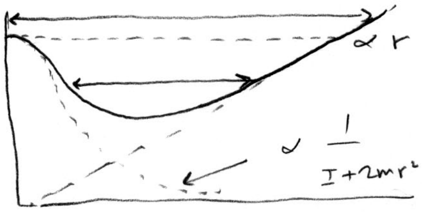
$$L = \left(I + 2mr_0^2\right)\omega_0$$

$$E_{TOT} = Mgr_0 + \frac{1}{2}\frac{\left(I+2mr_0^2\right)^2}{\left(I+2mr_0^2\right)}\omega_0^2 + \underbrace{0}_{\text{אנרגיה קינטית רדיאלית}}$$

(כי $\dot{r}_0=0$).

$$E_{TOT} = Mgr_0 + \frac{1}{2}\left(I + 2mr_0^2\right)\omega^2$$

ד. התנאי האפשרי למטה להגיע למרכז הוא שהאנרגיה הפוטנציאלית האפקטיבית במרכז תהיה קטנה יותר מהאנרגיה הכוללת בהתחלה כך שהמוקד יקבל ב- $r=0$ אנרגיה קינטית סופית. הגבול הוא שהאנרגיה הפוטנציאלית במרכז שווה לאנרגיה ההתחלתית.



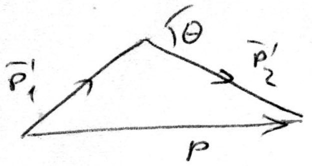
$$E_{TOT} > V_{eff}(r=0) \Rightarrow Mgr_0 + \tfrac{1}{2}\left(I+2mr_0^2\right)\omega_0^2 > \frac{1}{2}\frac{L^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{\left(I+2mr_0^2\right)^2\omega_0^2}{I}$$

$$Mgr_0 > \frac{1}{2I}\left(I^2 + 2mr_0^2\right)\left(\cancel{I} + 2mr_0^2 - \cancel{I}\right)\omega_0^2$$

$$\omega_0^2 < \frac{Mgr_0\, 2I}{\left(I^2 + 2mr_0^2\right)2mr_0^2}$$

אם $I \to 0$ לא ניתן להגיע אל המרכז. אחרת, אם ω_0 סופי וקטן מהערך הנ"ל ניתן להגיע

3א



$$p^2 = 2p'^2 + 2p'^2\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{p^2}{2p'^2} - 1$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2} = \sqrt{\frac{(mc^2 + E_k)^2}{c^2} - m^2c^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{m^2c^4 + 2mc^2E_k + E_k^2}{c^2} - m^2c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}$$

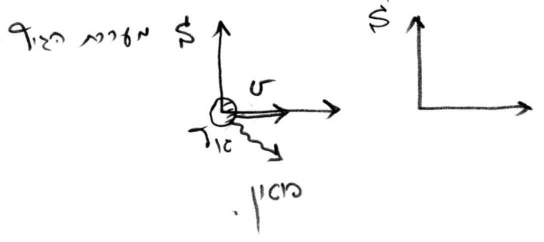
$$\frac{p^2}{p'^2} = \frac{E_k(E_k + 2mc^2)}{E_k'(E_k' + 2mc^2)} \Rightarrow \left(E_k' = \frac{1}{2}E_k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\,\frac{E_k(E_k + 2mc^2)}{E_k(E_k + 4mc^2)}$$

$$\cos\theta = \frac{E_k}{E_k + 4mc^2} \Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$$

במקרה לא רלטיביסטי $\theta = \frac{\pi}{2}$

נסובב את המערכות כך שהתנועה היחסית תהיה בכיוון ציר $\hat{x}$. במקרה כזה



ה-4-תנע של הפוטון הוא:

$$p = (p_x, p_y, p_z, E/c) = \left(\frac{E}{c}\cos\alpha, -\frac{E}{c}\sin\alpha, 0, E/c\right)$$

הטרנס' של וקטור זה למערכת S' נתונה:

$$E' = \gamma(E + \beta c p_x) = \gamma\left(E + \beta \cancel{c} \frac{E}{\cancel{c}}\cos\alpha\right)$$

הסימן הוא "+" כי המהירות היחסית של S' ויחסית ל-S' היא $-v$.

$$E' = \frac{1+\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} E$$

$$\beta \equiv v/c$$

$$L_{\parallel} = \omega \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 = \omega \int_{\xi=-L/2}^{\xi=L/2} \underbrace{\frac{M}{L} d\xi}_{\text{מסה}} \cdot \xi^2 \sin^2\theta = \quad \int x^2 = x^3/3$$

מסה של אלמנט אורך.

$$L_{\parallel} = \omega \frac{1}{12} M L^2 \sin^2\theta$$

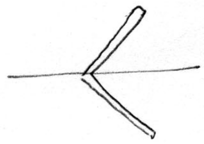
$$\vec{L}_{\perp} = \sum_i \vec{r}_{\parallel} \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i,\perp})$$

$$L_{\perp} = \omega \int_{\xi=-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} d\xi \cdot \xi^2 \cos\theta \sin\theta =$$

אם נרשום: $r_{\parallel} = \xi \cos\theta$

$r_{\perp} = \xi \sin\theta$

$$= \frac{\omega}{12} M L^2 \sin\theta \cos\theta$$

אם בנים מערכת  הביטוי ל- $L_{\parallel}$ יהיה זהה (כי מעניין את $L_{\parallel}$ מה הרכיב ה-$\parallel$ של r של אלמנט בנפרד). לעומת זאת, ערכו $L_{\perp}$ יקבל 0. זאת מפני שכעת, חצי מן האלמנטים יקבלו $r_{\parallel} \to -r_{\parallel}$ כך שהתרומה ל- $L_{\perp}$ הכוללת תתאפס.

במערכת הקפסולה, שאינה אינרציאלית, פועל כוח מדומה על המסה

$$F_F = -m\ddot{\xi} = Am\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

כעת! יש לנו בעיה של אוסצילטור מאולץ. קבוע הקפיץ האפקטיבי היא התוצאה של חיבור שני קפיצים במקביל (להסחה נתונה Δx, הכוח הוא לא $-k\Delta x$ אלא $-2k\Delta x$) ולכן קבוע הקפיץ האפקטיבי הוא $2k$.

האמפליטודה של תנודות מאולצות עם כוח חיצוני הרמוני הוא:

$$\underbrace{A_p}_{\text{מהפתרון הפרטי}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k_{eff} - m\Omega^2)^2 + \Omega^2\alpha^2}}$$

כעת, התדירות בה האמפליטודה תהיה מקסימלית בקירוב הוא:

$$k_{eff} = m\Omega^2 \Rightarrow \Omega^2 = \frac{k_{eff}}{m} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

האמפליטודה תהיה בקירוב:

$$A_p \approx \frac{F_0}{\Omega\alpha} = \frac{Am\Omega^2}{\Omega\alpha} = A\frac{\sqrt{2km}}{\alpha}$$

היות ועבדנו במערכת הקפסולה, זוהי האמפליטודה יחסית לקפסולה. יחסית למעבדה יש להוסיף את התנועה ההרמונית (של הדרך באותו הפאזה).

משימור תנע זוויתי: $I\omega = m v_0 L$

כאשר I הוא מומנט ההתמדה של המוט + הקליע שנדבק לקצה המוט.

$$I = \frac{mL^2}{3} + mL^2 = \frac{4}{3}mL^2$$

לכן:

$$\omega = \frac{m v_0}{I} L = \frac{3 v_0}{4L}$$

$$v = \omega L = \frac{3}{4} v_0$$

נניח שיש מהירות כזאת u^*. נבצע טרנספורמציות לורנץ במהירות V בכיוון של u^*, ונקבל

$$u^{*\prime} = \frac{u^* - V}{1 - \frac{Vu^*}{c^2}}$$

ונבדוק האם יתכן $u^* = u^{*\prime}$.

נציב ונקבל

$$u^*\left(1 - \frac{Vu^*}{c^2}\right) = u^* - V$$

נפתח סוגריים

$$u^* - V\left(\frac{u^*}{c}\right)^2 = u^* - V$$

ומכאן

$$\left(\frac{u^*}{c}\right)^2 = 1$$

כלומר התשובה היא לא.

אם היתה מהירות שמקיימת את התנאי המבוקש היא היתה צריכה לקיים גם את המקרה הפרטי של טרנס' בכיוון המהירות. היות ואין מהירות שמקיימת את המקרה הפרטי ברור שלא תהיה מהירות שמקיימת טרנס' יותר כללית.