19.10.2004

הקדמה מתמטית

סקלרים וקטורים:
* הגדרה, סימון
* פעולות בוקטורים – חיבור, מכפלה, תכונות.
* גזירה ואינטגרציה של וקטורים.
* מערכות צירים – קרטזית, פולרית, גלינדרית.

סקלר: גודל פיסיקלי המוגדר בעזרת "גודל" בלבד, ללא כיוון (מסה, אנרגיה)

וקטור: גודל פיסיקלי המוגדר בעזרת "גודל" וכיוון. שימו לב כי המיקום של הוקטור (למשל היכן כח פועל או היכן המכונית בעלת המהירות הנתונה אינם חלק מוקטור הכח או וקטור המהירות).

(דוגמאות: כח, מהירות, תנע ומיקום – כחלק מוקטור מיקום).

ניתן להגדיר בנוסף:

פונקציה וקטורית (שדה וקטורי): פונקציה המחזירה גודל וקטורי בכל נקודה במרחב (לדוגמא: שדה כבידה, שדה חשמלי, מהירות הזרימה בנוזל וכו'...).

פונקציה סקלרית: פונקציה המחזירה בכל נקודה במרחב גודל בלבד (לדוגמא, לחץ בשדה זרימה, צפיפות אנרגיה בשדה חשמלי).

סימונים:

סקלר: "סתם" אות a, k וכו'.. (בספרים, אות ב- italics).

וקטור: $\underline{A}$, $\vec{A}$ (מספרים אות ב- bold).

הגודל של וקטור: $A \equiv |\vec{A}|$

וקטור יחידה בכיוון $\vec{A}$: (וקטור שאורכו 1 וכיוונו $\vec{A}$): $\hat{A}$

מתקיים כמובן:

$$|\hat{A}| = 1$$

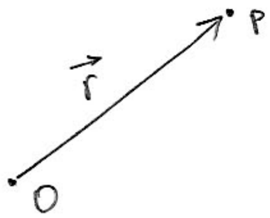
$$\vec{A} = \hat{A}|\vec{A}|$$

הערה: סקלרים וקטורים הם סוגים פרטיים של טנסורים (סקלר - גודל 0 מימדי", וקטור 1 מימדי, מטריצה - ואותה תבנית עד מספר שרוצים, גודל דו-מימדי וכו').

רק לידע כללי!

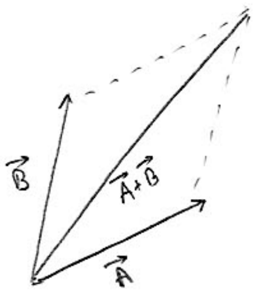
19.10.2004

<u>וקטור המקום:</u> $\vec{r}$ הוא וקטור המחבר בין ראשית הצירים (מסומנת בדרך כ- O) לבין מקום נקודה נתונה P.



חיבור וקטורים:

חיבור מוגדר ע"י האלכסון של המקבילית המתקבלת כששני הוקטורים יוצאים מאותה הנקודה, כמתואר בציור.

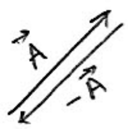


ניתן לראות מהציור כי $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$. דהיינו,

<u>חיבור וקטורי הוא קומוטטיבי = חילופי</u>

חיסור וקטורי:

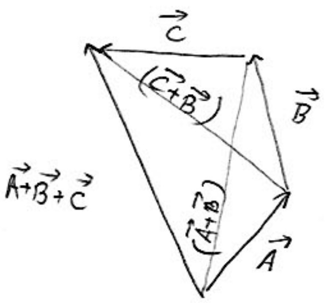
$-\vec{A}$ מוגדר כוקטור $\vec{A}$ עם אותו הגודל אך כיוון הפוך.



ברור מהציור כי: $\vec{A}+(-\vec{A})=0$

<u>אסוציאטיביות:</u> חיבור וקטורי מקיים:

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$



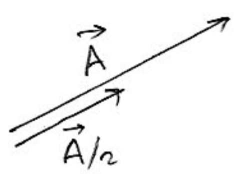
זאת ניתן לראות מהציור.

הכפלה בסקלר:

הכפלת וקטור בסקלר נותנת וקטור חדש באותו הכיוון אך הגודל מוכפל בערך הסקלר.

גודל שלילי ← כיוון הפוך.

$$(-1)\vec{A}=-\vec{A}$$



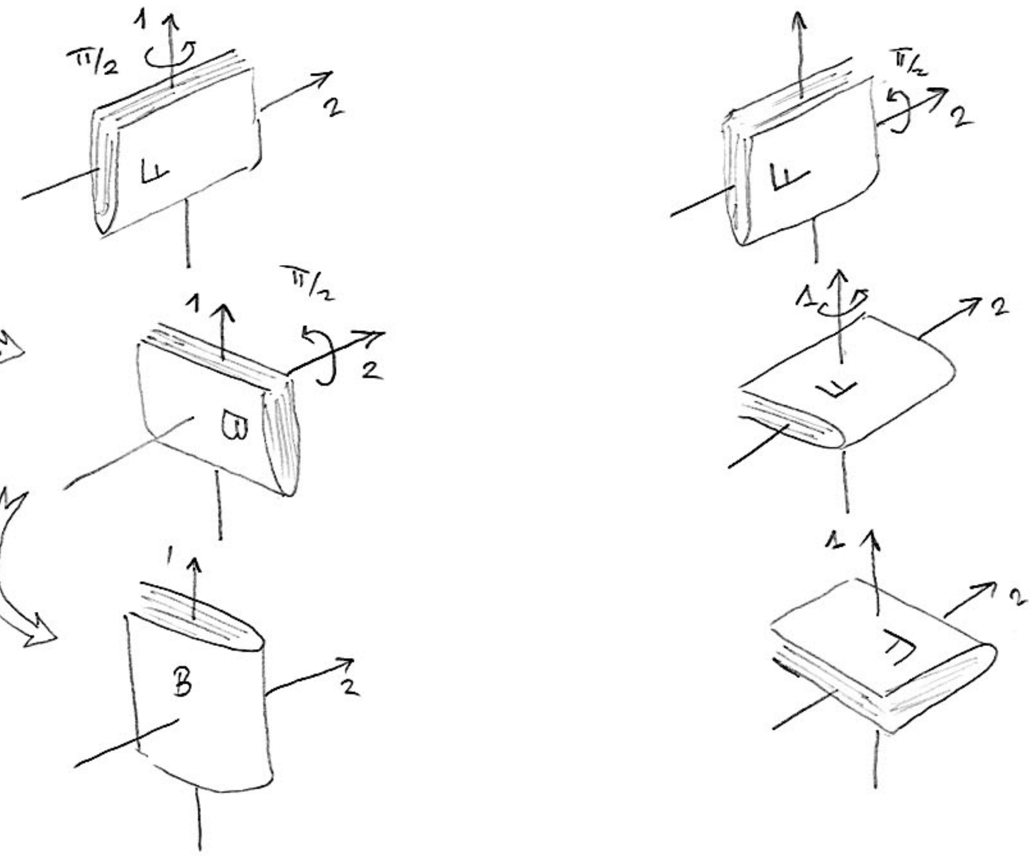
דוגמאות לוקטורים

* הסחה (displacement) מקיימת את התנאים לוקטורים (סכום הסחות לפי חוק המקבילית וכו').

* כנ״ל גם כוחות (ראה הדגמה בכיתה).

דוגמאות לגדלים שאינם וקטורים:

* סיבובים סופיים במרחב - ניתן להגדיר סיבוב ע״י כיוון (ציר סיבוב) וגודל (זוית הסיבוב). אולם הסיבובים אינם חילופיים ולכן לא ניתן לתארם ע״י וקטור. נסובב ספר, פעם סביב ציר 1 ואח״כ ציר 2 ופעם בסדר הפוך:



סיבוב סביב ציר 1 ואח״כ סביב 2.

* <u>קיטוב של אור</u>: היות ואור מקוטב בכיוון אחד או בכיוון ההפוך, הוא אותו המצב קיטוב אינו מתנהג כמו וקטור.

$\leftrightarrow$ $\updownarrow$

שני המצבים: מצב 1 מצב 2.

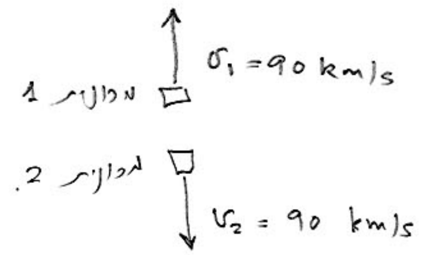
<u>הערה לידע כללי</u>: קיטוב חוזר לאותו המצב לאחר סיבוב ב $180°$. וקטור חוזר לאותו המצב לאחר סיבוב ב $360°$. ספינור חוזר לאחר $720°$...

חיבור וקטורי – דוגמאות

1. נתון גוף הפועל עליו כוח של 5 דין ימינה ו 5 דין שמאלה. מהו הכוח הכולל?

<u>תשובה</u>: היות וכוח הוא וקטור יש לסכום את הכוחות בדרך וקטורית.
הוקטורים $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ שווים בגודלם אך מנוגדים בכיוונם ולכן: $\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$.

2. מכונית נעה צפונה במהירות של 90 קמ"ש ומכונית נוספת נעה דרומה במהירות של 90 קמ"ש. מהי המהירות היחסית של המכונית הראשונה יחסית למכונית השניה?



<u>תשובה</u>:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

(בדיקה - אם $\vec{v}_2$ היה באותו כיוון של $\vec{v}_1$, לא היתה מהירות יחסית! אם $\vec{v}_2=0$, המהירות היחסית היא מהירות המכונית הראשונה).

היות ו- $v_2=v_1$ (<u>גודל</u> זהה) מתקבל:

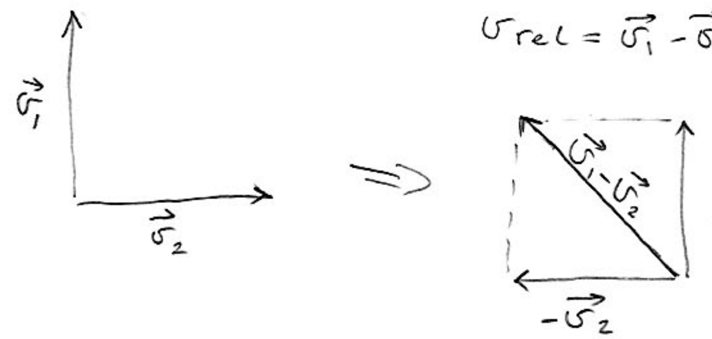
$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_1 = 2\vec{v}_1$$

המהירות היחסית של מכונית 1 יחסית למכונית 2 היא 180 קמ"ש צפונה.

3. כנ"ל, רק שמכונית 2 נעה מזרחה ב- 90 קמ"ש.

<u>תשובה</u>:

$$v_{rel} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$



נשרטט את $\vec{v}_1-\vec{v}_2$.
אנו רואים כי נוצרת מהירות יחסית של

$$|\vec{v}_{rel}| = \sqrt{2}\cdot 90 \text{ km/s} = 127.3 \text{ km/s}$$

כיוונה הוא צפון - מערב. (מכונית 2 תראה את מכונית 1 נעה בכיוון צפון מערב).

מכפלות בין וקטורים:

ישנן מספר דרכים להגדיר מכפלה בין וקטורים. שתי המכפלות השימושיות ביותר הינן המכפלה הסקלרית (בה מתקבל סקלר המכפלה בין הוקטורים) והמכפלה הוקטורית בה התוצאה היא וקטור.

אנו רוצים להגדיר מכפלה שתקיים מספר חוקים בסיסיים. חשוב, מכפלה שתהיה פילוגית, כלומר ש- $\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C})$ יהיה $\vec{A}*\vec{B}+\vec{A}*\vec{C}$ (כאשר "*" הינה המכפלה שלנו.

דוגמא להגדרה שאינה מקיימת את זה ולכן אינה שימושית היא: $\vec{A}*\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|$

כדי לראות ש- $\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C})\neq\vec{A}*\vec{B}+\vec{A}*\vec{C}$ כל שיש לעשות הוא להסתכל על המקרה בו $\vec{B}=-\vec{C}$ במקרה זה:

$$\vec{A}*(\vec{B}+\vec{C})=0$$
$$\vec{A}*\vec{B}+\vec{A}*\vec{C}=2|\vec{A}||\vec{B}|$$

המכפלה הסקלרית:

המכפלה הסקלרית בין $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ מוגדרת כגודל $\vec{A}$ כפול גודל $\vec{B}$ כפול קוסינוס הזווית ביניהם:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\equiv|\vec{A}||\vec{B}|\cos\underbrace{(\vec{A},\vec{B})}_{\text{הזווית בין }\vec{A}\text{ ו-}\vec{B}}$$

* ראשית, אנו רואים שמערכת הצירים אינה מעורבת בהגדרה.
* שנית, היות ו- $\cos(\vec{A},\vec{B})=\cos(\vec{B},\vec{A})$ (קוסינוס זווית זהה לקוסינוס מינוס הזווית) נקבל כי:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

נוכיח את הפילוגיות של המכפלה עוד מעט.

לפני כן, נסתכל על עוד מספר תכונות.

מכפלה של וקטור בעצמו:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}||\vec{A}|\underbrace{\cos(\vec{A},\vec{A})}_{=1}=A^2$$

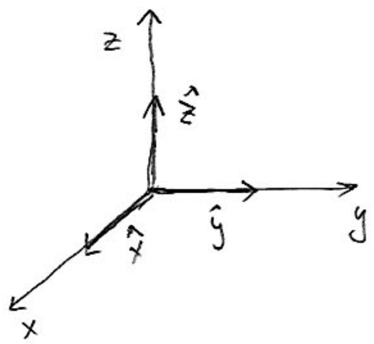
כי הזווית בין A לעצמו היא 0 ו- $\cos(0)=1$.

דהיינו, מכפלת וקטור בעצמו נותנת את גודלו בריבוע.

19.10.04

רכיבי וקטור במערכת קרטזית, וקוסינוסי הכיוון

מערכת הצירים הקרטזית היא המערכת הפשוטה ביותר. היא מוגדרת ע"י שלושה כיוונים קבועים ואורתוגונליים (ניצבים זה לזה):



ניתן להגדיר וקטורי יחידה בכיון הצירים $\hat{x}$, $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$.

היות ומדובר בוקטורי יחידה, מתקבל:

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$

היות והצירים ניצבים זה לזה, מתקבל:

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$$

ניתן לרשום כל וקטור בצורה:

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

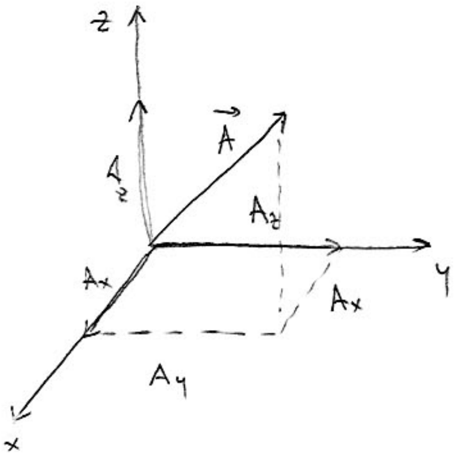
מה המשמעות של כל איבר?

$$(\vec{A}\cdot\hat{x}) = A_x\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{x})}_{1} + A_y\underbrace{(\hat{y}\cdot\hat{x})}_{0} + A_z\underbrace{(\hat{z}\cdot\hat{x})}_{0} = A_x$$

ז"א A_x הוא ההיטל של $\vec{A}$ בכיון $\hat{x}$ (כפול הגודל של $\hat{x}$, אך זה שווה ל 1).
A_x נקרא רכיב A בכיון x, או רכיב x של A.
כיצד קשור גודל A לרכיביו?

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} = \sqrt{(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\cdot(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})}$$

$$= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



מכפלה סקלרית בעזרת הרכיבים:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\cdot(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z})$$

$$= A_xB_x\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{x})}_{1} + A_xB_y\underbrace{(\hat{x}\cdot\hat{y})}_{0} + \dots$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

<u>וקטורים מאונכים:</u> אם $|\bar{A}|\neq 0$ וגם $|\vec{B}|\neq 0$ אזי התנאי $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ פירושו ש- $\cos(\bar{A},\bar{B})=0$ ז.א. הזוית היא $\frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2}$ והוקטורים ניצבים זה לזה.

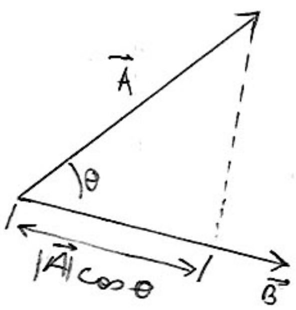
<u>שאלה:</u> נתונים שני וקטורי יחידה $\hat{a}$ ו- $\hat{b}$ כך ש- $\hat{a}\cdot\hat{b}=-1/2$.
מה הזוית ביניהם?

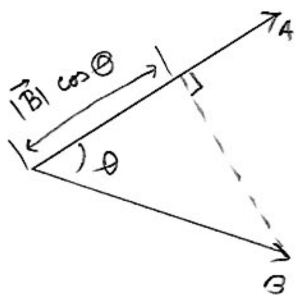
<u>תשובה</u>

$$\hat{a}\cdot\hat{b}=\underbrace{|\hat{a}||\hat{b}|}_{=1}\cos(\hat{a},\hat{b})=-1/2$$

$$\cos(\hat{a},\hat{b})=-1/2 \Rightarrow (\hat{a},\hat{b})=\cos^{-1}(1/2)=\frac{2\pi}{3}\quad(=120^\circ)$$

<u>משמעות המכפלה הסקלרית.</u>





משני הציורים בצד שמאל, ניתן לראות שהגודל:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=|\vec{B}|\cdot(|\vec{A}|\cos\theta)$$

הוא למעשה היטל של $\vec{A}$ על $\vec{B}$ כפול הגודל של $\vec{B}$. או, היטל של $\vec{B}$ על $\vec{A}$ כפול הגודל של $\vec{A}$:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|(|\vec{B}|\cos\theta)$$

<u>פעולה הפוכה למכפלה סקלרית:</u> אין ~~פי~~אין משמעות לחלוקה בוקטור. למשל אם יודעים את $\vec{B}$ ואת $\vec{A}\cdot\vec{B}$ לא ניתן לדעת את $\vec{A}$ היות וישנם הרבה (אין סוף) אפשרויות ל- $\vec{A}$ לתת את ה- $\vec{A}\cdot\vec{B}$ הנתון.

פילוגיות ש' מכפלה וקטורית:

נחשב את $\bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{A}\cdot\bar{C}$ וגם את $\bar{A}\cdot(\bar{B}+\bar{C})$ ונראה שהללו זהים.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$

מצד שני:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = A_x(B_x+C_x) + A_y(B_y+C_y) + A_z(B_z+C_z)$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z + A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

ומשפט הקוסינוסים:

נסתכל על הוקטור $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$ ונכפיל בעצמו: $\vec{C}\cdot\vec{C}=(\vec{A}-\vec{B})(\vec{A}-\vec{B})$

בעזרת הפילוגיות $c^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{B} = A^2+B^2-2\vec{A}\cdot\vec{B}$

אולם זה בדיוק משפט הקוסינוסים הידוע מטריגונומטריה:

$$A^2+B^2-2AB\cos\underbrace{\theta}_{\text{הזוית בין A ל-B}} = c^2$$

כמו כן, ניתן לכתוב ביטוי עבור θ:

$$\cos\underbrace{\theta}_{\text{הזוית בין A ל-B}} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

19.10.04

תרגיל:

1. נתון הוקטור $\vec{A} = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$.

א. מצא את אורכו של $\vec{A}$.

ב. מהו אורך היטלו של $\vec{A}$ על מישור xy?

ג. בנה וקטור במישור xy שיהיה ניצב ל- $\vec{A}$.

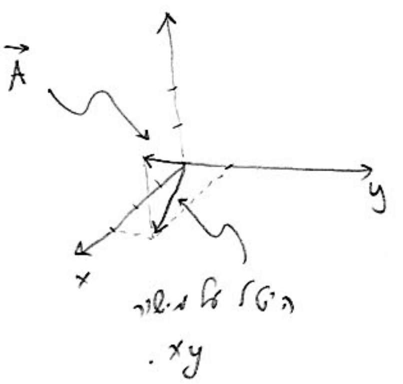
ד. מצא וקטור יחידה בכיוון הוקטור מסעיף ג'.

פתרון:

א. אורכו של A נתון ע"י:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

ב. ההיטל על xy (נקרא לו $\vec{B}$) נתון ע"י:



$$\vec{B} = \vec{A} - (\vec{A}\cdot\hat{z}) = 3\hat{x} + \hat{y}$$

פירוש הרכיב בכיוון ציר $\hat{z}$.

אורכו:

$$|\vec{B}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

ג. אני רוצה למצוא וקטור $\vec{C}$ שיהיה ניצב ל- $\vec{A}$, צ"ל, $\vec{A}\cdot\vec{C} = 0$.
כמו כן, $\vec{C}$ נמצא במישור xy, ולכן יש לו את הצורה:

$$\vec{C} = C_x\hat{x} + C_y\hat{y}$$

מתקבל:

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = 3\cdot C_x + 1C_y = 0 \Rightarrow C_y = -1/3\, C_x$$

אורכו של $\vec{C}$ נשאר חופשי. וקטור אחד, למשל, שמקיים את תנאי זה הוא:

$$\vec{C} = \hat{x} - 1/3\,\hat{y}$$

ד. כדי למצוא וקטור יחידה, יש למצוא את אורכו של C:

$$C = \sqrt{1^2 + 1/3^2} = \sqrt{10}/3$$

וקטור היחידה יהיה:

$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{\hat{x} - 1/3\,\hat{y}}{\sqrt{10}/3} = \frac{3\hat{x}}{\sqrt{10}} - \frac{\hat{y}}{\sqrt{10}}$$