מכפלה וקטורית:

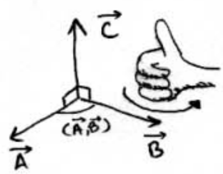
מכפלה שימושית נוספת היא המכפלה הוקטורית, המחזירה וקטור כפי שהשם מרמז.

← אם נתונים שני וקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, אזי הכיוון היחיד שהם מגדירים
הוא הניצב למישור שמכיל את שני הוקטורים (או הכיוון ההפוך) לכן,
המכפלה הוקטורית מוגדרת בעזרת כיוון זה:

הגדרה: המכפלה הוקטורית בין וקטור $\vec{A}$ לוקטור $\vec{B}$ נותנת וקטור הניצב
למישור המכיל את $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ לפי חוק היד הימנית וגודלו נתון ע"י

$$|A\times B| = |A||B|\sin(\vec{A},\vec{B})$$

חוק יד ימין: מבריגים מ- A ל- B בעזרת יד ימין. כיוון
האגודל הוא כיוון $(\vec{A}\times\vec{B})$.



אם הינו "מבריגים" מ- $\vec{B}$ ל- $\vec{A}$ הינו מקבלים כיוון
הפוך. ז"א מכפלה וקטורית היא אנטי-קומוטטיבית
(אנטי חילופית)

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

מכפלה של וקטור בעצמו תתן 0 $(\sin 0=0)$

$$\vec{A}\times\vec{A} = 0$$

במערכת צירים ימנית:

$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$$
$$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$$
$$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$$

מכפלה וקטורית היא פילוגית (הוכחה בספר או בבית...):

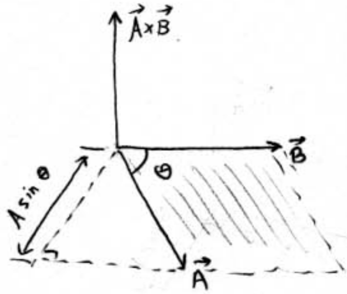
$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$$

מכפלה וקטורית בשפת רכיבים:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}) =$$
$$= A_xB_x\underbrace{(\hat{x}\times\hat{x})}_{=0} + A_xB_y\underbrace{(\hat{x}\times\hat{y})}_{\hat{z}} + A_yB_z\underbrace{(\hat{x}\times\hat{z})}_{-\hat{y}} + \dots$$
$$= \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{z}(A_xB_y - B_yA_x)$$

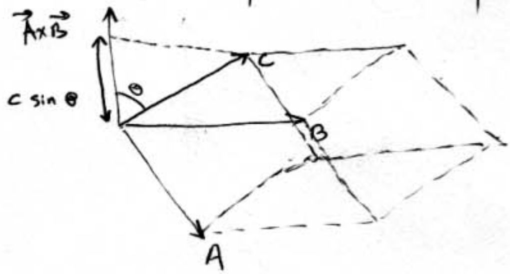
20.10.04

משמעות גיאומטרית:



$\vec{A}\times\vec{B}$ נותן וקטור שגודלו שטח המקבילית שבצלעותיו $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$, וכיוונו ניצב לפני המקבילית.

כמו כן, ניתן לחשב את שטחו של מקבילון שצלעותיו A, B ו- $\vec{C}$:



נפח המקבילון: $V=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

$$\left(=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = -\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})\right)$$

שלושה וקטורים נמצאים במישור אם ורק אם: $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=0$ כי אז המקבילון שנוצר מצלעותיהם יהיה בעל נפח אפס.

משפט הסינוסים:

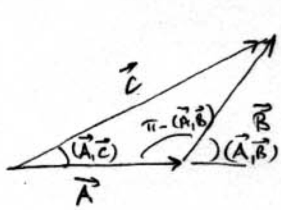
נגדיר $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$, נכפיל ב- $\vec{A}$ בשני האגפים ונקבל:

$$\vec{A}\times\vec{C} = \underbrace{\vec{A}\times\vec{A}}_{0} + \vec{A}\times\vec{B}$$

ולפי ההגדרה של מכפלה וקטורית:

$$\cancel{A}C\sin(\vec{A},\vec{C}) = \cancel{A}B\sin(\vec{A},\vec{B})$$

גרפית:



כלומר:

$$C\sin(\vec{A},\vec{C}) = B\sin(\pi-(\vec{A},\vec{B})) = B\sin(\vec{A},\vec{B})$$

ולכן:

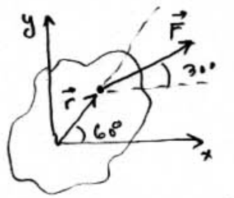
$$\frac{C}{\sin(\vec{A},\vec{B})} = \frac{B}{\sin(\vec{A},\vec{C})}$$

וזהו משפט הסינוסים.

שימושים נפוצים למכפלה וקטורית

* מומנט סיבוב מוגדר ע"י :

$$\vec{N} = \underbrace{\vec{r}}_{\text{הסחה מהציר סביבו מחושב המומנט.}} \times \underbrace{\vec{F}}_{\text{הכח שמופעל}}$$



דוגמא: נתון: $r = 50\,cm$
$F = 6\times10^5\,dyne$

מהו מומנט הסיבוב?

ראשית, $\vec{F}$ וגם $\vec{r}$ נמצאים במישור הדף, לכן $\vec{N}$ יהיה בכיוון ניצב לדף. מכלל היד הימנית, כיוון $\vec{N}$ לתוך הדף.
גודלו של $\vec{N}$:

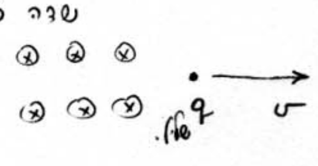
$$|N| = |r||F|\sin\underbrace{(\vec{r},\vec{F})}_{60^\circ-30^\circ=30^\circ} = 50\,cm\cdot 6\times10^5\,dyne\cdot \tfrac{1}{2} = 1.5\times10^7\,dyne\cdot cm$$

* כח לורנץ: הכח שמפעיל שדה מגנטי על חלקיק הוא דוגמא נוספת לשימוש במכפלה וקטורית!

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad (c.g.s)$$

$$\left(\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad (m.k.s)\right)$$

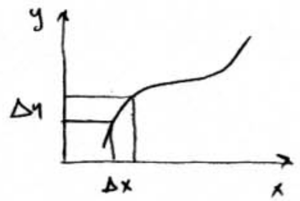
דוגמא. במערכת הבאה, לאיזה כיוון יהיה הכח אם החלקיק הוא מטען שלילי?
שדה $\vec{B}$ לתוך הדף.



$v\times B$ יהיה בכיוון ↑ אולם המטען הוא שלילי ולכן $\vec{F}$ יהיה כלפי ↓

נגזרות

* נגזרת של פונקציה סקלרית:

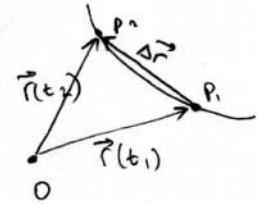


$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

* נגזרת של פונקציה וקטורית:

נסתכל על המסלול שיוצר וקטור המקום $\vec{r}$ כתלות בפרמטר t (הזמן!). כלומר
בזמן t נתון ערכו: $\vec{r}(t)$, ואולם אין זה מעניין עם t.

נסתכל על שני זמנים: t_1 ו-t_2. $\Delta\vec{r}$ יהיה המיתר המחבר בין שתי הנקודות P_1 ו-P_2 (כמתואר בציור)



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

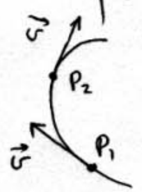
בדומה למקרה החד מימדי של נגזרת של סקלר; מגדירים:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad ; \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

זוהי הנגזרת של וקטור. במידה ומדובר בוקטור ההסטה (displacement) והפרמטר הוא אכן הזמן t, הוקטור המתקבל נקרא מהירות וקטורית (להבדיל מ"גודל המהירות" שהוא הגודל של אותו הוקטור). כיוון הוקטור הזה הוא המשיק למסלול בכל נקודה, וגודלו הוא גודל המהירות בה נע "החלקיק" דהיינו, המרחק אותו היה עובר החלקיק ביחידת זמן.

סימון סטנדרטי לנגזרת לפי הזמן

המהירות: $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$



את הוקטור $\vec{r}$ ניתן לפרק לרכיבים:

$$\vec{r} = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

וגם את Δr:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y} + \Delta z\,\hat{z}$$

בעזרת Δr ניתן כעת לרשום את הנגזרת בעזרת רכיבי $\vec{r}$:

20.10.04

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{y} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{z} \right)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

דהיינו, רכיבי המהירות הם:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

שימו לב! הנגזרת הנ"ל נכונה רק מפני ש- $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ הם קבועים בזמן, אחרת
היינו חייבים לגזור גם את וקטורי הכיוון $\hat{e}$ של מערכת הצירים.

גזירה של מכפלת סקלר בוקטור:

$$\frac{d}{dt}(a\vec{b}) = \frac{d}{dt}\left(ab_x\hat{x} + ab_y\hat{y} + ab_z\hat{z} \right) =$$

$$= \frac{da}{dt}b_x\hat{x} + a\frac{db_x}{dt}\hat{x} + \frac{da}{dt}b_y\hat{y} + a\frac{db_y}{dy}\hat{y} + \dots$$

$$= \frac{da}{dt}\vec{b} + a\frac{d\vec{b}}{dt}$$

כלל הגזירה דומה לכלל הגזירה של מכפלת שני פונקציות סקלריות.
הכלל מתקיים גם עבור גזירת מכפלה סקלרית ווקטורית:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

<u>וקטור תאוצה</u>: הנגזרת בזמן של $\vec{r}$ נותנת את $\vec{v}$

נגזרת בזמן של $\vec{v}$ נותנת את התאוצה $\vec{a}$. סימון סטנדרטי לנגזרת בזמן

נגזרת שניה.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

וקטורים שונים ניתן לגזור לפי פרמטרים שונים. וקטור המיקום $\vec{r}$ והזמן t הם
רק מקרים פרטיים.

תרגיל:

* נתון המסלול:

$$r=\left(3\exp(-t/_{1sec}),\ 2\sin(t/_{1s}),\ -5(t/_s)^2\right)\underset{\text{מטר}}{m}$$

(שניה)

מה המהירות, התאוצה, וגם גודל המהירות?

המהירות:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\left(3m\exp(-t/_{1s})\right)}{dt}\hat{x}+\frac{d\left(2m\sin(t/_s)\right)}{dt}\hat{y}-\frac{d\left(5(t/_s)^2 m\right)}{dt}\hat{z}$$

$$=-3\frac{m}{s}\exp(-t/_s)\hat{x}+4\frac{m}{s}\cos(t/_s)\hat{y}-10\frac{m}{s}(t/_s)\hat{z}$$

והתאוצה:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=+3\frac{m}{s^2}\exp(-t/_s)\hat{x}-\frac{8m}{s^2}\sin(t/s)\hat{y}-\frac{10m}{s^2}\hat{z}$$

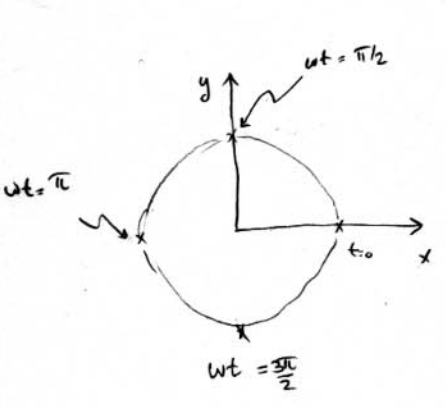
גודל המהירות:

$$|\vec{v}|=\sqrt{9\exp(-2t/_s)+16\cos^2(t/_s)-100(t/_s)^2}\cdot\frac{m}{s}$$

שימו לב כי אנו בונים בגדלים פיסיקליים לכן יש לשמור על היחידות במידה והללו קיימים. כמו כן, פונקציות כמו $\sin(x)$, $\exp(y)$ מקבלים ארגומנט חסר יחידות (אין משמעות ל- $\sin(17m)$. לכן, אם t הוא עם יחידות (למשל שניות...) אז ולכן לא יהיה $\sin(t)$. ביטויים אפשריים הם $\sin(t/t_0)$, $\sin(\omega t)$ כאשר ω עם יחידות של 1/שניה וכו'...

* תנועה מעגלית: (נתון המסלול)

$$\vec{r}=\left(r_0\cos(\omega t),\ r_0\sin\omega t,\ 0\right)$$



התנועה המתוארת ע"י מסלול זה הוא מעגל:

כאשר ניתן לראות מכך שגודלו של $\vec{r}$ הוא קבוע:

$$|\vec{r}|=\sqrt{r_0^2\cos^2(\omega t)+r_0^2\sin^2(\omega t)}=r_0$$

כיוון הסיבוב הוא נגד כיוון השעון.

מהי המהירות ?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} = -r_0\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r_0\omega\cos(\omega t)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0$$

גודל המהירות:

$$|\vec{v}| = \sqrt{r_0^2\omega^2\sin^2(\omega t) + r_0^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = r_0\omega$$

זול.

$$v = \omega r_0$$

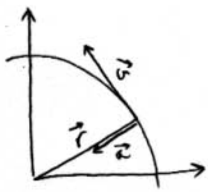
ניתן לראות שווקטור $\vec{v}$ ניצב לווקטור $\vec{r}$:

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = \overbrace{-r_0\omega_0\sin(\omega t)}^{v_x}\,\overbrace{r_0\cos(\omega t)}^{r_x} + \overbrace{r_0\omega\cos(\omega t)}^{v_y}\,\overbrace{r_0\sin(\omega t)}^{r_y} = 0$$

בדומה למהירות, ניתן לחשב את התאוצה:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -r_0\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 r_x \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -r_0\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 r_y \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \vec{a} = -\omega^2\vec{r} \quad (\text{או} \quad a = -\omega^2 r)$$

אפשר גם לרשום: $\omega = \frac{v}{r}$ ולכן: $a = v^2/r$.



$\vec{v}$ ניצב ל- $\vec{r}$ ו- $\vec{a}$ בתנועה מעגלית. $\vec{a}$ פונה פנימה.

ω נקרא התדירות הזויתית (= קצב שינוי הזוית ברדיאנים): $\frac{rad}{sec}$

P הוא הזמן מחזור. ונמדד ב- sec. במחזור אחד, הארגומנט משתנה ב- 2π ולכן:
$\omega\cdot P = 2\pi \rightarrow P = 2\pi/\omega$

f נקרא התדירות, שזה כמה מחזורים (של רדיאנים) לשניה, הוא נמדד ב- $1/sec$.

$$f = 1/p$$

את ה $1/s$ מגדירים כ- Hz (הרץ) או כותבים cps (cycles per second).

הערה: היות וזוית היא חסרת יחידות, הרדיאן הוא חסר יחידות גם ולכן יכול להופיע או להעלם בלי שיפריע. (למשל, ניתן לרשום $\omega = 17\frac{rad}{sec}$ או $\omega = 17\frac{1}{sec}$, הכוונה בשניהם זהה).