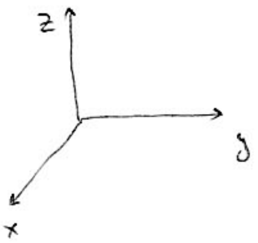
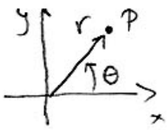
24.10.04

מערכות צירים שימושיות:

* **מערכת קרטזית:** המערכת הרגילה עם $\hat{x}$ $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$. לפעמים מסמנים: $\hat{k}$. $\hat{j}$, $\hat{i}$ או רכיב y וקטור r_y או r_j.



* **מערכת צירים פולרית 2D:**

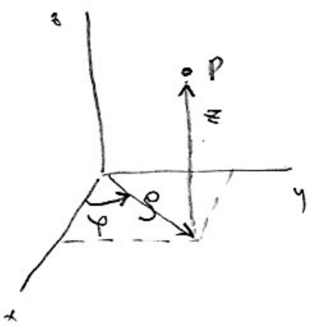


הקשר בין מערכת פולרית לקרטזית דו מימדית:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

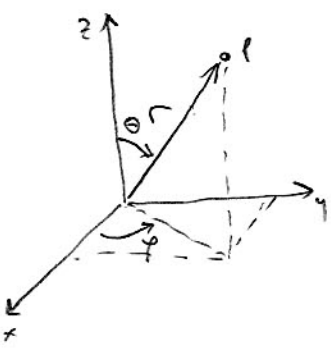
הערה: עבור $x<0$ ישנה בעיה עם ה- $\tan^{-1}$ הזו והפונקציה זו מחזירה רק $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, ולכן יש להוסיף ל- θ את π אם $x<0$. (במחשבים יש לרוב פונקציה $\tan^{-1}(x,y)$ שמאפשרת להחזיר θ ברבעון הנכון).

* **מערכת צילינדרית קרטזית:**



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

מערכת צירים כדורית:



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

24.10.04

דוגמא: נתונים שני וקטורים במערכת קואו' כדורית: $\vec{a}_1=(r_1,\theta_1,\varphi_1)$
$\vec{a}_2=(r_2,\theta_2,\varphi_2)$

בקואורדינטות כדוריות, למה שווה $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$? מהי הזוית ביניהם?

פתרון: נבצע את ההכפלה בקואו' קרטזיות ונקבל:

$$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 = r_1 r_2\left(\sin\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\varphi_2+\sin\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\sin\varphi_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

$$= r_1 r_2\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\underbrace{\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

$$= r_1 r_2\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

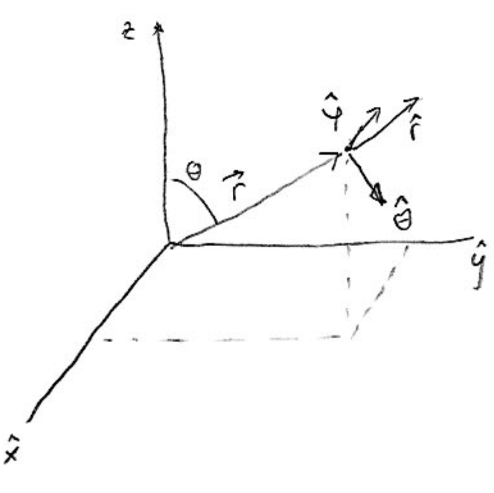
הזוית תהיה:

$$\theta_{12}=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|a_1||a_2|}\right)=\cos^{-1}\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

אגב, בדרך דומה ניתן למצוא ביטוי עבור $\sin\theta_{12}$ ע"י הכפלת $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$ במערכת "כקיב קרטזי"

<u>וקטורי יחידה בקואורדינטות כדוריות:</u>

במערכות לא קרטזיות כיוון וקטורי היחידה תלוי במקום!



מהירות ותאוצה בקואורדינטות פולריות:

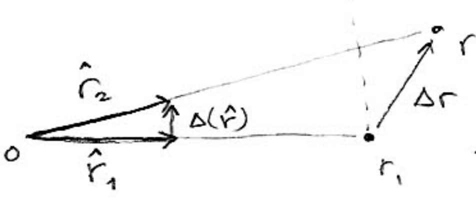
את וקטור המקום ניתן לרשום כ:

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

אם נגזור בזמן:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

מה זה $\frac{d\hat{r}}{dt}$? המשמעות של זה היא קצב השינוי של הכיוון של הוקטור $\hat{r}$:



$$\Longleftrightarrow \quad \Delta(\hat{r}) = \Delta\theta\,\hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \lim_{\Delta\hat{r}\to 0}\frac{\Delta(\hat{r})}{\Delta t} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\hat{\theta}\,\Delta\theta}{\Delta t} = \hat{\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

ולכן:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

וקטור התאוצה:
בקואורדינטות קרטזיות:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{z}$$

במערכת פולרית:

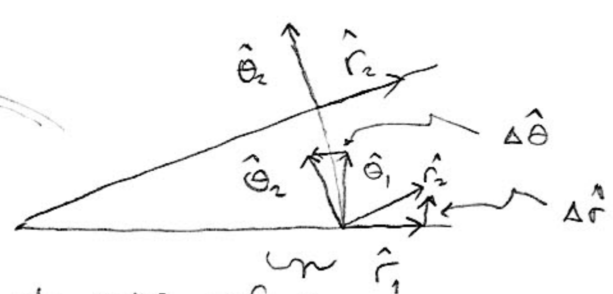
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\right)$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{\theta}}{dt}.$$

למה שווה $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$? הואיל ו- $\hat{r}\perp\hat{\theta}$ ברור ש- $\left|\frac{d\hat{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\hat{\theta}}{dt}\right|$
וגם $\frac{d\hat{r}}{dt}\perp\frac{d\hat{\theta}}{dt}$. כלומר:

$$\Delta\hat{\theta} = \Delta\theta(-\hat{r})$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r}$$



המשולשים דומים אך מסובבים ב- 90°.

24.10.04

כעת ניתן להציב בביטוי עבור $\vec{a}$ ולקבל:

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{\theta} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{r}$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\theta}$$

<u>תנועה מעגלית:</u>

$$r = r_0 = const$$

$$\theta = \omega t$$

$$v = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{0}\hat{r} + r_0\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\hat{\theta} = r_0\omega\hat{\theta}$$

$$a = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\underbrace{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\omega^2}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\overbrace{\left[\frac{d}{dt}\underbrace{\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)}_{\omega}\right]}^{=0}\hat{\theta} = -r\omega^2\hat{r}$$

אינו תלוי בזמן.

<u>אינטגרציה:</u> הפעולה ההפוכה לנגזרת.

$$\vec{r} = \int \vec{v}\, dt$$

ניתן לבצע אינטגרציה על כל רכיב בנפרד:

$$x = \vec{r}\cdot\hat{x} = \int \vec{v}\cdot\hat{x}\, dt = \int v_x\, dt$$

<u>דוגמא:</u>

$$\vec{a} = -g\hat{z}$$

קבוע אינטגרציה.

$$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt \Rightarrow v_x = \int \underbrace{a_x}_{0} dt = C_1 \equiv v_{x,0}$$

$$v_z = \int a_z\, dt = -\int g\, dt = -gt + C_2 = -gt + v_{z,0}$$

$$x = \int v_x\, dt = \int v_{x,0}\, dt = v_{x,0}t + C_3 = v_{x,0}t + x_0$$

$$z = \int v_z\, dt = \int(-gt + v_{z,0})\, dt = -\frac{gt^2}{2} + v_{z,0}t + \overbrace{C_4}^{z_0}$$

$v_{x,0}, v_{z,0}$ הם המהירויות של החלקיק ב- $t=0$ והם קבועי האינטגרציה המתקבלים מהמשוואה עבור המהירות. x_0, z_0 הם המיקום של החלקיק ב- $t=0$ והם מתקבלים מהאינטגרציה עבור x,z. וכך קיבלנו את המשוואות של נפילה חופשית.