26.10.04

חוקי ניוטון

חוקי ניוטון וחוקי טבע אחרים אינם חוקים שניתן "להוכיח" כמו משפטים במתמטיקה. אלה, הם חוקים שלא הוכחו ע"י נסיונות.

לדוגמא, בתקופתו של אריסטו חשבו שמהירות נפילתו של גוף יחסית למשקלו - גוף כבד יותר נופל מהר יותר. כיום ידוע שגופים נופלים מאוזנים באותו הקצב ללא קשר למשקל. אז, בתקופתו של אריסטו חשבו כי על גוף חייב לפעול כוח על מנת שהוא ימשיך לנוע. חוקים אלה של אריסטו אינם מתאימים לתיאור המציאות ולכן אינם נכונים. אולם רק בתקופתו של גלילאו התחיל להכנס לתודעה הרעיון שנסיונות הם דבר חשוב כדי להבין את חוקי הטבע. עד אז "נסיונות מחשבתיים" היו מספיקים כדי "להוכיח" חוק זה או אחר.

חוקי ניוטון מבוססים על הנסיון שהיה קיים בתקופתו - חוקי תנועה של נפילה חופשית או תנועה בליסטית (חוקים אותם מצא גלילאו) וגם החוקים המתארים את תנועת גרמי השמיים - חוקים שנוסחו ע"י קפלר.

ואלו הם החוקים:

חוק ראשון של ניוטון:

* ללא כוחות חיצוניים - גוף ימשיך לנוע באותה המהירות ובאותו הכיוון: $\vec{F}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{v}=0$

חוק זה מתקבל למעשה מהחוק השני.

החוק השני של ניוטון:

* קצב שינוי התנע של גוף יחסי לכוח המופעל על הגוף

וקטור המהירות - $\vec{v}$

מסת הגוף - m

$$\underbrace{\vec{F} \propto}_{\text{יחסי ל-}} \frac{d}{dt}\big(\underbrace{m\vec{v}}_{\text{הגדרת התנע של הגוף}}\big)$$

מגדירים את יחידות הכוח כך שמקדם הפרופורציה הוא 1:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

26.10.04

אם המסה נמדדת ב- gr והתאוצה ב- cm/s^2 אז הכח יימדד ביחידה הנקראת דין dyne

$$1dyn = dyne \equiv gr \cdot cm \cdot s^{-2}$$

אם המסה נמדדת ב- kg והתאוצה ב- m/s^2 נקבל את הניוטון:

$$\underline{1N} = Newton = kg \cdot m \cdot s^{-2} = (1000\,gr)\cdot(100\,cm)\cdot s^{-2} =$$
$$= 10^5\, gr\, cm\, s^{-2} = \underline{10^5\, dyn}$$

אם מסת הגוף קבועה, נקבל את החוק השני בניסוחו המוכר לנו:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0}\vec{v} + m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} = m\vec{a}$$

$=0$ בגלל מסה קבועה.

ישנם מקרים שלא ניתן להזניח את האיבר dm/dt. לדוגמא, בפתרון בעיית טיל (מסתו קטנה עם שריפת הדלק והוצאת הדלק אחורה).

החוק השלישי של ניוטון:

כאשר שני גופים פועלים זה על זה, הכח אותו מפעיל גוף 1 על גוף 2 ($\vec{F}_{21}$) שווה בגודלו והפוך בכיוונו מהכח שמפעיל גוף 2 על גוף 1 ($\vec{F}_{12}$). דהיינו:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

בהמשך נראה שחוק זה ביחד עם החוק השני משמעותם שימור תנע

דוגמא פשוטה לשימוש החוק השני:

חלקיק (בעל מסה קבועה) נע ללא השפעת כוחות. מה יהיה מסלול תנועתו?

$$0 = \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{v} = \int \vec{0}\,dt = \underbrace{\vec{v}_0}$$

קבוע האינטגרציה הוא וקטור השווה למהירות הקבועה של החלקיק.

$$\vec{x} = \int \vec{v}\,dt = \int \vec{v}_0\,dt = \vec{v}_0 t + \underbrace{\vec{r}_0}$$

קבוע האינטגרציה. ב- $t=0$ החלקיק היה ב- $\vec{r}=\vec{r}_0$

ז.א. ללא כוחות חיצוניים, חלקיק ינוע על קו ישר במהירות קבועה (החוק הראשון).

תנועת חלקיק בשדה כבידה אחיד:

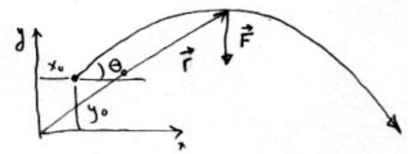
מהי משוואת התנועה של חלקיק בשדה כבידה אחיד? שדה כבידה אחיד הוא כח קבוע הפונה כלפי מטה. הכח יחסי למסה כך שהתאוצה תהיה בלתי תלויה:

$$\vec{F} = -mg\hat{y}$$

g - קבוע הגרביטציה המקומי. למעשה הוא שונה ממקום למקום על כדוה"א (גדול יותר בקטבים) ושווה בערך ל- $g \approx 980\ cm/s^2$ או $g \cong 9.8\ m/s^2$.

כשהדיוק אינו חשוב, ניתן גם לקחת בקירוב: $g \approx 10\ m/s^2$.

כעת, אני רוצה לכתוב את המשוואות המתארות את מיקום החלקיק:



חוק II: $\vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{a} = \vec{F}/m = -g\hat{y}$

אם נכתוב בעזרת רכיבים:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y}\right) = -g\hat{y}$$

כיוון ש- $\hat{x}$ ו- $\hat{y}$ ניצבים זה לזה, כל רכיב מתקיים בנפרד (הדרך לראות: להכפיל את המשוואה פעם ב- $\cdot\hat{x}$ ופעם ב- $\cdot\hat{y}$) מתקבל:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

ע"י אינטגרציה:

$$\frac{dx}{dt} = v_{0,x} = v_0\cos\theta_0 \qquad x = tv_0\cos\theta_0 + x_0$$

$$\frac{dy}{dt} = v_{0,y} - gt = v_0\sin\theta_0 - gt \qquad y = tv_0\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

זהו הפתרון של תנועת חלקיק בשדה כוח קבוע. ניתן לתאר אותו בעזרת קשר בין y ו- x ע"י חילוץ t:

$$t = \frac{(x - x_0)}{v_0\cos\theta_0}$$

נציב במשוואה של y ונקבל:

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0)\frac{(x-x_0)}{v_0\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

ע"י מעט מתמטיקה ניתן להראות שביטוי זה שווה -

$$y - \underbrace{\left(y_0 + \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g}\right)}_{y_m} = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\theta_0}\left[x - \underbrace{\left(x_0 + \frac{V_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}\right)}_{x_m}\right]^2$$

זוהי פרבולה, הערך המקסימלי שלה מתקבל ב- (x_m, y_m):

$$X_m = X_0 + \frac{V_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} \qquad y_m = y_0 + \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

* את המקסימום של המסלול ניתן למצוא בדרך קלה יותר:

$$\underbrace{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_m} = 0}_{} \Rightarrow V_0\sin\theta_0 - gt_m = 0 \Rightarrow t_m = \frac{V_0\sin\theta_0}{g}$$

שיא המסלול מתקבל כאשר הקליע מגיע "למנוחה" בציר $\hat{y}$.

ע"י הצבה במשוואות עבור x ו- y מתקבל:

$$x_m = \frac{V_0\sin\theta_0}{g}V_0\sin\theta_0 + x_0$$

$$y_m = \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{g^2} + y_0 = \frac{V_0^2\sin^2\theta_0}{2g} + y_0$$

* נחשב את המרחק בציר x אותו יעבור הקליע עד שיגיע שוב ל- y_0:

המשוואה שיש לפתור: $y = y_0$

נציב את הביטוי עבור y:

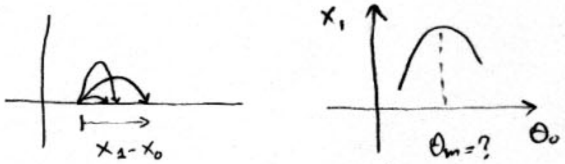
$$y_0 + V_0\sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0$$

ולכן: $t = \frac{2V_0\sin\theta_0}{g}$

והצבה בביטוי עבור x: $x = \frac{2V_0\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} + X_0$

26.10.04

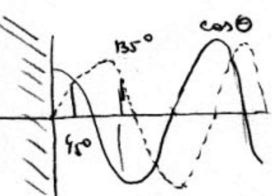
מהי הזווית θ בה יגיע החלקיק למרחק x_1 הגדול ביותר, בהינתן V_0 נתון.



אנו רוצים את הערך המקסימלי של $x_1(\theta_0)$. כדי לקבל אותו נגזור את x_1 לפי θ_0:

$$\left.\frac{dx_1}{d\theta_0}\right|_{\theta_0=\theta_m} = 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos^2\theta_m - \sin^2\theta_m\right) = 0$$

" θ שלילי, כי פירושו "לכוון אל הקיר".



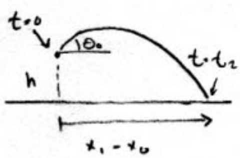
$$\cos\theta_m = \pm\sin\theta_m$$

$$\theta_m = \underline{45°},\ 135°$$

$135°$ נותן לנו גם המרחק המקסימלי. בכיוון ההפוך!

<u>דוגמא נוספת</u>: אותה שאלה אך כעת החלקיק יוצא מגובה h

<u>פתרון</u>:



$$y = y_0 - h = y_0 + V_0\sin\theta_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$\hookrightarrow t_2 = \frac{V_0\sin\theta_0 \pm \sqrt{V_0^2\sin^2\theta_0^2 + 2gh}}{g}$$

הפתרון עם ה"-" אינו רלוונטי כי זהו הזמן לפני הזריקה (t שלילי) בו היה החלקיק אילו תנועתו התחילה קודם.

בדיקה שהפתרון עבור t_2 הגיוני: עבור $h=0$ מקבלים: $t_2 = \frac{2V_0\sin\theta}{g}$ ✓ מה שקיבלנו קודם. עבור $V_0=0$, זוהי נפילה חופשית ומתקבל:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

כפי שצריך להיות ✓

[פתרון נפילה חופשית: $y = -\frac{1}{2}gt^2$, $y=-h$, $\hookrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$]

26.10.04

ה- x המתקבל עבור $t=t_2$ הוא:

$$x_2 = \left(\frac{V_0 \sin\Theta_0}{g} + \sqrt{\frac{V_0^2 \sin^2\Theta_0}{g^2} + \frac{2h}{g}} \right) V_0 \cos\Theta_0$$

ערכו המקסימלי יתקבל עבור

$$\frac{dx_2}{d\theta_0} = 0$$

אולם זה יתן משוואה לא טריוויאלית עבור $\cos\Theta_0$ ו- $\sin\Theta_0$. דרך אחת לפתור אותה היא להציב: $\xi = \sin\Theta_0$ (האות נקראת קסי xi). ואז:

$$x_2 = \left(\frac{V_0 \xi}{g} + \sqrt{\frac{V_0^2 \xi^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} \right) \sqrt{1-\xi^2}$$

המשוואה $\frac{dx_2}{d\Theta_0} = 0$ תתן:

$$\frac{dx_2}{d\Theta_0} = \frac{dx_2}{d\xi} \frac{d\xi}{d\Theta_0} = 0$$

כלל השרשרת.

ולכן גם $\frac{dx_2}{d\xi} = 0$. אחרי גזירה וסידור איברים:

$$\frac{dx_2}{d\xi} = \frac{V_0^2 \xi (1-2\xi^2) + g\left(-2h\xi + V_0 (1-2\xi^2) \sqrt{\frac{V_0^2 \xi^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}\right)}{g^2 \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{\frac{V_0^2 \xi^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}} = 0$$

המשוואה נותנת משוואה ריבועית ל- ξ. הפתרון החיובי הוא:

$$\xi_m = \sin\Theta_m = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \frac{gh}{V_0}\right)}}$$

* מי שחזק: ישלים את האלגברה החסרה!!!