27.10.04

דוגמא לפתרון משוואת תנועה: נפילת גוף עם חיכוך יחסי למהירות

נניח כי גוף נופל ובשל השפעת האוויר ניתן לכתוב כוח חיכוך: $F_{drag}=-k\vec{v}$
כיצד תראה תנועתו של החלקיק?

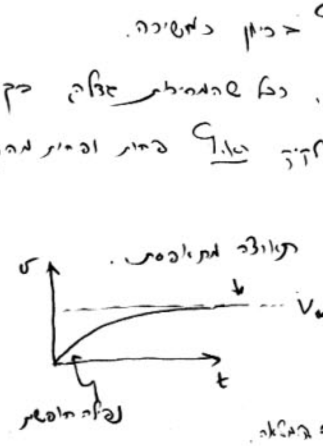
פתרון: משוואת התנועה של החלקיק: (חוק II):

$$\underbrace{m}_{(\text{מדויק})}\frac{d\vec{v}}{dt}=+F_g+F_{drag}=m\vec{g}-k\vec{v}$$

כיצד מתנהגת משוואה זו? כאשר החלקיק נע לאט (למשל, קרוב לרגע שיחרורו).
האיבר $k\vec{v}$ נופל ומשוואת התנועה היא:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{g}$$

דהיינו נפילה חופשית רגילה – החלקיק יתחיל להאיץ $\vec{g}$ בכיוון המשיכה.
לאחר שהמהירות תגדל, יכנס למשחק האיבר $k\vec{v}$, כל שהמהירות גדלה כך השני גדל ומקטין את התאוצה הכוללת. ז"א החלקיק יאיץ פחות ופחות מהר עד שהמהירות תהיה כך שהכח הכולל מתאפס:



התאפסות התאוצה תקרה כאשר:

$$m\vec{g}=k\vec{v}_\infty \Rightarrow \vec{V}_\infty=\frac{m}{k}\vec{g}$$

כעת, כשמבינים מה מתרחש נפתור את המשוואה במלואה.
במקרה הכללי, ישנו:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{g}-\frac{k}{m}\vec{v}$$

נסתכל על רכיב $\hat{y}$ ונגדיר $\hat{y}\downarrow$ כך ש- $\vec{g}=g\hat{y}$. (כך המהירות תהיה חיובית).

$$\frac{dv_y}{dt}=g-\frac{k}{m}v_y$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית עבור $v_y(t)$. סוג מסוים זה נקרא משוואה "פרידה" היות וניתן להפריד את האיברים התלויים מפורשות ב- t לצד אחד ואלה התלויים ב- v לצד השני: נעביר dt ימינה ואת $g-\frac{k}{m}v_y$ שמאלה:

$$\frac{dv_y}{g-\frac{k}{m}v_y}=dt$$

מה המשמעות של מה שקיבלנו?

מה שהמשוואה הנ"ל נותנת לנו הוא קשר בין שינוי בזמן dt לשינוי המקביל במהירות dv_y.
במקרה ספציפי זה, הקשר הזה תלוי במהירות הרגעית של החלקיק v_y אולם, הוא
יכול היה להיות תלוי גם בזמן ואף במקום (ואז היינו בצרה צרורה יותר...).

מה שמעניין אותנו הוא למצוא קשר $v_y(t)$ שמתקבל אם אנחנו סוכמים את ה-dv_y
הרבים המתקבלים מה-dt ים. היות ו-dt ו-dv_y הם קטנים, סכימה זו היא
אינטגרל:

$$\int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv_y}{g-\frac{k}{m}v_y} = \int_{t=0}^{t} dt$$

צד ימין נותן:

$$\underbrace{\text{r.h.s:}}_{\text{right hand side}} \quad \int_{t=0}^{t} dt = t\Big|_{t=0}^{t=t} = t-0 = t$$

צד שמאל:

$$\text{l.h.s:} \quad \int_{v(t=0)}^{v(t)} \frac{dv_y}{g-\frac{k}{m}v_y} = \frac{\ln\left(g-\frac{k}{m}v_y\right)}{-k/m}\Bigg|_{v_y=v_y(t=0)}^{v_y=v_y(t)}$$

אם נניח כי החלקיק מתחיל ממנוחה, כלומר: $v_y(t=0)=0$ אז:

$$\text{l.h.s} = -\frac{m}{k}\left(\ln\left(g-\frac{k}{m}v_y\right)-\ln(g)\right) = -\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{kv_y}{mg}\right)$$

השוואה בין צד ימין לצד שמאל נותנת:

$$-\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{kv_y}{mg}\right) = t \quad \wedge \quad v_y = \frac{mg}{k}\left(1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)$$

ניתן לבצע אינטגרציה נוספת ולקבל את y:

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v_y\,dt = dy \Rightarrow \quad y = \int_{y(t=0)}^{y(t)} dy = \int_{t=0}^{t} v_y\,dt = \int_{t=0}^{t} \frac{mg}{k}\left(1-\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right)dt$$

$$= \left(\frac{mgt}{k} + \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\cdot\frac{mg}{k}\cdot\frac{m}{k}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=t}$$

$$= \frac{mgt}{k} + \frac{m^2 g}{k^2}\left(\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)-1\right)$$

27.10.04

<u>הערות</u>:

1) הפתרון שקבלנו הוא הגיוני: בגבול ש-$t\to\infty$ ה-$\exp\to 0$ ואז ! $v_y = \frac{mg}{k}$
זהו הערך הסופי v_∞ שקבלנו מקודם.
בגבול של $kt \ll 1$ יש לפתח את האקספוננט. לשם כך, נשתמש בטור טיילור האומר

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \cdots$$

כלומר, ניתן לקרב את הפונקציה $\exp(x)$ ע"י:

$$\exp(x) \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \longrightarrow \exp(x) \simeq 1 + x \quad (x \ll 1)$$

עוד על טור טיילור תלמדו באינפי. בכל מקרה, במקרה שלנו ניתן לכתוב:

$$v_y = \frac{mg}{k}\left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right) \simeq \frac{mg}{k}\left(1 - 1 + \frac{kt}{m} + \cdots\right) \overset{?}{=} gt$$

ז.א. עבור זמנים קטנים, המקיימים $\frac{kt}{m} \ll 1$, החיכוך אינו חשוב והמהירות מתנהגת כמו נפילה חופשית ללא חיכוך ✓. (וטוב מאד שכך!)

2) נניח שהיינו מפרידים בין t ל-v במשוואה. היינו מקבלים, למשל:

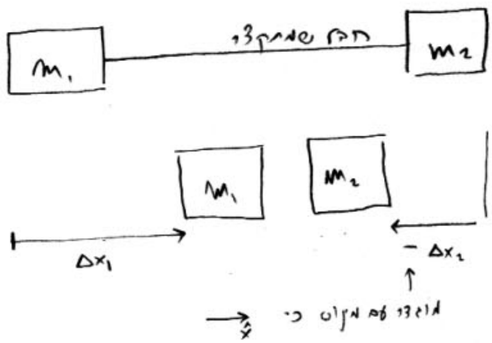
$$\int_{v_y(t=0)}^{v_y(t)} dv_y = \int_{t=0}^{t} \left(g - \frac{k}{m} v_y(t)\right) dt$$

היינו מסוגלים לעשות אינטגרציה באגף שמאל ולקבל: $v_y(t)-v_y(t=0)$
אולם עם אגף ימין היינו נתקלים בבעיה. אנו לא יודעים מהי התלות של v_y ב-t ולכן לא נוכל לבצע את האינטגרציה על $\int v_y(t)dt$! כעת ניתן לראות מדוע אם ניתן להפריד בין המשתנים, עושים זאת.

ניסוי שתי עגלות

בכיתה ראינו ניסוי בו שתי עגלות נפגשו זה עם זה. העגלה הכבדה יותר
נעה פחות מהעגלה הקלה יותר. יחס התזוזות היה הפוך ליחס המסות.
כיצד זה מתקבל מהחוק השני והשלישי?

$t=0$



נחשב את המהירות:

חוק שני, רכיב $\hat{x}$.

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{F_{12}}{m_1} \wedge v_1 = \frac{1}{m_1}\int_{t=0}^{t} F_{12}\,dt$$

באותה צורה:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{F_{21}}{m_2} \wedge v_2 = \frac{1}{m_2}\int_{t=0}^{t} F_{21}\,dt$$

מהחוק השלישי:

$$\underset{\text{חוק III}}{=} -\frac{1}{m_2}\int_{t=0}^{t} F_{12}\,dt \underset{\text{הצבה של } v_1}{=} -\frac{m_1}{m_2} v_2$$

ז"א, יחס המהירות פרופורציונלי הפוך ליחס המסות!
והמרחקים Δx:

הצבת התוצאה עבור המהירויות,

$$\Delta x_1 = \int_{t=0}^{t} v_1\,dt \;;\; \Delta x_2 = \int_{t=0}^{\infty} v_2\,dt = -\frac{m_2}{m_1}\int_{t=0}^{\infty} v_1 \underset{\text{הצבת } \Delta x_1}{=} -\frac{m_2}{m_1}\Delta x_2$$

ז"א, גם המרחקים יחסיים הפוך ליחס המסות.