שימור תנע:

* נסתכל על שני גופים ללא אינטראקציה ע"י גופים אחרים; למה שווה שינוי התנע שלהם?

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} \underset{\text{II חוק}}{=} \underbrace{\vec{F}_1}_{\text{הכח הכולל על 1}} + \vec{F}_2 = \underbrace{\vec{F}_{12}}_{\text{הכח היחיד הוא של 2 על 1}} + \vec{F}_{21}$$

$$\underset{\text{III חוק}}{=} \vec{F}_{12} - \vec{F}_{12} = 0$$

התנע נשמר! נראה שהתנע נשמר גם אם מדובר ביותר גופים:

* נסתכל על N מסות במערכת סגורה (ללא אינטראקציה עם הסביבה). השינוי בתנע:

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i}_{\text{התנע של מסה } i}\Big) = \sum_{i=1}^{N}\frac{dp_i}{dt} \underset{\text{חוק שני של ניוטון}}{=} \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} F_{ij}}$$

הכח הכולל שמסה i מרגישה הוא סכום של כל ה-F_{ij} (כל ה-j-ים האחרים מ-i).

$$= \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\sum_{j=i+1}^{N}}_{\text{שימו לב לשינוי בסכימה על } j}\underbrace{(\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji})}_{\substack{\text{מהחוק ה-III}\\ =0}} = 0$$

התנע של מערכת מבודדת נשמר!

האנרגיה הקינטית

האנרגיה הקינטית של חלקיק בעל מסה m מוגדרת כ-

$$E \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

אם המערכת מכילה מספר חלקיקים בעלי מסות m_i ומהירויות v_i:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

התנע הוא וקטור ואילו האנרגיה הקינטית היא סקלר.

שימור אנרגיה ועבודה במימד אחד

* למה שווה שינוי האנרגיה בין זמן 1 לבין זמן 2 ?

את ההפרש באנרגיה ניתן לכתוב כ-

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(m v^2\right) dt$$

למה שווה הנגזרת בזמן? נניח כי התהליך נע במימד אחד z. המסה קבועה.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m v^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m v_z^2\right) = \underbrace{m v_z \frac{d v_z}{dt}}_{m a_z} = v_z F_z$$

כלומר:

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} v_z F_z \underset{\substack{\uparrow \\ \text{כתיבה מפורשת } v_z}}{=} \int_{t_1}^{t_2} F_z \frac{dz}{dt}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{מעבר למשתנה אינטגרציה } z}}{=} \underbrace{\int_{z(t_1)}^{z(t_2)} F_z\, dz}_{} \equiv W$$

אנו מגדירים את אגף זה כעבודה שנעשית ע"י הכוח F_z

מה שקבלנו ⇐ שינוי האנרגיה הקינטית = עבודה: $\Delta E = W$

אם F_z ניתן לכתיבה כ- $F_z = -\frac{dU}{dz}$ ⇐ אזי $\left[U = -\int_{z_0}^{z} F_z\, dz\right.$ של הכוח F.

מגדירים כאנרגיה הפוטנציאלית

z_0 ← נקודת יחוס שרירותית (בחירת על-ידינו)

אזי:

$$\Delta E + \Delta U = 0$$

או

$$\left[\ \left(E(z_2) - E(z_1)\right) + \left(U(z_2) - U(z_1)\right) = 0\ \right]$$

זהו חוק שימור האנרגיה שאומר שסה"כ האנרגיה (קינטית + פוטנציאלית) נשמר אם הכוח שפועל ניתן לכתיבה כ- $F_z = -\frac{dU}{dz}$.

כח כזה נקרא <u>כח משמר</u>.

<u>דוגמא לכח משמר:</u>

כח הכובד: $F = -mg\,\hat{z}$

$$U = -\int F_z\, dz = mgz$$

<u>דוגמא לכח לא משמר:</u>

כח חיכוך, כוחות שתלויים במהירות וכדומה.

$$F = F(v) \qquad U = ???$$

אנרגיה יחידות:

יחידת האנרגיה ב- c.g.s היא הארג (erg):
$$1\,erg = gr\frac{cm^2}{sec^2}$$

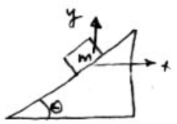
יחידת האנרגיה ב- m.k.s היא הג'אול (Joule)
$$1J = kg\frac{m^2}{sec^2} = 10^7 erg$$

יחידה נפוצה נוספת: קלוריה: (כמות האנרגיה הדרושה לחימום גרם מים ב-1^0C במעלה אחת).
$$1C = 4.2J$$

קלוריה "של אוכל" היא קילוקלוריה:
$$1kC = 1000\,C$$

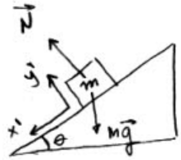
(מאה גרם שמן מכילים 900 קילוקלוריות של אנרגיה!!!)

שתי דוגמאות לשימוש באנרגיה לעומת שימוש בכוחות:



* מסה על מדרון: ⇐ מהו $v(y)$?

⇐ מהו הדרך $x'(t)$ לאורך המדרון ?



פתרון בעזרת כוחות:

שני הכוחות אשר "מרגישה" המסה m
הם $\vec N$ - הכוח הנורמל (ניצב) למישור
המונע מהמסה לעבור דרך המישור
ו- $m\vec g$, שהוא הכוח הכבידה המושך את המסה כלפי כדור הארץ.

לשם נוחות, נעבוד במערכת צירים מסובבת x', y' כך שהתנועה מאולצת לנוע בציר x' ואילו הכוח הנורמלי היות בציר y'.

ציר y': כוח נורמלי $\vec N$, אבל אין תאוצה ⇐ סכום הכוחות שווה לאפס:
$$\sum \vec F = m\vec a \Rightarrow \quad \hat{y}': \quad N - mg\cos\theta = ma_{y'} = 0$$
$$\Downarrow$$
ציר x':
$$\hat{x}': \quad mg\sin\theta = ma_{x'}$$

$$a_{x'} \equiv \frac{d^2x'}{dt^2} \equiv \underbrace{\ddot{x}' = g\sin\theta}_{\text{משוואת תנועה מסדר שני (בזמן!)}} \rightarrow v_{x'} = v = g(\sin\theta)t$$
מתחיל ממנוחה ←
$$x' = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$$
מתחיל מ- $x'=0$ ←

כדי לקבל $v(y)$, אנו צריכים קשר בין x' ל- y:
$$y = -x'\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}gt^2\sin^2\theta$$

בדיקה: (אם $\theta=0$ אין תרומה ל- y מ- x').

לכן:

$$t = \sqrt{\frac{2(-y)}{g\sin^2\theta}}$$

ולכן:

$$v = gt\sin\theta = \sqrt{2(-y)g}$$

כעת נחזור על החישוב בעזרת שימור אנרגיה:

אנרגיה קינטית: $E = \frac{1}{2}mv^2$

אנרגיה פוטנציאלית: $U = +mgy$

שימור אנרגיה נותן:

$$E + U = \text{const} \Rightarrow \Delta E + \Delta U = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\underbrace{v_0^2}_{0}\right) + \left(mgy - mg\underbrace{y_0}_{0}\right) = 0$$

מניחים כי מתחיל ממנוחה.

0 לשם נוחות

$$v = \sqrt{2g(-y)}$$

כדי למצוא את המרחק x', נגדיר משתנה x':

$$x' = -\frac{y}{\sin\theta}$$

ולכן:

$$v = \frac{dx'}{dt} \equiv \dot{x}' = \sqrt{2gx'\sin\theta}$$

משוואת תנועה מסדר I בזמן.

כדי לבצע אינטגרציה, נבצע הפרדת משתנים:

$$\frac{dx'}{x'^{1/2}} = \sqrt{2g\sin\theta}\, dt$$

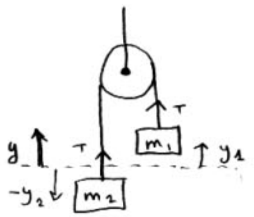
$$\int_{x'=0}^{x'} \frac{dx'}{x'^{1/2}} = \int_{t=0}^{t} \sqrt{2g\sin\theta}\, dt$$

$$2x'^{1/2} = \sqrt{2g\sin\theta}\, dt$$

$$x' = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$$

אם משתמשים בדרך שימור האנרגיה — מתקבלת משוואת תנועה מסדר ראשון ולא מסדר שני בזמן כפי שמתקבל אם משתמשים בכוחות.

<u>דוגמא שניה</u>: "מכונת אטווד" (Atwood Machine)



שתי מסות תלויות על חבל המונח על גלגלת חסרת חיכוך.

א. מה משוואות התנועה המתקבלות ע"י כוחות וע"י שימור אנרגיה?

ב. מה הפתרון אם הגלגלת מתחילה ממנוחה.

פתרון ע"י כוחות: הכח על מסה m_1:

$$\sum_{i} F_{1i} = m_1\ddot{r}_1$$

i ← על הכוחות

הכוחות הם:

$$\vec{T} + m_1\vec{g} = m_1\ddot{r}_1$$

נסתכל על רכיב $\hat{y}$:

$$T - m_1 g = m_1\ddot{y}_1$$

באותו אופן מסה 2:

$$T - m_2 g = m_2\ddot{y}_2$$

אותה מתיחות T.

היות והחבל לא נמתח - אורכו נשמר, כמו כן, (נבחר את המצב ההתחלתי כ- $y_1=y_2=0$

ונקבל:

$$y_1 = -y_2 \Rightarrow \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$

ע"י השוואת ה-T בין המשוואות, נקבל:

$$m_1\ddot{y}_1 + m_1 g = T = m_2\ddot{y}_2 + m_2 g$$

$$= -m_2\ddot{y}_1 + m_2 g$$

לכן:

$$\ddot{y}_1 = \left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g \xrightarrow[\text{+ מהירות התחלתית=0}]{\text{אינטגרציה}} y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g t^2$$

בדיקה: אם המסות שוות אין תאוצה ✓ אם $m_2=0$, המסה m_1 נופלת נפילה חופשית ✓

פתרון ע"י שימור אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_1^2$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = (m_1-m_2) g y_1$$

$y_1=-y_2;\ \dot{y}_1=-\dot{y}_2$ לפי

שימור אנרגיה:

$$E + U = const \longrightarrow \Delta E + \Delta U = 0$$

=0 אם מגדירים מצב התחלתי $y_1=0$.

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{y}_1^2 + \underbrace{\dot{y}_1^2(0)}_{\text{=0 אם מתחיל ממנוחה}}\right) + (m_2-m_1)\,g\,(y_1 - \overline{y_1(0)}) = 0$$

כאמור:

=0 אם מגדירים מצב התחלתי $y_1=0$

$$\dot{y}_1^2 = \dot{y}_1^2(0) + 2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)g(y_1 - y_1(0))$$

זהו משוואת התנועה משימור אנרגיה

נציב $y_1^2(0)=0$, $y_1(0)=0$ ונקבל:

$$\frac{dy_1}{dt} = \sqrt{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g\, y_1}$$

ע"י הפרדת משתנים ואינטגרציה:

$$\int_{y_1=0}^{y_1} \frac{dy_1}{y_1^{1/2}} = \sqrt{2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g} \int_{t=0}^{t} dt$$

ולכן:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) g t^2$$

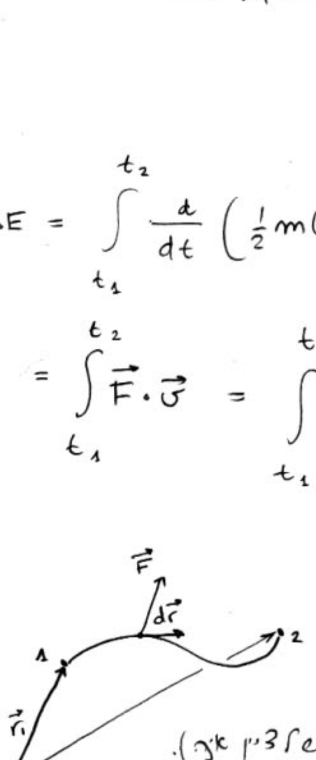
שימור אנרגיה בשלושה מימדים:

בין מצב 1 למצב 2: (מסה קבועה).

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m (\overbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}^{\vec{v}})\right) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\cdot \underbrace{\frac{d(m\vec{v})}{dt}}_{\vec{F}} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_{\vec{r}_1(t_1)}^{\vec{r}_2(t)} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \underbrace{W}$$

העבודה שעושה כח $\vec{F}$ על המסה.



* מה זה אינטגרל מסלולי?

באינטגרל מסלולי, אנו הולכים על דרך נתונה (ישנן אין סוף דרכים בין נקודה 1 ל-2! [illegible]). וסוכמים את האינטגרנד. במקרה שלנו!

על כל קטע $d\vec{r}$ לאורך הדרך, אנו סוכמים את $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ כלומר הולכים dr וסוכמים את $\vec{F}\cdot d\hat{r}$ - הרכיב של $\vec{F}$ בכיוון המסלול. ניתן להפריד את האינטגרל לרכיבים:

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

אם הולכים למשל במסלול: