כוחות משמרים:

העבודה שכוח עושה על חלקיק נתונה ע"י:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ז"א אנו בוחרים את המסלול של החלקיק במסלול האינטגרל. לאורך המסלול אנו צריכים לסכום את הרכיב של $\vec{F}$ בכיוון המסלול. דוגמא פשוטה ביותר: כוח קבוע:

$$W\Big|_{\vec{F}=const} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r}}_{\text{לסכום את קטעי הדרך } d\vec{r} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

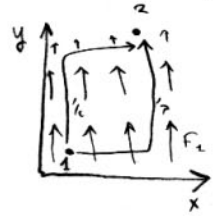
זה $\vec{F}$ קבוע הוא יכול לצאת מהאינטגרל.

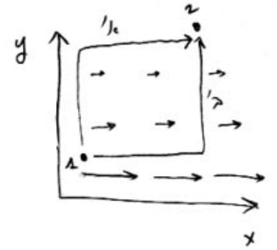
דוגמא נוספת, כח התלוי רק בקואורדינטה אחת והוא בכיוון אותה קואורדינטה:

$$\vec{F}_1 = F_y(y)\hat{y}$$

כוח התלוי בקואורדינטה אחת ניצב לקואורדינטה בכיוונו:

$$\vec{F}_2 = F_x(y)\hat{x}$$

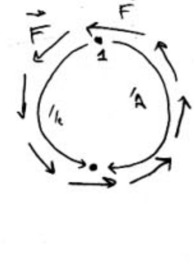




כאן ברור שהתרומה ל-W זהה בשני המסלולים: בחצי הראשון של מסלול ב' וחצי השני של מסלול א' התרומה ל-W אפס. בחלקי המסלול האחרים, התרומה זהה.

כאן W גדול במסלול ב' - מהתרומה מהחצי הראשון של המסלול. במסלול א' לעומת זאת התרומה בחלק המסלול הנע ימינה היא קטן.

דוגמא נוספת:



עבור הכח המתואר בציור - ברור כי W חיובי עבור מסלול א' ואילו W שלילי עבור מסלול ב'. לחילופין, ניתן לראות שיש מסלול סגור שעליו $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$

אינטגרל על מסלול סגור.

ז"א. במקרה זה ברור כי המסלול חשוב לערך האינטגרל ולכן אי אפשר לרשום אותו כהפרש של פונקציה בקצוות האינטגרל.

2.11.04

כדי לראות מה קורה בשני המקרים הראשונים, אנו צריכים לתאר את המסלול באופן כללי (צורה); נבחר לעשות זאת עם פרמטר s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

כך ש- $\vec{r}_1$ מתקבל מ- $s = s_1$ ו- $\vec{r}_2$ מ- $s = s_2$. כיצד יראה האינטגרל?

$$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} = \left(\frac{dx}{ds}\hat{x} + \frac{dy}{ds}\hat{y} + \frac{dz}{ds}\hat{z}\right)ds$$

ולכן:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(F_x\frac{dx}{ds} + F_y\frac{dy}{ds} + F_z\frac{dz}{ds}\right)ds$$

* במקרה הראשון:

$$\vec{F}_1\cdot d\vec{r} = F_y(y)\frac{dy}{ds}\,ds$$

נבחר את הפרמטר s כ- y (זאת זכותנו!):

$$= F_y(y)\,dy$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_1\cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} F_y(y)\,dy = -(U_2 - U_1)$$

$$F_y(y) \equiv -\frac{dU(y)}{dy}$$

את האינטגרל הזה ניתן לכתוב בעזרת פוטנציאל!

* במקרה השני:

$$\vec{F}_2\cdot d\vec{r} = F_x(y)\frac{dx}{ds}\,ds = F_x(y)\frac{dx}{dy}\,dy$$

היות והפונקציה היא פונקציה של y, נבחר שוב $s=y$:

ואז:

$$W = \int_{y_1}^{y_2} F_x(y)\frac{dx}{dy}\,dy$$

אולם כעת, האינטגרנד מכיל את $\frac{dx}{dy}$, שגם הוא תלוי בדרך ולא ניתן יהיה לכתוב אותו, בהכרח, כהפרש ערכים של פוטנציאל בקצה.

כח נשמר באופן כללי - ב- 3D:

כח משמר הוא כח שניתן לכתיבה בעזרת פוטנציאל:

$$U = U(x,y,z)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

"נגזרת חלקית" ← נגזרה לפי x ושמירה על הפרמטרים האחרים קבוע.

במקרה כזה:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)ds$$

אולם, הביטוי בסוגריים הוא כלל השרשרת לפונקציה עם מספר משתנים:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{dU}{ds}\,ds$$

(נגזרת "שלמה" של U לפי s - נגזרת $U(x,y,z)$ לפי כל מה שתלוי ב- s.)

ולכן, במקרה זה:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{s_1}^{s_2}\frac{dU}{ds}\,ds = -\left(U(s_2) - U(s_1)\right)$$

הפעולה:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right) = -\vec{\nabla} U$$

נקראת גרדיאנט. היא נותנת מפונקציה U וקטור שכיוונו השיפוע הגדול ביותר וגודלו גודל השיפוע (כמו נגזרת רגילה).

האופרטור $\vec{\nabla}$ נקרא נַבְּלָה (nabla) והוא כמו וקטור הנראה:
או דֶל (del)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

פעולות נוספות שניתן לעשות עם האופרטור:

דיברגנס:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

ורוטור (rotor) או קֶרֶל (curl):

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

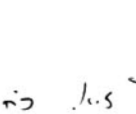
שדה משמר הוא שדה שניתן לכתיבה כ- $F = -\vec{\nabla} U$ (כי אז האינטגרל של העבודה תלוי רק בערכי קצה). אם אכן ניתן לכתוב בצורה כזו, למה שווה הרוטור של השדה F?

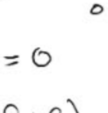
$$\underset{\text{שדה משמר}}{\vec{\nabla}\times\vec{F}} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} U \underset{\text{הצבת הגדרה של } \vec{\nabla}}{=} -\underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}\right)}_{\text{נגזרות הן חלופיות ולכן } =0}\hat{x} - \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\right)}_{0}\hat{y}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}\right)\hat{z} = 0$$

[צ.ל. כח התלוי רק בקואורדינטות (לא למשל במהירות) יהיה כח הנגזר משדה משמר אם ורק אם $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$]

אינטואיטיבית, פעולת הרוטור נותנת לנו את מידת העירבוליות של שדה $\vec{F}$:

 - שדה עם עירבוליות

 - שדה ללא עירבוליות.