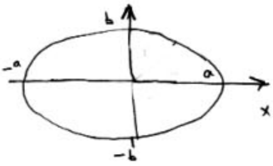
דוגמא:

נתון הכח $\vec{F}=(2x+3y)\hat{x}+(4y-3x)\hat{y}$. למה שווה העבודה לאורך המסלול הסגור המתואר ע"י האליפסה:



<u>פתרון</u>: האם הכח משמר?

נסתכל על רכיב $\hat{z}$ של הרוטור: $\vec{\nabla}\times\vec{F}$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y} = -3-3=-6 \neq 0$$

הכח אינו משמר ולכן: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$.: נחשב את האינטגרל במפורש לכן.

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy = (2x+3y)\,dx + (4y-3x)\,dy$$

נתאר את המסלול בעזרת הזוית θ

$$x = a\cos\theta \qquad y = b\sin\theta$$

$$dx = -a\sin\theta\, d\theta \qquad dy = b\cos\theta\, d\theta$$

המסלול מתואר ע"י $\theta = 0 \to 2\pi$. העבודה היא לכן:

$$W = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\Big[(2a\cos\theta+3b\sin\theta)(-a\sin\theta)+(4b\sin\theta-3a\cos\theta)\,b\cos\theta\Big]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\underbrace{(a^2-2b^2)\sin(2\theta)}_{\text{אינטגרל מתאפס!}}-3ab\Big)\,d\theta = -6\pi ab \neq 0$$

דוגמא לכח משמר - כח מרכזי

כח מרכזי הוא כח בעל כיוון רדיאלי בלבד וגודלו תלוי ברדיוס בלבד.

פורמלית, ניתן לכתוב את הכח כ-

$$\vec{F}=f(r)\hat{r}$$

נראה כי הוא כח משמר. דרך אחת היא לכתוב את הרוטור בקואורדינטות ספריות, אולם אנו לא יודעים לעשות זאת עדיין! אז נכתוב את הכח בקואורדינטות קרטזיות ונפעיל את הרוטור עליו.

ראשית, הוקטור $\hat{r}$ למה הוא שווה?

$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{|\vec{r}|}=\frac{x}{|\vec{r}|}\hat{x}+\frac{y}{|\vec{r}|}\hat{y}+\frac{z}{|\vec{r}|}\hat{z}$$

לכן:

$$\vec{F}=\frac{f(r)x}{|\vec{r}|}\hat{x}+\frac{f(r)y}{|\vec{r}|}\hat{y}+\frac{f(r)z}{|\vec{r}|}\hat{z}=g(r)x\hat{x}+\underbrace{g(r)y}_{F_y}\hat{y}+\underbrace{g(r)z}_{F_z}\hat{z}$$

נסמן לשם נוחות: $g(r)=\frac{f(r)}{r}$

למה שווה רכיב $\hat{x}$ של הרוטור?

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x=\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial(g(r)z)}{\partial y}-\frac{\partial(g(r)y)}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial(g(r))}{\partial y}z-\frac{\partial(g(r))}{\partial z}y=\underbrace{\frac{dg(r)}{dr}}_{\equiv g'(r)}\frac{\partial r}{\partial y}z-\frac{dg(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}y=$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$=g'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot z-g'(r)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}y=0$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

בצורה דומה, מתאפסים רכיבי $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$ של $\vec{\nabla}\times\vec{F}$.

הואיל ו- $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ ניתן לכתוב את $\vec{F}$ בעזרת גרדיאנט של פוטנציאל:

$\vec{F}=-\nabla U$, U הוא הפוטנציאל וניתן לראות שהוא יהיה תלוי רק ברדיוס r:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U(r)=-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{x}-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{y}-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{z}$$

$$=-\frac{dU}{dr}\frac{x}{r}\hat{x}-\frac{dU}{dr}\frac{y}{r}\hat{y}-\frac{dU}{dr}\frac{z}{r}\hat{z}$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{}}=\frac{y}{r}$

מהשוואה לביטוי עבור $\vec{F}$ למעלה רואים:

$$f(r)=-\frac{dU}{dr}$$

כלומר:

$$U(r)\Longleftrightarrow\vec{F}=f(r)\hat{r}=-\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

חוק הכבידה של ניוטון

* כח הכבידה הפועל בין שני גופים פרופורציוני ישר למסותיהם M_1 ו-M_2 ופרופורציוני הפוך למרחק בין שני הגופים:

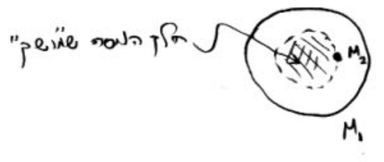
$$\vec{F} = -\frac{G M_1 M_2}{r^2}\hat{r}$$

G - קבוע הגרביטציה:

$$G = 6.67\times10^{-8}\ dyn\cdot cm^2\, gr^{-2} = 6.67\times10^{-11}\ N\cdot m^2\, kg^{-2}$$

אני הנחנו שהמסות נקודתיות. למעשה אם המסה אינה נקודתית, יש לבצע אינטגרל מורכב הסוכם את הכח מכל אלמנט במסה. ניתן להראות כי אם נמצאים מחוץ למסה בעלת סימטריה כדורית - ניתן להניח כי כל המסה מרוכזת בנקודה במרכז הכדור.

לעומת זאת, אם נמצאים בתוך מסה בעלת סימטריה כדורית, כי אז ניתן לתאר את המסה המושכת כמסה נקודתית עם מסה ששווה לחלק מהמסה הכדורית הנמצא ברדיוס קטן יותר מ-M_2:



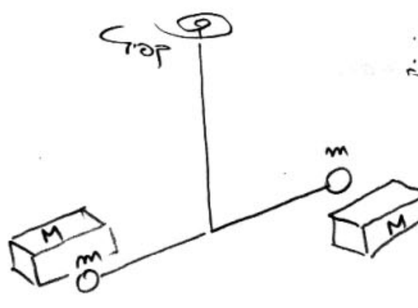
את התוצאה הזו ניתן לקבל בעזרת חוק גאוס אותו תלמדו בהמשך הסמסטר.

הקשר בין g ל-G:

$$\vec{F} = -mg\vec{r} = -\frac{G M_\oplus m}{R_\oplus^2}\hat{r} \Rightarrow g = \frac{G M_\oplus}{R_\oplus^2}$$

ניוטון לא ידע את G, רק את $M_\oplus G$. כיצד מצאים את G עצמו?

את G ניתן למצוא בעזרת ניסוי שנעשה לראשונה ע"י קוונדיש:



המסות m נמשכות ל-M. כח המשיכה מנוגד ע"י כח "הפיתול" של הקפיל. מצב שיווי המשקל תלוי במסות, בקפיל וב-G.

3.11.04

עקרון האקוויולנטיות:

המסה המופיעה ב- $F = \frac{GM_2M_1}{r^2}$ והמסה המופיעה ב- $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

הן אותן המסות. גרוש אין סיבה להניח כי המסה "האינרציאלית" המופיעה בחוק ה-II

תהיה זהה למסה המופיעה בחוק הכבידה (למשל, המטען החשמלי אינו זהה

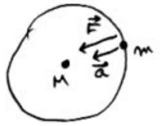
למסה של גוף). השוויון בין המסות נקרא עיקרון האקוויולנטיות. כיום ידוע

שהוא מתקיים לפחות עד כדי 5×10^{-13}.

מסלול מעגלי של לוויין:

במסלול מעגלי ($\dot{\theta} = \omega = const$) מצב אחד:

$$\vec{a} = -\omega r^2 \hat{r}$$



כדי לשמור על תאוצה זו, יש להשתמש בכוח. במקרה שלנו

(של לוויין) זהו כח הכבידה:

$$\vec{F} = -\frac{GM_\oplus m}{r^2}\vec{r}$$

לכן:

$$\frac{GM_\oplus m}{r^2} = m\omega^2 r$$

ומקבל:

$$r^3 = \frac{GM_\oplus}{\omega^2} \quad \text{או} \quad \omega = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r^3}}, \quad v = r\omega = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}$$

נניח שאני רוצה לוויין עם מחזור של 24h (כנ"ל, לוויין גיאוסטציונרי, השומר

מקום מעל נקודה קבועה על פני כדור הארץ).

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

$$r^3 = \frac{GM_\oplus P^2}{(2\pi)^2} = \frac{6.67\times10^{-8}\,dyn\cdot cm^2\,gr^{-2}\,(5.98\times10^{27}\,gr)\,(24\cdot3600)^2\,s^2}{(2\pi)^2}$$

$$r = 4.2\times10^{9}\,m = 4.2\times10^{4}\,km$$

היות ו- $r_\oplus$ הינו כ- 6400 ק"מ, מדובר על רדיוס הגדול פי 6.6.

דרך אחרת להציב, ללא ידיעת G:

ללא ידיעת G, נכתוב בעזרת g:

$$r^3 = \frac{GM_\oplus P^2}{(2\pi)^2}$$

נחלק ב- $R_\oplus^3$:

$$\left(\frac{r}{R_\oplus}\right)^3 = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}\cdot\frac{P^2}{(2\pi)^2 R_\oplus} = \frac{g P^2}{R_\oplus (2\pi)^2} =$$

$$= \frac{980\ \frac{cm}{sec^2}\cdot(24\cdot 3600\ sec)^2}{6.4\times10^8\ cm} = ,$$

מהירות בריחה:

כדי לחשב את מהירות הבריחה, נשתמש באנרגיות. נגדיר אנרגיה פוטנציאלית. לשם נוחות, נגדיר את נקודת האפס ב- $r=\infty$. לכן:

$$U(r) = -\int_{r=\infty}^{r} F\,dr = -\int_{r=\infty}^{r}(-)\frac{GM_1M_2}{r^2}\,dr = -\frac{GM_1M_2}{r}$$

הגדרה

כיוון פנימה

האנרגיה הקינטית על פני כוכב הלכת + אנרגיה פוטנציאלית שווה לאנרגיה קינטית מינימלית ב- $r=\infty$ + אנרגיה פוטנציאלית ב- $r=\infty$. האנרגיה הקינטית המינימלית היא 0.
(כל אנרגיה התחלתית גדולה יותר תיתן מהירות סופית ב- $r=\infty$):

$$\Delta(E+U)=0$$

$$\hookrightarrow\ \frac12 m v_0^2 + \underbrace{\frac12 m v_\infty^2}_{=0} + \left(-\frac{GM_\oplus m}{r_0} + \cancelto{0}{\frac{GM_\oplus m}{r_\infty}}\right) = 0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{r_0}}$$

מהירות הבריחה גדולה בפקטור $\sqrt{2}$ מהמהירות הדרושה לתנועה מעגלית באותו הרדיוס.