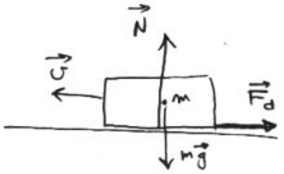
7.11.04

חיכוך מגע

אחד מהכוחות הנפוצים ביותר בחיי היום יום הוא כח החיכוך מגע בין שני משטחים. מבדילים בין הכח המתקבל כאשר יש תנועה יחסית בין המשטחים וכאשר אין תנועה יחסית.

* כשיש תנועה: כח החיכוך מנוגד לתנועה וניסיונית, נמצא כי הוא יחסי ל-N, לכח הנורמלי המפעילים המשטחים זה על זה.



ז.א. כח החיכוך $\vec{F}_d$ אינו תלוי בגודל המהירות ואינו תלוי בשטח המגע בין המשטחים.

$$F_d = \mu_k N$$

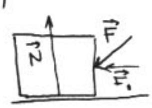
ניתן לכתוב:

μ_k הוא מקדם החיכוך הקינמטי (שיש תנועה).

* כשאין תנועה: כח החיכוך מבטל את הרכיב האופקי של הכוחות הנוספים הפועלים על המסה m כל עוד הם קטנים מ-

$$F_d < \mu_s N$$

כאשר μ_s הוא מקדם החיכוך הסטטי. דהיינו, אם מפעילים כח $\vec{F}$ על המסה



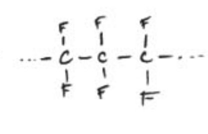
היא תישאר במנוחה כל עוד הרכיב $\vec{F}_\parallel$ המקביל למשטח (וניצב ל- $\vec{N}$) מקיים: תנאי להישאר במנוחה $\Longleftrightarrow$ $|F_\parallel| < \mu_s N$

ברגע שהגוף יתחיל לנוע, כח החיכוך יקטן מ- $\mu_s N$ ל- $\mu_k N$ כי $\mu_k \le \mu_s$.

חשוב לציין שהביטויים לכח החיכוך הם אימפיריים (קירוב לתוצאות ניסיוניות) ולא מבוססים על תיאוריה כזו או אחרת. מה גם שישנם מקרים בהם התיאור הזה אינו מתקיים וגם אם כן מתקיים, לא מדויק, ביחוד בגבול בין גוף נח לגוף נע.

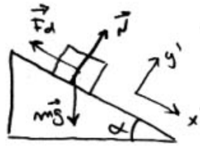
מקדמי חיכוך אופייניים:

μ_s	μ_k	
0.74	0.57	פלדה על פלדה
0.25-0.5	0.2	עץ על עץ
0.94	0.4	זכוכית על זכוכית
0.1	0.04	עץ עם שעווה על קרח (ללא מים - "שלג יבש")
0.14	0.1	על "שלג רטוב"
0.1	0.03	קרח על קרח (גם ב- $\approx -40°C$)
0.04	0.04	טפלון על טפלון ←



7.11.04

זוית הטיה מקסימלית:



מסה נמצאת על מישור משופע בזוית α, מה הזוית המקסימלית α שמעליה המסה תחליק?

פתרון:
כשהמסה במנוחה, סכום הכוחות מתאפס $\sum \vec{F}_i = 0$. הכוחות מתוארים בציור: $\vec{N}$, $m\vec{g}$ ו-$\vec{F}_d$.

בכיוון y':
$$y': \quad N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$$

ובכיוון x':
$$x': \quad mg\sin\alpha - F_d = 0 \Rightarrow F_d = mg\sin\alpha$$

התנאי לסטטיות:
$$F_d \leq \mu_s N$$

נציב את F_d ו- N:
$$mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha$$

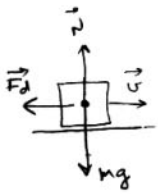
(חלוקה ב- $\cos\alpha$):
$$tg\,\alpha \leq \mu_s$$

זהו התנאי על הזוית כדי שהמסה לא תחליק במדרון.

מרחק עצירה:

* מסה נעה על משטח במהירות התחלתית v_0 עד איזה מרחק תוכל להגיע?
* מהו ההספק (האנרגיה ליח' זמן) שיש להשקיע על מנת שהמסה תמשיך לנוע במהירות קבועה v_0?

פתרון:



דרך I: בעזרת כוחות: (החוק השני).

בציר y:
$$-mg + N = 0 \rightarrow N = mg$$

בציר x:
$$\sum F_x = m\ddot{x}$$
$$-\mu_k N = m\ddot{x}$$

ולכן
$$\ddot{x} = -\frac{\mu_k N}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g$$

אינטגרציה:
$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \int_{t=0}^{t} -\mu_k g\,dt = \underbrace{\dot{x}_0}_{v_0} - \mu_k g t$$

ופעם נוספת:
$$X = x_0 + \int_{t=0}^{t} (\dot{x}_0 - \mu_k g t)\,dt =$$
$$= x_0 - \dot{x}_0 t - \frac{1}{2}\mu_k g t^2$$

נקודת עצירה מתקבלת ב- $\dot{x} = 0$ או:
$$\dot{x}_0 - \mu_k g t\Big|_{stop} = 0 \Rightarrow t_{stop} = \frac{\dot{x}_0}{\mu_k g}$$

מרחק העצירה:

$$x\big|_{t=t_{stop}} - x_0 = \dot{x}_0 t_{stop} - \frac{1}{2}\mu_k g t_{stop}^2 =$$

$$= \dot{x}_0 \frac{\dot{x}_0}{\mu_k g} - \frac{1}{2}\mu_k g\left(\frac{\dot{x}_0}{\mu_k g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}_0^2}{\mu_k g}$$

* הפסדת אנרגיה: הכח אינו משמר ולכן יש לרשום:

$\Delta E = W$

מהי העבודה אותה עושה כח החיכוך?

$$W = \int_{x=x_0}^{x=x_{stop}} \vec{F}\cdot d\vec{x} =$$

$$= \vec{F}\cdot\int_{x=x_0}^{x=x_{stop}} d\vec{x} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x} = -F_d\,\Delta x =$$

(כיוון והכח קבוע)

כח החיכוך בכיוון מנוגד לתנועה!

$$= -\mu_k m g\,\Delta x$$

מהו שינוי האנרגיה?

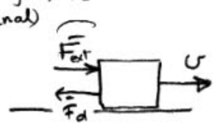
$$\Delta E = \overset{\text{סופי}}{E_f} - \overset{\text{התחלתי}}{E_i} = 0 - \frac{1}{2}m v_0^2 = -\frac{1}{2}m v_0^2$$

מהירות סופית=0

לכן:

$$\Delta E = W \Rightarrow -\frac{1}{2}m v_0^2 = -\mu_k m g \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\mu_k g}$$

כח חיצוני מופעל (external)



* מהו ההספק הדרוש על מנת לשמור על v_0?

אם המסה נעה במהירות קבועה, סכום הכוחות מתאפס:

כלומר, יש להפעיל כח הפוך לכח החיכוך:

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_d \qquad F_{ext} = \mu_k m g$$

אם הגוף נע מרחק Δx, העבודה להזיז אותו, והכח הוא F_{ext} היא:

$$\Delta W = F_{ext}\,\Delta x$$

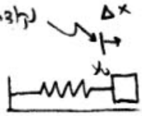
אם אני עושים זאת ביחידת זמן Δt:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = F_{ext}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

עבור $\Delta \to d$ (בקירוב הרגעי):

$$\underbrace{P}_{\text{ההספק}} \equiv \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\text{אנרגיה ליחידת זמן}} = F_{ext}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_0} = F_{ext} v_0 = \mu_k m g v_0$$

קפיץ ופוטנציאל הרמוני:



קפיץ מאופיין ע"י כח יחסי להסטה משיווי משקל:

$$\vec{F} = -k(x-x_0) = -k\Delta x$$

קבוע הקפיץ

הפוטנציאל הקשור לכח:

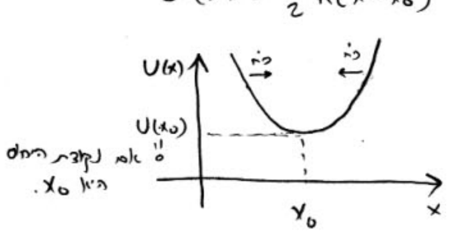
$$U = -\int_{x_1}^{x} F\,dx = -\int_{x_1}^{x} -k(x-x_0)\,dx$$

(x_1 נקודת הייחוס הפוטנציאל)

$$= \frac{1}{2}k(x-x_0)^2\Big|_{x_1}^{x} = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_1-x_0)^2$$

אנו רואים כי כדאי לנו להגדיר את נקודת הייחוס של הפוטנציאל בנקודת שיווי משקל ($x_1=x_0$) כי אז האיבר השני, שהוא קבוע, יתאפס:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$



נקודות בהן נגזרת הפוטנציאל (או הגרדיאנט ב-3D) מתאפסת, נקראות נקודת שיווי משקל כי שם אין כח.

אם הנגזרת השניה >0, השיווי משקל יציב.

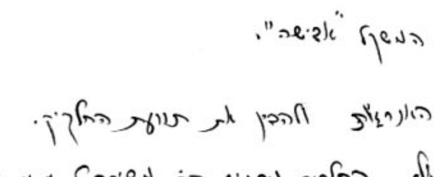
(אם נזיז את החלקיק - הוא ירצה לחזור).

אם הנגזרת השניה <0, השיווי משקל אינו יציב - הפרעה קטנה והחלקיק ירגיש כח שרוצה להרחיק אותו מנקודת שיווי המשקל.

במקרה והנגזרת השניה מתאפסת, נקודת שיווי המשקל "אדישה".

שימור אנרגיה: ניתן להסתכל על הגרף של האנרגיה ולהבין את תנועת החלקיק.

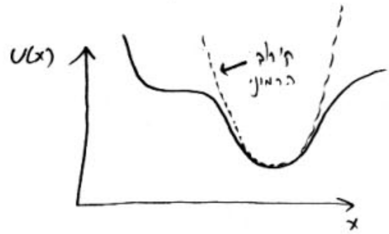
כשהחלקיק בנקודה 1 כל האנרגיה היא פוטנציאלית. החלקיק מרגיש כח משיכה למרכז (מינוס נגזרת של U!). בנקודה 2, חלק מהאנרגיה הפוטנציאלית הפכה לאנרגיה קינטית. בנקודה 3, כל האנרגיה בצורה של אנרגיה קינטית. ב-4 הפכה חזרה לפוטנציאלית.



$$\frac{1}{2}kx_m^2 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \frac{1}{2}kx_m^2 \rightarrow \dots$$

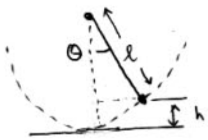
פוטנציאל הרמוני ("קפיץ") - קירוב מינימום של פוטנציאל.

הפוטנציאל ההרמוני "של קפיץ" מופיע בכל מקרה שרוצים לקרב מינימום של הפוטנציאל ע"י פרבולה:



פוטנציאל שנראה כמו $U(x)=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ נקרא פוטנציאל הרמוני. כל חזקה אחרת - הפוטנציאל נקרא אנהרמוני.

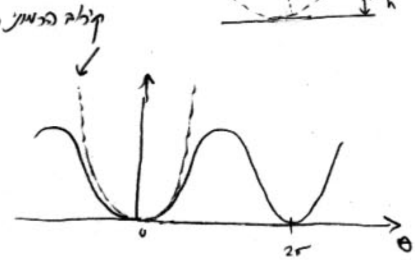
דוגמא: מטוטלת מתמטית (מסה נקודתית) על חוט חסר מסה. הגובה h הוא:



$$h=\ell(1-\cos\theta)$$

לכן האנרגיה הפוטנציאלית היא:

$$U(\theta)=mg\ell(1-\cos\theta)$$



מתי לא פוטנציאל הרמוני: מהו הקירוב ההרמוני של הפוטנציאל?

אנו רוצים לקרב את $1-\cos\theta$ כפונקציה ריבועית של θ.

דרך I: טורי טיילור (עוד מעט במתמ"ב):

$$f(x)\simeq f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0}+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}+\dots$$

$$(1-\cos x)=0+\underbrace{0}+\frac{\cos\theta}{2}\bigg|_{x=x_0}(\theta-\underbrace{\theta_0}_{0})^2=\frac{\theta^2}{2}$$

מסביב ל- $x=0$ מקבלים

שהנגזרות הראשונות מתאפסות

דרך II: בלי טיילור:

$\sin x\simeq x \quad x\ll 1$

$$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}\simeq 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\theta^2$$

לכן בקירוב של זוית קטנה, המטוטלת מתנהגת כמו פוטנציאל הרמוני (כמו קפיץ). רק עושים זאת בזהירות — מפתחים לחזקות קטנות ומקבלים פוטנציאלים הרמוניים.